



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

University

Physics

物理学

(第6版)

阅读与解题指导

主编 严导淦

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

University

Physics

物理学

(第6版)

阅读与解题指导

主编 严导淦

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是与严导淦编写的高等学校教材《物理学》(第6版)相配套的一本教学辅导用书,教学内容符合《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版)。全书按教材章节顺序编写,每章一般由“教学要求”“本章主要内容框图”“阅读指导”“本章自测题和问题选解”“本章习题解答”和“教学参考资料”六个部分组成,旨在明确教学目标,引导读者阅读教材内容,帮助读者梳理知识点,形成完整的知识体系,加深对知识点的理解,亦能由浅入深地了解解题过程,增强解题能力;在此基础上,本书提供“教学参考资料”,旨在深化对读者知识点的理解并拓宽读者的知识面。

本书可作为全日制普通高等学校非物理类专业师生平时阅读、习题课、课堂讨论课或考试复习的教学用书,亦可供高等教育自学考试、远程教育(如函授和电视大学)、夜大、高等职业技术学院的读者作为自学指导书,供教学中参考。

图书在版编目(CIP)数据

物理学(第6版)阅读与解题指导 / 严导淦主编. --
北京:高等教育出版社,2017.2
ISBN 978-7-04-046751-2

I. ①物… II. ①严… III. ①物理学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 275718 号

策划编辑 马天魁	责任编辑 高聚平	封面设计 姜磊	版式设计 徐艳妮
插图绘制 杜晓丹	责任校对 刘丽娟	责任印制 赵义民	

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市密东印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25.5
字 数 610 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
网上订购	http://www.hepmall.com.cn http://www.hepmall.com http://www.hepmall.cn
版 次	2017 年 2 月第 1 版
印 次	2017 年 2 月第 1 次印刷
定 价	44.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 46751-00

前言

严导淦编写的《物理学》(第6版)是供全日制普通工科院校的本科大学物理课程使用的一本教材(以下简称“教材”),亦可兼作函授、网络、电视大学、高等教育自学考试等远程教育和夜大学、高等职业技术学院、业余大学的教学和参考用书。本书是配合这本教材的教学辅导书。

本书的编写主旨是:引导学生在教学的过程中提高阅读效果和增强解题能力;并有助于拓展科技视野,深化物理内涵,以便能更好地掌握教材的内容。

本书是配合这套教材的教学辅导用书,不仅是全日制院校师生必备的教学参考书,亦可供函授、夜大、网络教育和自学考试等各类成人高等教育的学生作为自学指导书。

本书是按照教材正文的章目顺序编排的,每章大体上由六个部分组成。现将各部分的编写意图和教学功用简介如下:

(1) **教学要求** 按照现行的“教学基本要求”,对每章内容提出“掌握”、“理解”、“了解”三个要求,能使读者在学习过程中对全章各节内容突出重点、分清主次。

(2) **本章主要内容框图** 在梳理全章内容脉络的基础上,采用框图的形式,对全章主要内容及其相互之间的连接作了提纲挈领的导引,引领读者在阅读教材时便于理顺思路,对全章主要内容进行系统的回顾,并有助于临考前的参考和复习之用。

(3) **阅读指导** 对全章内容按序逐条进行概括、梳理、并对主要内容作了重墨缕述,形同一份读书笔记。

(4) **本章自测题和问题选解** 在教材正文中除了相关例题外,在每章开始布设一个[自测题]或[科技小品],内容具有启发性、趣味性和实用性,一般供读者学完全章内容后去探索、求解和扩大知识视野;至于散布于每章各节中的问题,则供学生在听课和自学后,用来及时检测对本节内容的理解程度,有助于读者在自学过程中循序渐进。

(5) **本章习题解答** 着重指导读者的解题思路和分析方法,针对学生在解题中常见的错误,旨在引导学生沿着正确的解题途径规范地解答习题。读者在做习题时必须先由自己动手解题,不论所得结果是否与答案相符,应在自行解题的基础上独立思考,然后,再参考和揣摩本书的解答过程。否则,无助于提升读者的解题能力和巩固、消化所学的知识。

(6) **教学参考资料** 在这部分内容中,有的是对教材中某些问题做了一些钩沉探微,有所深化;有的则根据教学基本要求,对教材中有些内容不宜过分展开,而在这里作一些必要的延拓。这样,既可聊供教师备课时参考之用,亦可供学有余力的学生在掌握教材内容的基础上扩大知识视野。

