

JIYU XISHU BIAOSHI DE
TUXIANG YASUO HE QUZAO
LILUN YU YINGYONG

基于稀疏表示的 图像压缩和去噪 理论与应用

何艳敏 甘 涛 彭真明 / 著



电子科技大学出版社

基于稀疏表示的 图像压缩和去噪

理论与应用

JIYU XISHU BIAOSHI DE
TUXIANG YASUO HE QUZAO
LILUN YU YINGYONG

何艳敏 甘 涛 彭真明 / 著



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

基于稀疏表示的图像压缩和去噪理论与应用 / 何艳敏, 甘涛, 彭真明著. -- 成都: 电子科技大学出版社, 2016.11

ISBN 978-7-5647-3830-3

I. ①基… II. ①何…②甘…③彭… III. ① 图像处理—数据压缩
IV. ① TN919.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 200246 号

基于稀疏表示的图像压缩和去噪理论与应用

何艳敏 甘 涛 彭真明 著

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 汤云辉

责任编辑: 汤云辉

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 成都蜀通印务有限责任公司

成品尺寸: 185mm×260mm 印张 10.5 字数 256 千

版 次: 2016 年 11 月第一版

印 次: 2016 年 11 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-3830-3

定 价: 39.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83201495。
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

前言

在信号分析中,人们总希望能将信号简洁地表示出来,以便揭示其最本质的特征。稀疏表示提供了这样一种途径,它力求用尽量少的元素来表示信号。作为一种新兴的表示方法,稀疏表示引起了国内外广大学者的普遍关注,并对信号处理和分析产生了极为重要的影响。目前稀疏表示已被广泛地应用到图像处理、模式识别、自动测控等多个领域。

目前人们对稀疏表示的研究主要集中在原子库构建和稀疏分解两个关键问题上。本书就围绕着这两个问题展开工作,重点研究了稀疏表示在图像压缩和图像去噪两个方面的应用,主要内容包括以下三个部分,共八章。第一部分(第1~2章)讨论信号稀疏表示及其基本方法;第二部分(第3~5章)研究基于稀疏表示的图像压缩方法;第三部分(第6~8章)研究基于稀疏表示的图像去噪方法。

在第一部分,第2章介绍信号稀疏表示的基本原理和方法。首先从信号的表示开始,介绍稀疏的度量和冗余稀疏表示问题,接着对稀疏表示中的原子库构建和稀疏分解两个关键问题进行分类讨论。

在第二部分,第3章概述图像编码技术的发展,介绍传统和新型的图像编码方法以及适应媒体应用新环境的可伸缩编码技术,重点讨论基于冗余稀疏表示的图像编码方法,并给出其基本框架。第4章首先介绍分形图像压缩的数学基础,接着在基于冗余表示的编码框架下详细讨论分形编码的主要环节;之后,对分形解码的质量渐进和分辨率无关特性进行重点讨论,提出一种可控质量渐进的解码方案,并通过实验加以验证。第5章讨论基于匹配追踪的图像稀疏分解及其在图像编码中的应用两方面的内容。

在第三部分,第6章介绍图像噪声及其度量,概述传统和现代图像去噪技术,重点介绍了当前处于领先地位的非局部去噪和新兴的冗余稀疏去噪方法。第7章提出一种新的基于全局原子库的冗余稀疏去噪方法,从原子库学习和多级稀疏去噪两个方面对其进行详细阐述。通过一系列仿真实验对提出的方法进行全面的评估,并将其结果与其他先进方法进行比较。第8章提出一种新的基于自适应原子库的冗余稀疏去噪方法,详细阐述了方法中的全局空间分析、原子库训练和基原子选择三个主要步骤,并通过仿真实验验证了该方法的有效性。

