北大燕园

2018年 李正元·范培华

考研数学 2

数学 历年试题解析

数学三

主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

中国政法大学出版社

北大燕园

2018年李正元[illegible]学②

数学

数学三

历年试题解析

主编　北京大学　范培华

北京大学　尤承业

北京大学　李正元

中国政法大学出版社

2017·北京

图书在版编目（CIP）数据

2018年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学三/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-5620-7236-2

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①李… ②尤… ③范… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第312788号

出版者　中国政法大学出版社

地　址　北京市海淀区西土城路25号

邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088

网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）

电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)

承　印　保定市中画美凯印刷有限公司

开　本　787mm×1092mm　1/16

印　张　23.25

字　数　550千字

版　次　2017年1月第1版

印　次　2017年1月第1次印刷

定　价　49.80元

前　言

(一)

对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了2003年~2017年全国硕士研究生招生统考数学三试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该内容考过什么样的题目,是从哪个角度来命制题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度,并

在复习时能明确目标,做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起,能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同),并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外,为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况,**本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题(含解答),同时也精选了2001年(含)以前数学三相关内容的典型考题(含解答)**,供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的**《考研数学复习全书(数学三)》**,该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路较吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利,考研成功!

编者

2017年1月

目　　录

第一篇　2017 年考研数学三试题及答案与解析

第二篇　2003 ~ 2016 年考研数学三试题

第三篇　2003 ~ 2016 年考研数学三试题分类解析

第一篇　2017 年考研数学三试题及答案与解析

2017 年考研数学三试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.　　【　】

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是

(A) $(0,0)$.　　(B) $(0,3)$.

(C) $(3,0)$.　　(D) $(1,1)$.　　【　】

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则

(A) $f(1)>f(-1)$.　　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.　　【　】

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) -1.　　(D) -2.　　【　】

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　【　】

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.　　【　】

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

(A) A 与 B 相互独立.　　(B) A 与 B 互不相容.

(C) AB 与 C 相互独立.　　(D) AB 与 C 互不相容　　【　】

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论不正确的是

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从χ^2分布. (D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从χ^2分布. 【 】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\,dx=$ ________.

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$ ________.

(11) 设生产某产品平均成本为 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$,Q 为产量,则边际成本为________.

(12) 设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数,且 $df(x,y)=ye^y dy+x(1+y)e^y dy$,$f(0,0)=0$,则$f(x,y)=$ ________.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为________.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$,$P\{X=1\}=a$,$P\{X=3\}=b$,若 $\boldsymbol{E}X=0$,则 $\boldsymbol{D}X=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(**本题满分 10 分**)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$,其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

(17)(**本题满分 10 分**)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(18)(**本题满分 10 分**)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间(0,1)内有实根,确定常数 k 的取值范围.

(19)(**本题满分 10 分**)

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots)$,$S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ) 证幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

(Ⅱ) 证 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0\ (x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 表达式.

(20)(**本题满分 11 分**)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ) 证明 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(**本题满分 11 分**)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 的概率分布为 $P\{X = 0\} = P\{X = 2\} = \dfrac{1}{2}$,$Y$ 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y \leqslant EY\}$;

(Ⅱ)求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23)(**本题满分 11 分**)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的,设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|\ (i = 1,2,\cdots,n)$,利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度;

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

2017 年考研数学三试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 按连续性的定义,归结为求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

方法一 用等价无穷小因子替换$\left(x \to 0 \text{ 时 } 1 - \cos\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2\right)$得

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{ax} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax} = \frac{1}{2a}.$$

方法二 用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{ax} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\sin\sqrt{x})\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{a} = \frac{1}{2a}.$$

因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续,得

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$$

即 $$\frac{1}{2a} = b,\quad ab = \frac{1}{2}$$

因此选(A).

---

(2)【分析】 令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y(3 - 2x - y) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x(3 - x - 2y) = 0, \end{cases}$

得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3 - 2x - 2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x.$$

在点(1,1)处有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-2,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-1,$$

$AC-B^2>0$,从而(1,1)为极值点,故选(D).

---

(3)【分析一】 这是函数值的比较问题,常用单调性方法.由$f(x)f'(x)>0$,可判断$f^2(x)$的单调性:

$$(f^2(x))'=2f(x)f'(x)>0$$

于是$f^2(x)$在所考虑的区间上单调上升,因此

$$f^2(1)>f^2(-1)$$

即
$$|f(1)|>|f(-1)|$$

选(C).