最后,在本书编写过程中,深受宋士贤教授的臂助,宋教授还提供了许多有益的资料,为感无既。

鉴于编者成书匆促,恐多舛误,深望使用本书的老师和同学不吝赐教,这将使本书和编者受益匪浅。

严导淦

2014年岁次孟冬于同济大学舍

目 录

第 0 章 物理学 物理量及其计量单位	1	4.6 教学参考资料	94
0.1 教学要求	1	第 5 章 固体的弹性 流体力学简介	99
0.2 本章主要内容框图	1	5.1 教学要求	99
0.3 本章自测题和问题选解	2	5.2 本章主要内容框图	100
0.4 教学参考资料	3	5.3 阅读指导	100
第 1 章 质点运动学	11	5.4 本章自测题和问题选解	103
1.1 教学要求	11	5.5 本章习题解答	105
1.2 本章主要内容框图	12	5.6 教学参考资料	109
1.3 阅读指导	12	第 6 章 机械振动	113
1.4 本章自测题和问题选解	14	6.1 教学要求	113
1.5 本章习题解答	20	6.2 本章主要内容框图	114
1.6 教学参考资料	27	6.3 阅读指导	114
第 2 章 质点动力学的基本定律	31	6.4 本章自测题和问题选解	116
2.1 教学要求	31	6.5 本章习题解答	119
2.2 本章主要内容框图	31	6.6 教学参考资料	127
2.3 阅读指导	32	第 7 章 机械波	135
2.4 本章自测题和问题选解	36	7.1 教学要求	135
2.5 本章习题解答	40	7.2 本章主要内容框图	136
2.6 教学参考资料	51	7.3 阅读指导	136
第 3 章 力学中的守恒定律	53	7.4 本章自测题和问题选解	139
3.1 教学要求	53	7.5 本章习题解答	142
3.2 本章主要内容框图	54	7.6 教学参考资料	152
3.3 阅读指导	54	第 8 章 相对论简介	157
3.4 本章自测题和问题选解	58	8.1 教学要求	157
3.5 本章习题解答	63	8.2 本章主要内容框图	158
3.6 教学参考资料	74	8.3 阅读指导	158
第 4 章 刚体的定轴转动	79	8.4 本章问题选解	160
4.1 教学要求	79	8.5 本章习题解答	161
4.2 本章主要内容框图	79	8.6 教学参考资料	164
4.3 阅读指导	80	第 9 章 热力学基础	169
4.4 本章自测题和问题选解	82	9.1 教学要求	169
4.5 本章习题解答	86	9.2 本章主要内容框图	170

9.3 阅读指导	170	14.5 本章习题解答	279
9.4 本章自测题和问题选解	173	14.6 教学参考资料	297
9.5 本章习题解答	178	第 15 章 电磁感应 电磁场与	
9.6 教学参考资料	188	电磁波	299
第 10 章 气体动理论	191	15.1 教学要求	299
10.1 教学要求	191	15.2 本章主要内容框图	300
10.2 本章主要内容框图	192	15.3 阅读指导	301
10.3 阅读指导	192	15.4 本章自测题和问题选解	302
10.4 本章自测题和问题选解	194	15.5 本章习题解答	305
10.5 本章习题解答	196	15.6 教学参考资料	318
10.6 教学参考资料	203	第 16 章 几何光学	325
第 11 章 真空中的静电场	211	16.1 教学要求	325
11.1 教学要求	211	16.2 本章主要内容框图	325
11.2 本章主要内容框图	211	16.3 阅读指导	326
11.3 阅读指导	212	16.4 本章自测题和问题选解	327
11.4 本章自测题和问题选解	215	16.5 本章习题解答	328
11.5 本章习题解答	221	16.6 教学参考资料	333
11.6 教学参考资料	230	第 17 章 波动光学	337
第 12 章 静电场中的导体和电		17.1 教学要求	337
介质	233	17.2 本章主要内容框图	338
12.1 教学要求	233	17.3 阅读指导	339
12.2 本章主要内容框图	233	17.4 本章自测题和问题选解	342
12.3 阅读指导	234	17.5 本章习题解答	346
12.4 本章自测题和问题选解	236	17.6 教学参考资料	355
12.5 本章习题解答	239	第 18 章 早期量子论	361
12.6 教学参考资料	248	18.1 教学要求	361
第 13 章 恒定电流	253	18.2 本章主要内容框图	362
13.1 教学要求	253	18.3 阅读指导	363
13.2 本章主要内容框图	253	18.4 本章自测题和问题选解	365
13.3 阅读指导	254	18.5 本章习题解答	366
13.4 本章自测题和问题选解	257	18.6 教学参考资料	372
13.5 本章习题解答	259	第 19 章 量子力学基础	375
13.6 教学参考资料	266	19.1 教学要求	375
第 14 章 恒定磁场	269	19.2 本章主要内容框图	376
14.1 教学要求	269	19.3 阅读指导	376
14.2 本章主要内容框图	270	19.4 本章自测题和问题选解	378
14.3 阅读指导	270	19.5 本章习题解答	380
14.4 本章问题选解	275	19.6 教学参考资料	385