本书可作为相关的科研部门、院所和高校专家学者的图像处理教学科研参考书，也可作为“985”和“211”学校高年级本科生和研究生的图像处理教材。

在编著本书的过程中，虽然我们做出了不懈努力，但由于水平和经验的限制，书中缺点和不足之处在所难免，欢迎专家和读者批评指正。

本书受中央高校基本科研业务费（ZYGX2013J062）和国家自然科学基金（41301460）资助。

何艳敏

2015年10月26日

目 录

第1章 绪 论	1
1.1 人眼视觉特性	1
1.1.1 视觉系统	1
1.1.2 视觉信息处理机制和感知模型	2
1.1.3 视觉特性与启示	3
1.2 图像模型与表示	5
1.2.1 图像模型	5
1.2.2 图像表示方法	5
1.3 图像稀疏表示与处理	13
1.3.1 信号的稀疏表示	13
1.3.2 图像稀疏表示模型	14
1.3.3 基于稀疏表示的图像处理	15
1.4 图像质量的评价	17
1.4.1 主观评价	17
1.4.2 客观评价	18
1.5 本章小结	19
第2章 稀疏表示的原理及方法	20
2.1 信号的稀疏表示	20
2.1.1 信号的表示	20
2.1.2 稀疏的度量	21
2.1.3 冗余稀疏表示	21
2.2 原子库构建	22
2.2.1 原子库的发展与分类	22
2.2.2 基于解析的原子库	22
2.2.3 原子库学习方法	25
2.3 稀疏分解	27
2.4 本章小结	31

第3章 图像压缩编码概述	32
3.1 压缩编码流程	32
3.2 经典编码技术	33
3.3 第二代图像编码	34
3.4 小波图像编码	35
3.5 可伸缩编码技术	37
3.6 基于冗余表示的图像编码	38
3.6.1 冗余表示编码框架	38
3.6.2 矢量量化	40
3.6.3 分形编码	41
3.6.4 匹配追踪编码	42
3.6.5 讨论	43
3.7 本章小结	43
第4章 分形图像压缩编码	44
4.1 分形编码数学基础	44
4.1.1 迭代函数系统理论	44
4.1.2 不动点定理	46
4.1.3 拼贴定理	47
4.2 分形图像编码原理与实现	48
4.2.1 编码原理	48
4.2.2 编码方法	49
4.2.3 实验结果	51
4.3 分形图像解码的灵活性	54
4.3.1 可控质量渐进解码	54
4.3.2 分辨率无关解码	60
4.4 本章小结	60
第5章 匹配追踪图像压缩编码	62
5.1 原子库的构建	62
5.2 MP 图像分解	65
5.2.1 FSMP 算法	65
5.2.2 MP 原子特性	66

5.3 多尺度 MP 分解	70
5.3.1 图像多尺度表示	70
5.3.2 多尺度追踪	71
5.3.3 实验结果	75
5.4 MP 图像编码	78
5.4.1 MP 编码研究现状	79
5.4.2 基于块划分的 MP 编码	81
5.4.3 码流的可伸缩性	85
5.4.4 实验结果	87
5.5 本章小结	97
第 6 章 图像去噪概述	98
6.1 噪声及其度量	98
6.1.1 图像噪声	98
6.1.2 噪声的度量	99
6.2 空域去噪技术	100
6.3 变换域去噪技术	101
6.4 非局部去噪技术	103
6.5 冗余稀疏去噪技术	106
6.6 讨 论	109
6.7 本章小结	110
第 7 章 基于全局原子库的冗余稀疏去噪	111
7.1 概 述	111
7.2 原子库学习	112
7.2.1 基于相关系数准则的稀疏编码	112
7.2.2 基于噪声检测的原子库裁剪	114
7.2.3 原子库学习算法	115
7.3 稀疏分解去噪	117
7.3.1 多级分解去噪	117
7.3.2 稀疏编码策略	119
7.3.3 人为噪声抑制	119
7.4 实验结果	120