【分析二】 选择题有时可用特殊选取法.

取$f(x)=e^x$,满足$f(x)f'(x)>0$,且有

$$f(1)>f(-1)>0$$

于是排除(B)与(D).再取$f(x)=-e^x$,同样满足$f(x)f'(x)>0$,且有

$$f(1)<f(-1)<0$$

故可排除(A).因此选(C).

---

(4)【分析一】 令$f(x)=\sin x-k\ln(1-x)$,在$x=0$处展开为

$$f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-k\left[-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]=(1+k)x+\frac{k}{2}x^2+o(x^2),$$

所以根据选项,当$k=-1$时,$\left|\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|\sim\frac{1}{2n^2}$,于是$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$绝对收敛,故选(C).

【分析二】 用比较判别法.由于$p>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,将原级数与$p$级数比较,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^p}}\xlongequal{\frac{1}{n}=x}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-k\ln(1-x)}{x^p}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x+\frac{k}{1-x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1-x)\cos x+k}{px^{p-1}(1-x)}$$

当$p>1$时,上述极限存在的充要条件是$k=-1$,故选(C).

> **评注** 函数$f(x)=\sin x-k\ln(1-x)$的正负与k有关,当$k>0$时,$f(x)>0$;当$k\leqslant-1$时,$f(x)<0$.这都不影响用比较判别法.

---

(5)【分析】 矩阵不可逆的充要条件是它有特征值0.$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm T}$的特征值为$0,0,\cdots,0$,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}=1$,于是:$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm T}$的特征值为$1,1,\cdots,1,0$,$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm T}$不可逆.

---

(6)【分析】 A和B都是上三角矩阵,特征值是对角线上的元素,都是1,2,2.它们是否与C相似只用看是否可相似对角化.

对二重特征值2,$n-r(A-2E)=3-1=2$(等于重数),于是A可相似对角化,A相似于C.

对二重特征值2,$n-r(B-2E)=3-2=1$(小于重数),于是B不可相似对角化,B不相似于C.

---

(7)【分析】 由题设知，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，

由 $A\cup B$ 与 C 相互独立知

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)\cap C]&=P(A\cup B)P(C)=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)\\&=P(AC)+P(BC)-P(AB)P(C)\end{aligned}$$

而 $$P[(A\cup B)\cap C]=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

故 $P(AB)P(C)=P(ABC)$，即 AB 与 C 相互独立，所以选(C).

---

(8)【分析】 (A) 选项 $X_i-\mu\sim N(0,1)$ 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\chi^2(n)$；

(B) 选项 $X_n-X_i\sim N(0,2)$ 所以$\dfrac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$，从而 $2(X_n-X_1)^2$ 不服从 χ^2 分布；

(C) 选项 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

(D) 选项 $\overline{X}-\mu\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$所以 $n(\overline{X}-\mu)^2-\chi^2(1)$.

故选(B).

二、分析题

(9)【分析】 根据奇偶函数的积分性质，以及定积分的几何意义，易得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x+\sqrt{\pi^2-x^2})\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx\\&=0+2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx=\frac{\pi^3}{2}.\end{aligned}$$

---

(10)【分析】 对应的齐次差分方程的通解为 $\tilde{y}_t=C2^t$，设原方程特解为 $y_t^*=At2^t$，代入原方程解得 $A=\dfrac{1}{2}$，故特解为 $y_t^*=\dfrac{1}{2}t2^t$，所以原方程通解为 $y_t=\left(C+\dfrac{1}{2}t\right)2^t$.

---

(11)【分析】 由题知，总成本为 $C(Q)=Q\cdot\overline{C}(Q)=Q(1+e^{-Q})$，所以边际成本为

$$C'(Q)=[Q(1+e^{-Q})]'=1+e^{-Q}-Qe^{-Q}.$$

---

(12)【分析一】 观察法(凑微分法)

$$\begin{aligned}df(x,y)&=ye^y dx+x\,d(ye^y)\\&=d(xye^y)\end{aligned}$$

其中$(1+y)e^y dy=e^y dy+y\,de^y=d(ye^y)$.

于是 $f(x,y)=xye^y+C$

由 $f(0,0)=0\Rightarrow C=0$. 因此 $f(x,y)=xye^y$.