第 20 章 原子核和基本粒子简介	387	20.4 本章自测题和问题选解	392
20.1 教学要求	387	20.5 本章习题解答	392
20.2 本章主要内容框图	388	20.6 教学参考资料	395
20.3 阅读指导	388	常用物理常量表	397

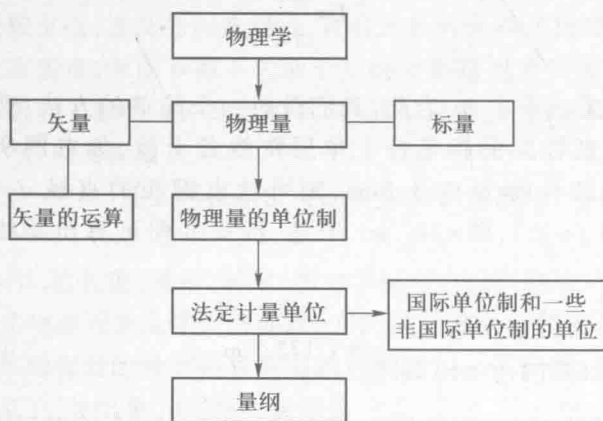
第 0 章

物理学 物理量及其计量单位

0.1 教学要求

1. 理解数和量的区别.
2. 掌握物理量(包括标量和矢量)的运算^①法则.
3. 了解量纲、数量级等的概念,并能对物理公式或计算结果从量纲判断其正、误.
4. 理解教材(上册)附录 B 的《矢量的运算》这节内容.

0.2 本章主要内容框图



^① 关于矢量的运算,请参考本书上册的附录 B.

0.3 本章自测题和问题选解

〔自测题〕 一捆粗细均匀的圆柱形铜线,用天平测得其质量为 $m = 11.22 \text{ kg}$,若不用米尺来量,试问能否设法给出此铜线的总长度? 已知铜的密度为 $\rho = 8.9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

解 我们知道,物质密度(亦称质量密度)的定义是质量与体积之比,若以 ρ 表示密度, m 表示质量, V 表示体积,则按密度的定义可表述成下列公式

$$\rho = \frac{m}{V}$$

按此定义式,可从题中给出的已知量: $\rho = 8.9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 和 $m = 11.22 \text{ kg}$, 求出这捆铜线的体积 V , 即

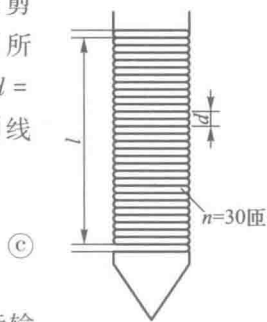
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{11.22 \text{ kg}}{8.9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} = 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{①}$$

设铜线总长度为 L , 铜线的直径为 d , 则由铜线的体积 $V = \left(\frac{\pi}{4} d^2\right) L$, 可得

$$L = \frac{4V}{\pi d^2} \quad \text{②}$$

但是 d 为未知值, 因而无法求出 L . 为此, 我们设想一个简单的方法: 剪下一段不长的铜线, 在圆柱形的铅笔杆上单层密绕若干匝, 如右图所示; 用尺量出 $n = 30$ 匝的长度为 $l = 3.5 \text{ cm}$, 则可给出铜线的直径 $d = l/n = 3.5 \text{ cm}/30 = 0.117 \text{ cm} = 1.17 \times 10^{-3} \text{ m}$. 于是, 按式②便可算出铜线的长度为

$$L = \frac{4 \times 1.26 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{3.14 \times (1.17 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 1172.5 \text{ m}$$



自测题图

问题 0-1 一辆载重为 10 t 的运货汽车, 其车厢容积为 13 m^3 . 今要运输钢材(其密度为 $\rho_s = 7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$)和木材(其密度为 $\rho_w = 0.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). 若装货时货车的车厢需占有 1 m^3 的空隙, 试问这两种货物应怎样搭配才能使货车的车厢得到充分利用?