7.4.1 参数设置	120
7.4.2 原子库学习的评估	121
7.4.3 多级去噪性能评估	125
7.4.4 客观性能比较	126
7.4.5 主观性能比较	126
7.5 本章小结	133
第8章 基于空间自适应原子库的冗余稀疏去噪	134
8.1 概述	134
8.2 算法思路	135
8.3 全局空间分析	136
8.4 原子库训练	137
8.5 基原子选择	140
8.6 算法描述	142
8.7 讨论	143
8.8 实验结果	143
8.8.1 主特点评估	143
8.8.2 客观性能比较	145
8.8.3 主观性能比较	145
8.9 本章小结	149
参 考 文 献	150

第1章 绪论

1.1 人眼视觉特性

在大多数场合,最终的图像数据是由人眼来观察的,了解人眼的视觉特性和视觉信息的处理机制,能对图像编码方法的研究提供很好的指导作用。近几年来色度学和视觉生理、心理学方面的研究成果表明,人的视觉系统远不是人们所想象的那样完美,图像信源给出的所有信息并非都能为人的视觉系统所正确接收,而且不同的图像信息对视觉系统的作用也是不一样的。如果在图像编码中考虑了这些特点,将会大大提高编码效率,改善图像的主观质量。将视觉特性引入到图像编码中是第二代图像编码方法的核心思想,也是现代图像编码研究中首先需要考虑的问题之一。

1.1.1 视觉系统

人类视觉系统(Human visual system, HVS)是神经系统的一部分,是由大脑视皮层管理,通过视神经细胞进行通信的一个完整信息处理系统,是人类最重要的感觉通路。HVS包括眼睛、外侧膝状体(Lateral geniculate nucleus, LGN)和视皮层等几个主要部分。

1. 眼睛

眼睛是视觉信号的传感器,它将接收到的光信号聚集在视网膜上,形成图像。人眼的结构与照相机相似,其中与视觉关系最密切的是视网膜。视网膜主要由五类细胞组成,即视细胞、水平细胞、双极细胞、无足细胞和神经节细胞,它们在视网膜中是分层排列的。其中视细胞是人眼的感光细胞,包括视杆细胞和视锥细胞,前者是人眼的暗视觉细胞,在环境亮度极低时起作用,无色觉;后者在环境亮度较高时起作用,有色觉,称为明视觉细胞。因此,在对一般图像的感知过程中,视锥细胞起主要作用。研究表明,在视网膜上有三种视锥细胞,分别对红、绿、蓝三种光感觉最灵敏。三种视锥细胞的存在,为彩色视觉的三基色理论提供了生理学的基础。通过研究视锥细胞的亮度、色度感知特性,就可基本了解人眼对不同图像在感知上的差别和特性。

实验发现，视细胞将入射光转变成电信号，并对其动态范围进行压缩，这种变换是非线性的（近似对数的），服从 Weber-Fechner 定律，用公式表示为：

$$E = \alpha \log L + \beta \tag{1-1}$$

式中， L 和 E 分别表示入射的光强度和视神经细胞转换成的电信号强度， α 和 β 为常数。

视网膜上的其他四类细胞则负责将视细胞得到的神经刺激经神经纤维传送到外侧膝状体，进而到大脑视皮层。

2. 外侧膝状体

由视网膜处理的信息在视交叉分裂后到达外侧膝状体。对外侧膝状体细胞的分析表明，它也是一种多层细胞组织，每一层细胞仅仅接收来自某一只眼的信息。外侧膝状体细胞的功能与神经节细胞类似，这两种细胞都不表现出明显的方向性。

3. 视皮层

视皮层处于脑后部。由外侧膝状体传来的信息在视皮层的 17 区被接收。视皮层的神经元可分为简单细胞、复合细胞和超复合细胞。

简单细胞的感受域是椭圆形的，中心呈条状，被两个相反的区域（ON 和 OFF）所围绕。有效刺激不是圆斑，而是一个取向与感受域的条状中心方向相同的缝。如果缝旋转，则原被刺激的细胞输出的脉冲串逐渐消失，而取向与缝的方向接近的其他简单细胞开始有响应。视觉系统的方向性处理就是在这一级引入的。