【分析二】 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^y,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^y$

将第一式对 x 积分得

$$f(x,y)=xye^y+C(y)$$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^y+C'(y)=x(1+y)e^y$

$\Rightarrow C'(y)=0,C(y)=C\Rightarrow f(x,y)=xye^y+C$

由 $f(0,0)=0\Rightarrow C=0$. 因此 $f(x,y)=xye^y$.

(13)【分析】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是可逆矩阵. 于是 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)]=r(\boldsymbol{A})$.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ r(\boldsymbol{A})=2.$$

(14)【分析】 由 $\boldsymbol{E}(X)=-2\times\frac{1}{2}+1\times a+3\times b=0,a+b=\frac{1}{2}$ 可得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{4}$,故

X	-2	1	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{D}(X)=\boldsymbol{E}(X^2)-\boldsymbol{E}^2(X)=4\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}-0=\frac{9}{2}.$$

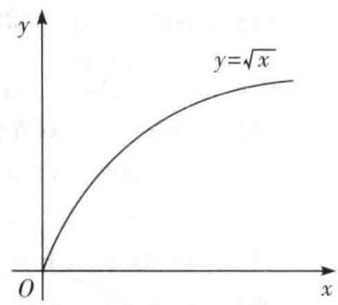
三、解答题

(15)【分析与求解】 用洛必达法则求此 $\frac{0}{0}$ 型极限时，要将变限积分求导，但因被积函数含参变量 x，作变量替换转化为纯变限积分的情形，

$$\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}-\int_x^0\sqrt{u}\,e^{x-u}du=e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}\mathrm{d}u$$

代入得
$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}}{\sqrt{x^3}}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$$

(16)【分析与求解】 记 $I=\iint\limits_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}y$$



其中
$$\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}(1+x^2+y^4)}{(1+x^2+y^4)^2}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^4}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right),$$

则
$$I=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x-\arctan x\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi.$$

(17)【分析与求解】 $I_n\xlongequal{记}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

这是 $f(x)=x\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和 $\left(\text{区间 } n \text{ 等分，每个小区间长为}\frac{1}{n}\right)$，于是

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx^2 = \frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}.$$

---

(18)【分析与求解】 若$f(x)$在(a,b)连续且单调,则$f(x)$在(a,b)区间取到常数k的充要条件是k界于$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$之间.

现令 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ $(x\in(0,1])$

1° 先求 $f(1) = \dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}$,

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}$$

2° 考察$f(x)$的单调性.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{(1+x)x^2\ln^2(1+x)}$$

再令 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2 \Rightarrow$

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x \overset{\text{令}}{=\!=} h(x)\ (x\in[0,1))$$

$$\Rightarrow \qquad h'(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x} < 0\ (x\in[0,1))$$

$\Rightarrow h(x) < h(0) = 0(x\in(0,1)), g(x) < g(0) = 0(x\in(0,1)) \Rightarrow f'(x) < 0(x\in(0,1))$,又$f(x)$在$(0,1]$连续$\Rightarrow f(x)$在$(0,1)$单调下降. 因此$f(x)$在$(0,1)$取$k$值即$f(x)=k$在$(0,1)$有实根的充要条件是

$$\frac{1-\ln 2}{\ln 2} = f(1) < k < \lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{2}.$$

评注 求$\dfrac{0}{0}$型极限$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$时,分母中用了等价无穷小因子替换:$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$,分子中也可用泰勒公式:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ (x\to 0)$$

于是得

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{x-\left[x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(19)【分析与求解】 （Ⅰ）为求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，要考察 $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

方法一 由 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

可归纳证明：$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 2\ (n = 3,4,5,\cdots)$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$
$$= 1 + 0 = 1$$

因此收敛半径 $R = 1$.

方法二 由 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$

得
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}[na_n - (n+1)a_n + a_{n-1}] = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1})$$
$$= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)(a_{n-1} - a_{n-2})$$
$$= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)(a_1 - a_0)$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\ (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} - 1$$

该级数的部分和

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - 1) = e^{-1} - 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{-1}}{e^{-1}} = 1$

即该幂级数的收敛半径 $R = 1$.