解 设车厢中钢材和木材所占体积分别为 V_s 和 V_w , 已知钢和木的密度分别为 $\rho_s = 7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 和 $\rho_w = 0.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 则按题意, 可列出如下方程:

$$\begin{cases} (7.8 \times 10^3) V_s + (0.5 \times 10^3) V_w = 10 \times 10^3 \\ V_s + V_w = 13 - 1 \end{cases}$$

求解上述方程组,可得钢材和木材的体积分别为

$$V_s = 0.55 \text{ m}^3, \quad V_w = 11.45 \text{ m}^3$$

通常,在心目中,已确定采用 SI 时,所列式中就无须将每个物理量的单位写出。

0.4 教学参考资料

量纲分析及其应用

在工程和科技实践中,量纲分析是进行物理现象分析和实验研究的一种有效方法。当然,要正确运用这一方法,还必须根据已有的科技知识和理论基础,对物理现象具有一定的分析能力。

度量物理量的单位的类别叫做量纲。例如小时、分、秒是不同的时间测量单位,它们都属于同一时间种类,可以统一用 T 表示,则 T 就是上述时间单位的“量纲”。

量纲分析及其方法,在有关专业的今后工作中是很有用的。它不仅可以找出某些物理量与另外一些物理量之间的关系;用于物理量的单位换算;检验公式的正确与否;还可以借以探究某些物理规律,有助于建立起函数关系的基本形式。

由于物理现象一般较复杂,涉及的因素很多,有时无法列出描述物理现象的微分方程;或者求解这些方程在数学上有困难,因而不得不乞助于其他分析途径或实验手段来解决。量纲分析在科技实践中是进行分析和实验的一种有效的手段。通过量纲分析,一般说来,可以合理而有目的地简化实验,并有助于整理实验成果。

当然,要正确应用这一方法,还必须根据已有的科技知识和理论,对物理现象具有一定的分析能力。

在国际单位制(SI)中,取长度、质量、时间、热力学温度、电流、物质的量、发光强度这些物理量作为“基本量”,来表述物理现象及其运动规律。它们的量纲分别用 L、M、T、 Θ 、I、N、J 表示,叫做基本量纲。而其他一些物理量的量纲是根据有关的物理定义或定律,借上述这些基本量纲导出的,这些量纲就是相应于“导出量”的“导出量纲”。

基本量纲与其他基本量纲之间是相互独立的,即一个基本量纲不能从其他基本量纲导出。例如我们不能从 L、I 中得出 M,也不能从 T、M 中得出 L;但 L、M 和密度的量纲 $\dim \rho$ 三者则非相互独立的,因为 $\dim \rho = L^{-3}M$ 。

其次,基本量纲并没有规定必须取几个。例如在工程力学问题中,任一力学量的量纲一般取 L、T、M 为基本量纲;但也可以选用四个互不相关的基本量纲 L、T、M 及力的量纲 $\dim F$,即将 $\dim F$ 作为独立的基本量纲。这时需将牛顿定律写成 $F = kma$,而系数 k 的量纲则为 $\dim k = \dim F T^2 M^{-1} L^{-1}$ 。

一般来说,引入一个额外的物理系数,就可以增加一个相互独立的基本量纲.过去工程上常采用 $L, T, \dim F$ 作为基本量纲,而今在力学中,已统一用 L, T, M 作为基本量纲.