复合细胞同样对刺激的方向性敏感，但与简单细胞相比，复合细胞对感受域中刺激所在的位置不敏感。

超复合细胞的有效刺激除要求有特定的方向外，还要求在空间上有不连续性，例如，它是一个角度或是线段的端点。

1.1.2 视觉信息处理机制和感知模型

视觉信息的处理可大致分为两个过程，如图 1-1 所示。第一个过程为低级的光信号接收与转换以及基本的信息处理如信息筛选。在这个过程中，人眼晶状体和视网膜将外界信息产生的神经刺激经外侧膝状体传送到人脑视觉中枢。第二个过程为人脑对视神经信息的高级处理，实现对图像的理解，形成最终的视觉。第一过程可以理解为人眼对图像信息的分解、特征提取及表示过程，第二过程可认为是一个信息合成，相当于图像的解码过程。



图 1-1 视觉信息的处理过程

根据上述分析,从整个神经信号的通路来看,各种视网膜神经细胞、外侧膝状体和部分视皮层神经细胞组成了一个低通和多个不同带宽的带通滤波器组,将输入信号分解成一个低频成分和不同频带的高频成分单独处理。这样,人类视觉系统的初级信息处理过程可以模型化为一个根据景物方向特征(主要为边缘和纹理)进行信息分解的多通道系统,我们称为人眼对信息的感知模型,如图 1-2 所示。

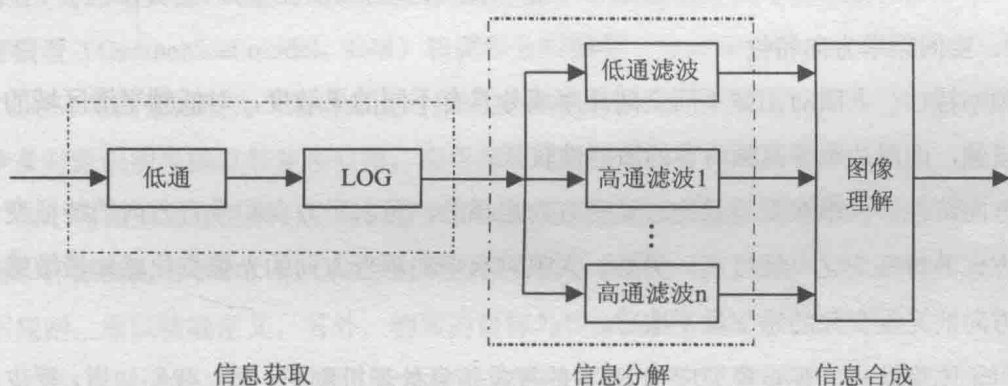


图 1-2 人眼的信息感知模型

在信息获取阶段,第一个方框是各向同性低通滤波器,它表示晶状体的球面像差、瞳孔的作用,及由于视细胞数目有限而造成的频率限制。第二个方框代表视细胞的非线性特性,它可以用式(1-1)表示的对数响应近似。在信息的分解阶段,有一个方向滤波器组,它表示由视皮层细胞进行的处理。

以上通过对人类视觉系统的生理机制的分析,建立了一个信息感知模型。这一模型已在图像科学的很多领域得到应用。

1.1.3 视觉特性与启示

研究发现,人类视觉系统有很多特点。利用这些特点,可以有效地减少主观失真,提高压缩编码的效率。下面介绍一些主要的视觉特性及其对图像编码的启示。

1. 视觉掩蔽效应

亮度掩蔽特性:人眼对于高亮度区域所附加的噪声的敏感性较小。这表明图像背景亮度越高,HVS的对比度门限(Contrast sensitivity threshold, CST)就越大。

纹理掩蔽特性：若将图像分为平滑区和纹理密集区，那么人眼对于平滑区的敏感性远高于纹理密集区。也就是说，图像背景纹理越复杂，HVS 可见度阈值越高，越感觉不到噪声信号的存在。