（Ⅱ）由 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n (|x| < 1) \Rightarrow$

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - xS(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$
$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left[a_{n+1} - \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})\right]x^n$$
$$= 0\ (x \in (-1,1))$$

又 $S(0)=a_0=1$. 求和函数 $S(x)$ 转化为求解初值问题

$$\begin{cases}(1-x)\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}-xS(x)=0\\ S(0)=1\end{cases}$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}S}{S}=\dfrac{x}{1-x}\mathrm{d}x$

积分得

$$\ln|S|=\int\frac{x}{1-x}\mathrm{d}x+C_1=\int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x+C_1$$

$$=-x-\ln(1-x)+C_1$$

$$S(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

由 $S(0)=1\Rightarrow C=1$. 因此

$$S(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}\ (x\in(-1,1))$$

评注 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<2\ (n=3,4,5,\cdots)$

由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots)$

令 $n=1$ 得 $a_2=\dfrac{1}{2}(a_1+a_0)=\dfrac{1}{2}$

令 $n=2$ 得 $a_3=\dfrac{1}{3}(2a_2+a_1)=\dfrac{1}{3}$

$n=3$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{3}<2$

设 $n=k$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a_k}{a_{k-1}}<2$，则 $n=k+1$ 时，

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}\frac{a_{k-1}}{a_k}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}<\frac{2k+1}{2(k+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)}<\frac{a_{k+1}}{a_k}<\frac{k}{k+1}+\frac{2}{k+1}<2$$

因此，对任意 $n=3,4,5,\cdots$，

$$\frac{1}{2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<2.$$

(20)【分析与求解】 （Ⅰ）由于 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$|\boldsymbol{A}|=0$，于是 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,\lambda_1,\lambda_2$，由于它们两两不等，λ_1,λ_2 都不为 0，并且 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix}$. 于是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix}=2.$$

（Ⅱ） 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即 $\boldsymbol{A}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}=0$. 说明 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的一个解.

由于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系只包含一个解，于是 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 构成 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系.

$$A(1,1,1)^{\mathrm T}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta},$$

因此$(1,1,1)^{\mathrm T}$是$AX=\boldsymbol{\beta}$的一个解.于是$AX=\boldsymbol{\beta}$的通解为:

$$(1,1,1)^{\mathrm T}+C(1,2,-1),\ C\text{ 取任意常数}.$$

---

(21)【分析与求解】 f的矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{bmatrix}$,$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$的矩阵$B=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

于是A相似于B,故$|A|=|B|=0$.

求出$|A|=6-3a$,得$a=2$.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&2\end{bmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-6&0&6-\lambda\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-6&0&0\\-1&\lambda+1&-2\\4&-1&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)(\lambda^2+3\lambda)=(\lambda-6)(\lambda+3)\lambda.$$

A的特征值为$6,-3,0$.

求A的单位特征向量:

求出$(A-6E)X=0$的一个非零解$(1,0,-1)^{\mathrm T}$,单位化得$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\sqrt2}{2}(1,0,-1)^{\mathrm T}$;

求出$(A+3E)X=0$的一个非零解$(1,-1,1)^{\mathrm T}$,单位化得$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\sqrt3}{3}(1,-1,1)^{\mathrm T}$;

求出$AX=0$的一个非零解$(1,2,1)^{\mathrm T}$,单位化得$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\sqrt6}{6}(1,2,1)^{\mathrm T}$.

$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$依次是$A$属于$6,-3,0$的单位特征向量.

作正交矩阵$Q=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=QY$下化为$6y_1^2-3y_2^2$.

---

(22)【分析与求解】 (Ⅰ)由$EY=\int_0^1 2y^2\mathrm dy=\frac23$,得

$$P\{Y\leqslant EY\}=P\left\{Y\leqslant\frac23\right\}=\int_0^{\frac23}2y\mathrm dy=\frac49.$$

(Ⅱ) $F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=P\{X=0,0+Y\leqslant z\}+P\{X=2,2+Y\leqslant z\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant z-2\}=\frac12P\{Y\leqslant z\}+\frac12P\{Y\leqslant z-2\},$$

当$z<0$时,$F(z)=0$;

当$0<z<1$时,$F(z)=\frac12\int_0^z2y\mathrm dy+0=\frac{z^2}{2}$;

当$1\leqslant z<2$时,$F(z)=\frac12(1+0)=\frac12$;

当$2\leqslant z<3$时,$F(z)=\frac12+\frac12\int_0^{z-2}2y\mathrm dy=\frac12+\frac{(z-2)^2}{2}$;

当$z\geqslant3$时,$F(z)=1$.