导出量的量纲或物理方程中有量纲的常量均可用基本量纲的指数乘积形式表示,例如,按 $\nu = 1 \text{ mol}$ 的理想气体物态方程 $pV = \nu RT$, 可得 R 的量纲为 $M^1 L^2 T^{-2} \Theta^{-1} N^{-1}$. 在力学中,任一物理量 X 的量纲均可用三个基本量纲 L, T, M 的指数乘积形式表示:

$$\dim X = L^\alpha T^\beta M^\gamma \quad (1)$$

上式就是力学中的量纲公式,量 X 的性质可由量纲指数 α, β, γ 来反映. 如 α, β, γ 中任一个不等于零,则说 X 是一个有量纲的量. 在力学中,有量纲的量大致可分为三类:

- (1) $\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$ 为一几何量;
- (2) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$ 为一运动学的量;
- (3) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ 为一动力学的量.

例如面积 A 的量纲为长度量纲的平方,即 $\dim A = L^2$, 或写成量纲公式 $\dim A = L^2 T^0 M^0$. 加速度的量纲公式为 $\dim a = L T^{-2} M^0$, 由于 $F = m a$, 可知力 F 的量纲公式为 $\dim F = M L T^{-2}$.

有的物理量,其量纲为 1. 例如式①中各指数 $\alpha = \beta = \gamma = 0$, 或

$$\dim X = L^0 T^0 M^0 = 1 \quad (2)$$

则 X 称为量纲一的量,即只表示某个数.

量纲一的量可以是两个相同量的比值(例如,体积 V 的相对压缩量 $-\frac{dV}{V}$, 即为一个数). 也可以由几个量纲通过乘、除而组成,而组合结果的各个基本量纲的指数为零,满足式②.

例如,流体力学中区别层流和湍流的一个判据,即雷诺数 (Reynolds number) $Re = \frac{vd}{\gamma}$, 其中流体速度 v 的量纲为 $L T^{-1}$, 管子直径 d 的量纲为 L , 流体的运动黏度 γ 的量纲为 $L^2 T^{-1}$, 则雷诺数的量纲为

$$\frac{L T^{-1} L}{L^2 T^{-1}} = L^0 T^0 M^0 = 1$$

即为量纲一的量.

量纲一的量有下述重要性质:

(1) 量纲一的量既无量纲又无单位,其数值大小与所选用的单位制无关,因而它可作为一个客观的判据值. 例如表征流体的某一流动状态的雷诺数为 $Re = 2000$, 则不论采用 SI 或英制单位,其值均保持不变. 所以,雷诺数可作为一个客观判据.

(2) 一切有量纲的物理量都将因选取不同单位制而有不同数值. 若用有量纲的物理量来表示一个物理规律的自变量,则此物理规律所表达的因变量也将随所选用的单位而有不同的值. 而单位是人为选用的,可是物理规律不应随主观意志而改变. 只有量纲一的量不随所选用的单位的不同而改变其值,所以要正确反映物理规律,最好将其物理量组合成用量纲一的量表示的形式. 或者说,一个完整、正确的物理方程应是用量纲一的量组成的方程. 由此可见量纲一的量的重要性. 量纲分析的目的之一就是要找出正确地组合量纲一的量的方法.

(3) 在对数、指数、三角函数等任何超越函数运算中,都必须是对量纲一的量来进行的.例如,理想气体等温压缩过程中的功为

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

体积的压缩比 V_1/V_2 即为量纲一的量,故可取对数;而对有量纲的某些物理量取对数是无意义的.又如平面简谐波的表达式为

$$Y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

相位 $\omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$ 的量纲为 $T^{-1}T = 1$,乃是量纲一的量,故可作余弦运算.

又如对物理现象中的自然衰减或增长过程,乃指过程中某一个量在确定的空间或时间间隔中的变化为其自身的一个恒定的分数,即可表示为微分形式

$$\frac{dN}{N} = \pm \alpha dx \text{ 或 } \frac{dN}{N} = \pm \alpha dt$$

其中, N 为变化着的量, α 是常量,正负号分别表示增长或衰减.因此,变化率 $\frac{dN}{dx}$ 或 $\frac{dN}{dt}$ 正比于测量这个变化率时 N 的值.积分上式得 $N = N_0 e^{\pm \alpha x}$ 或 $N = N_0 e^{\pm \alpha t}$,其中 N_0 是 N 在 $x=0$ 或 $t=0$ 时的值, e 是自然对数的底.这里不管对数的底 e 的指数是什么,它总是底数为 e 的自乘次数,所以这个指数函数 $e^{\pm \alpha x}$ 或 $e^{\pm \alpha t}$ 是量纲一的量,即 α 的量纲和 x^{-1} 或 t^{-1} 的量纲一样.