人眼的各种视觉效应可用于掩盖图像压缩带来的失真，以达到图像的主观感觉无失真；或者在主观失真相同的条件下允许更大的实际失真，从而根据香农率失真理论，在保持图像主观质量的情况下，可以采用更低的编码比特率。视觉掩蔽效应已成功地应用到图像视频编码中。常用的方法是将相应视觉模型应用到量化或比特分配方案中，以获得更高的编码效率。

2. 空间频率方向特性

频率特性：人眼对图像不同空间频率成分具有不同的灵敏度，对低频平滑区域的分辨能力较强，而对边缘等高频内容的敏感性较低。

方向特性：人眼在观察景物时是有方向选择的，对水平方向和垂直方向的特征变化比对斜方向的特征变化灵敏度高。另外，人眼对水平和垂直方向的光强变化感知最敏感，而对斜方向的光强变化的感知最不敏感。

用于图像处理的视觉模型应与 HVS 的视觉信息处理机制相一致。我们知道，视皮层简单细胞对图像进行了不同空间频率和方向的多通道分解，子带编码正是利用该特点，将有限的码率在各个子带之间合理分配，使编码噪声的频谱符合人眼对不同频带噪声的敏感程度，以提高图像的主观质量。而著名的小波变换以其多分辨率分解，时频局域化的特点更好地与 HVS 特性相匹配，这是小波变换在图像处理，特别是图像编码中取得成功的一个重要原因。另外，人眼对图像边缘、轮廓的敏感性也激发我们去寻找更适应图像几何特征的特征方法，从而克服传统的 DCT、小波变换的不足。

3. 信号精简表示特性

在视觉信息的获取和传输过程中，HVS 需要采用精简有效的信息表示形式。如果表达和传输的内容太多，人脑将不能对主要刺激做出快速的反应。Olshausen 和 Field 的研究表明^[47]，视皮层的接收场特性使得人类的视觉系统用最少的视觉神经元就能“捕获”自然场景中的关键信息，这相当于对自然场景进行了最稀疏的表示或最稀疏的编码。HVS 的精简表示特性为图像稀疏表征和编码提供了生理学的基础。

1.2 图像模型与表示

1.2.1 图像模型

图像建模是图像表征的非常重要的部分。模型与实际信号越接近,描述就越准确。图像可描述为随光强变化的纹理背景和其上交叠的物体组成的复合体。每一个物体有轮廓、边缘、纹理和平滑区等要素组成。要对众多图像特征建立全面而准确的模型是非常困难的。在现实处理中,针对具体应用,我们通常采用特定的简化模型。这些模型考虑到相关的主要特征,而忽略其他。典型的图像模型有三类:基于对象的模型(Object based model, OBM)、几何模型(Geometrical model, GM)和调和分析模型(Harmonic analysis model, HAM)。

OBM 将图像描述为一组对象及对象间的相互作用,有利于直观方便地描述场景,但由于涉及对象识别与提取等复杂问题,应用起来比较困难。

GM 将图像描述为具有空间位置和方向的几何形状的叠加,非常有利于图像的合成,常用于计算机图形学中。但 GM 在处理自然图像上表现不足,因为自然物体的几何特征常常不规则,难以精确定义。另外,物体的目标与轮廓等的位置信息也不易获得。

HAM 是一种最常用的模型,它将信号或图像表示为有限(或无限)的基函数的线性组合。基函数可为正交基,如 DCT 或小波基,也可为多个基的联合。

除上述模型之外,在图像处理中还存在其他模型,如统计模型、分形模型等。事实上,各种模型并非相互排斥的,多个模型可以根据需要来组合。例如,我们可以用几何模型或调和分析模型来表示目标对象,而用多个对象来描述一个场景,MPEG-4 采用的图像描述方法就属于此类。