注意,如 $\int \frac{dp}{p} = \ln p + C$,其中 C 也是一个有量纲的量, $C = -\ln p_0$,即 $\int \frac{dp}{p} = \ln \frac{p}{p_0}$ 只能对量纲一的量取对数.

下面我们缕述量纲分析的基本原理——量纲和谐原理.

凡是正确反映客观规律的物理方程,其各项的量纲均须一致,这是量纲分析的一条基本原理,称为量纲和谐原理.因为只有量纲相同的物理量才能加、减;否则,把不同量纲的物理量相加、减,例如把力和电流相加显然毫无意义.所以,一个方程中各项的量纲必须相同和一致.但不同量纲的物理量可以相乘、除,可得出导出量的量纲表示的另一个物理量,如质量乘速度可得动量.

量纲和谐原理在科研中有广泛应用,例如:

(1) 一个物理方程在量纲上是和谐的,则方程的基本形式不因换用量度单位而改变.借量纲和谐原理,可用来检验所建立的方程或检验公式是否完整.例如三维的波动的方程为

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

式中 s 为位移, u 为波速.上式各量的量纲均为 T^{-1} ,因而此式的量纲是和谐的.不论用什么

单位制,该方程的形式均不变;如果用方程中任一项去除式中各项,则可得到无量纲组成的方程式。

如果一方程不论是代数方程或微分方程在量纲上不和谐,则就得检查一下方程是否完整,所用单位是否一致,在数学推导中是否有误。

正确的物理方程固然要求量纲和谐,但在工程技术中,例如研究江河中泥沙运动的规律时,也有一些方程的量纲是不和谐的。这一般是指单纯借实验观测资料所建立的经验公式,它们在实际应用上是有局限性的。不过,随着科学技术的不断发展,可以期待,它们终究要被符合量纲和谐原理且正确反映客观规律的公式所取代。

(2) 借量纲和谐原理建立物理方程,乃是量纲分析的方法之一,称为瑞利(Rayleigh)法则,它适用于较简单的问题。

例 1 在真空中质量分别为 m_1 、 m_2 的两个物体 A、B 间的万有引力为 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, G 为引力常量, r 为两个物体间的距离。设 $m_1 \gg m_2$, 则 m_2 在 m_1 的引力场作用下,将近似地以 m_1 为中心沿圆轨道运动。今用瑞利法则求物体 B 沿轨道运行的周期 τ 。

解 经分析,影响 B 运动速度的物理量可能有 m_1 、 m_2 、 r 和 G 。但 B 的影响可忽略,因为 m_2 增大一倍,引力也增大一倍,这使物体 B 的法向加速度(v^2/r)维持不变; G 虽为常量,但不能从影响因素中去掉。因为 m_1 和 r 中都不含时间的量纲,所以周期 τ 不可能只是 m_1 和 r 的函数。这表明,影响因素不一定是变量。于是有如下的函数关系:

$$\tau = f(m_1, r, G)$$

一般可将上述函数关系用指数的乘积形式来表示:

$$\tau = k m_1^\alpha r^\beta G^\gamma$$

式中 k 为某一个量纲为 1 的系数。从万有引力公式,得 $\dim G = M^{-1} L^3 T^{-2}$, 则上式的量纲关系式为 $T = M^\alpha L^\beta M^{-1} L^3 T^{-2\gamma}$, 按量纲和谐原理,得

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad \alpha - \gamma = 0 \\ L: \quad \beta + 3\gamma = 0 \\ T: \quad -2\gamma = 1 \end{array} \right\}$$

联解上列三式,得

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

最后结果为

$$\tau = k \sqrt{\frac{r^3}{G m_1}}$$

例 2 根据实验结果所得的数据分析,单摆的周期 T 可能与摆球的质量 m 、摆长 l 、摆角 θ 有关;并考虑到单摆处于恒定的重力场中,还与重力加速度 g 有关。于是,有如下的待定函数式

$$T = f(m, l, g, \theta) \quad (a)$$

根据量纲和谐原理,由于上述这些量的量纲不同,它们不能相加减。因而,一般可假定上述函数

关系具有这几个量的幂次的乘积形式,写作

$$T = m^\alpha l^\beta g^\gamma \theta^\delta \quad (b)$$

式中, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为待定指数. 把上式中的各量的量纲用力学中的基本量纲 L、M、T 表示, 并且 θ 是量纲为 1 的数, 则上式的量纲关系式为

$$\begin{aligned} T &= L^0 M^0 T^0 \alpha L^0 M^0 T^0 \beta L^0 M^0 T^{-2} \gamma L^0 M^0 T^0 \delta \\ &= M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} \end{aligned} \quad (c)$$

上式左边的周期 T , 其量纲是 T, 即 $\dim T = T$. 于是, 按量纲和谐原理, 为了使上式两边的量纲相同, 其中同一基本量纲的指数应相等, 从而有

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad \alpha = 0 \\ L: \quad \beta + \gamma = 0 \\ T: \quad -2\gamma = 1 \end{array} \right\} \quad (d)$$

联立求解, 得

$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

把它们代入式 (b), 可得单摆的周期为

$$T = \theta^\delta \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (e)$$

其中, 量纲为 1 的系数 θ^δ 是摆角 θ 的函数, 令 $\Phi(\theta) = \theta^\delta$, 而 $\Phi(\theta)$ 是无法用上述量纲分析方法给出的, 可借实验或其他途径确定.

值得指出, 在观察或分析一个物理现象时, 应尽可能地列举出与该现象有关的主要变量 [例如, 例 2 中的式 (a)]; 否则将直接影响分析结果的真实性. 这是首要的, 也是较困难的一步, 往往取决于人们的实验或理论水平, 以及对所研究现象的分析能力.

最后, 我们简介一下关于量纲分析法的普遍理论—— π 定理.

π 定理是量纲分析的主要内容. 这定理可叙述如下:

任何一个物理过程, 如果包含有 n 个物理量, 涉及 m 个在量纲上相互独立的基本量纲, 则这个物理过程可由 n 个物理量组成的 $(n-m)$ 个量纲一的量所表达的关系式来描绘. 因这些量纲一的量用 π 来表示, 故称此定理为 π 定理 (证明从略).

设影响物理过程的 n 个物理量为 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 则此物理过程可用一完整的函数关系式表述:

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3)$$

设这些物理量包含有 m 个在量纲上相互独立的基本量纲, 按 π 定理, 这个物理过程可以用 $(n-m)$ 个量纲一的组合量 π 表达的关系式来描述, 即

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (4)$$

应用 π 定理的步骤如下:

(1) 观察和分析所研究的物理现象, 确定影响这一现象的各个物理量, 即写成式 (3). 此处所说的有影响的物理量, 是指对所研究的现象起作用的所有各种独立因素. 例如, 研究声波的传播, 主要包括介质的物理性质、边界的几何特性、波动的运动特征等. 影响因素 (可为变量, 也可作为常量) 列举的是否全面和正确, 将直接影响分析的结果. 这是首要的, 也是较困难的一步, 只能

凭借人们对所研究现象的深刻认识和全面理解来确定.

(2) 从 n 个物理量中选取 m 个基本物理量, 作为 m 个基本量纲的代表. m 一般取 3. 因此要求这三个基本物理量两个是独立的, 即这三个物理量不能组合成一个量纲一的量. 设表示基本物理量 X_1, X_2, X_3 的量纲式为

$$X_1 = L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}$$

$$X_2 = L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}$$

$$X_3 = L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}$$

则 X_1, X_2, X_3 不能形成量纲一的量的条件为

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(3) 从三个基本物理量以外的物理量中, 每次轮取一个, 与这三个基本物理量相除 (也可相乘), 组合成一个量纲一的 π 项, 这样一共可写出 $n-m=n-3$ 个 π 项:

$$\pi_1 = \frac{X_4}{X_1^{a_1} X_2^{b_1} X_3^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{X_5}{X_1^{a_2} X_2^{b_2} X_3^{c_2}}$$

.....

$$\pi_{n-3} = \frac{X_n}{X_1^{a_{n-3}} X_2^{b_{n-3}} X_3^{c_{n-3}}}$$

式中 a_i, b_i, c_i 为各 π 项的特定指数.

(4) 每个 π 项即是量纲一的量, 即 $\dim \pi = L^0 T^0 M^0$. 因此, 可根据量纲和谐原理求出各 π 项的指数 a_i, b_i, c_i .

(5) 写出描述现象的关系式

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-3}) = 0 \quad (5)$$

这样, 就把一个具有 n 个物理量的关系式简化为 $(n-3)$ 个量纲一的量的表达式. 如前所述, 量纲一的量才具有描述自然规律的绝对意义. 所以式⑤才是反映客观规律的正确形式. 而且也是进一步分析研究的基础.

例 3 如图所示, 一直径为 d 、密度为 ρ 的圆球, 在充满密度 ρ_1 、黏度 μ_1 的无限介质中沉降. 影响其沉降速度 v 的因素有 d, ρ, ρ_1, μ_1 (其中, μ_1 的量纲为 $ML^{-1}T^{-1}$) 及重力加速度 g . 今用 π 定理确定沉降速度的关系式.

解 按题设的影响沉降速度 v 的因素, 列出 $n=6$ 个物理量的关系式为

$$f(v, d, \rho, \rho_1, \mu_1, g) = 0$$

在上述 6 个物理量中选取 3 个基本物理量: 圆球直径 d (代表现象的几何尺度); 沉降速度 v (代表现象中的运动学特征); 圆球密度 ρ (代表圆球物性). 这三者包括了 L, T, M 三个基本量纲, 有如下的量纲式:

$$\dim d = L^1 T^0 M^0$$

$$\dim v = L^1 T^{-1} M^0$$

$$\dim \rho = L^{-3} T^0 M^1$$

各指数项的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

即这三个基本物理量的量纲是独立的。

于是,可写出 $n-3=6-3=3$ 个无量纲 π 数:

$$\pi_1 = \frac{g}{d^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1}} \quad (a)$$

$$\pi_2 = \frac{\rho_1}{d^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2}} \quad (b)$$

$$\pi_3 = \frac{\mu_1}{d^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3}} \quad (c)$$

按量纲和谐原理,各 π 数的指数可确定如下:以式(a)的量纲式为例,有

$$L T^{-2} = L^{a_1} L T^{-1} b_1 M L^{-3} c_1$$

得

$$\left. \begin{array}{l} L: \quad 1 = a_1 + b_1 - 3c_1 \\ T: \quad -2 = -b_1 \\ M: \quad 0 = c_1 \end{array} \right\}$$

对上述三式联解,求得, $a_1 = -1$ 、 $b_1 = 2$ 、 $c_1 = 0$,于是,有

$$\pi_1 = \frac{g}{d^{-1} v^2 \rho^0} = \frac{gd}{v^2}$$

同理可求得

$$\pi_2 = \frac{\rho_1}{\rho}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu_1}{v d \rho}$$

将各 π 项代入公式⑤,得方程为

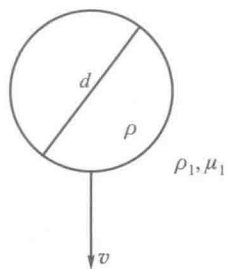
$$F\left(\frac{gd}{v^2}, \frac{\rho_1}{\rho}, \frac{\mu_1}{v d \rho}\right) = 0$$

或将上式的隐函数式改写成下列的显函数式

$$\frac{v^2}{gd} = f_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{v d \rho}{\mu_1}\right)$$

最后得沉降速度 v 的关系式为

$$v = \sqrt{gd} f_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{v d \rho}{\mu_1}\right)$$



例 3 图

其中函数 $f_1\left(\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{vd\rho}{\mu_1}\right)$ 可由实验或分析进一步求得.

通过量纲分析的 π 定理, 得出圆球沉速公式的基本形式, 即断定了 v 与 $\sqrt{gd}$ 成正比, 并从函数 f_1 知道了影响沉速的两方面因素 $\frac{\rho}{\rho_1}$ (反映介质对圆球的浮力) 和 $\frac{vd\rho}{\mu_1}$ (反映介质因其黏性引起的阻力), 从而找到了进一步研究问题的途径.

综上所述, 借量纲分析方法, 不仅可以在已知物理过程有关的物理量情况下, 借量纲和谐原理或 π 定理获得各物理量之间的基本关系式, 并找出深入研究该问题的途径, 而且可以使一些经验公式具有理论上(量纲和谐性)正确的形式. 因此, 量纲分析法在科技领域(物理学、流体力学和工程学科等)内常常作为一个有效的研究手段, 而被广泛地应用着.