1.2.2 图像表示方法

根据生理学家对人类视觉系统的研究结果和自然图像统计模型,研究者们提出“最优”的图像表示法应该具有如下的特征^[31, 48]。

- (1) 多分辨率:能够对图像从粗分辨率到细分辨率进行连续逼近。
- (2) 局部性:在空域和频域,这种表示方法的“基”应该是局部的。
- (3) 临界采样:对于某些应用,如图像压缩,这种表示能形成基或具有很小冗余的框架(Frame)。

(4) 方向性: 这种表示方法的“基”应该具有方向性, 不仅仅局限于水平、垂直和对角 3 个方向。

(5) 各向异性: 为了能捕获图像中的光滑轮廓, 这种表示方法应包含一系列具有不同长宽比的非方形的基本单元。

二维可分离小波变换满足了前三个条件, 而对于后两个条件则需要构建新的表示方法。本节我们介绍传统和现代的图像表示方法。可以看到, 图像表示方法正是朝着满足上述条件的方向而不断发展。

1.2.2.1 经典方法

经典的变换方法把图像表示为可分离的正交基 (如傅立叶、DCT、小波基) 的展开形式。

设 $B = \{g_m\}_{(m \in N)}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交基, 则 $\forall f \in H$ 可分解为:

$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, g_m \rangle g_m \quad (1-2)$$

定义部分和

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m \quad (1-3)$$

为 f 的非线性逼近, 其中 I_M 为对应于具有最大系数幅值 $|\langle f, g_m \rangle|$ 的 M 个向量的集合。

从而非线性逼近误差为:

$$\varepsilon_n[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2 \quad (1-4)$$

逼近误差体现了用基 B 表示函数 f 时的“稀疏程度”, 或者分解系数的能量集中程度。为此, 我们的目标是选择合适的基 B , 使 $\varepsilon_n[M]$ 随 M 的增加迅速衰减至零, 这可表示为存在小的常数 C 和大的指数 β , 使得

$$\varepsilon_n[M] \leq CM^{-\beta} \quad (1-5)$$

定义全变差范数为:

$$\|f\|_v = \int_0^1 |f'(t)| dt \quad (1-6)$$

如果函数 f 的全变差范数有界, 我们称 f 是有界变差的, 记为: $f \in BV[0,1]$ 。大多数一维信号, 如连续可导的光滑信号和具有有限不连续点的不连续信号, 都属于有界变差函数范畴。

(1) 傅立叶变换

在经典的信号分析中, 傅立叶分析占据了举足轻重的地位。傅立叶分析揭示了时域与频域之间内在的联系, 反映了信号在“整个”时间范围内的“全部”频谱成分, 是研究周期现象不可缺少的工具。

傅立叶基 $\{e^{i2\pi mt}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2[0,1]$ 的一组标准正交基, $\forall f \in L^2[0,1]$ 可分解为傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), e^{i\pi mu} \rangle e^{i\pi mt} \quad (1-7)$$

若函数 f 是有界变差的, 傅立叶基对函数 f 的非线性逼近误差为

$$\varepsilon_n^F[M] = o[M^{-1}] \quad (1-8)$$

即 $\varepsilon_n^F[M]$ 有 M^{-1} 级的衰减速度。

傅立叶变换虽然有很强的频域局域化能力, 但并不具有时间局域化能力, 不能有效地提取具有时频局部化特性的信号特征。而这一点, 对于很多信号处理工作而言, 特别是对于涉及非平稳信号处理的任务而言, 是至关重要的。

(2) 小波变换

小波分析理论和方法是从傅立叶分析演变而来的。它克服了傅立叶分析的不足, 具有时频局部化和多分辨率特性。小波变换以其优良的数学特性得到了广泛的关注和研究。

小波基函数是由某基本小波或小波母函数经过平移和拉伸而形成的。小波函数集 $\{\psi_{j,m}(t) : (j,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的基, 其中

$$\psi_{j,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-2^j m}{2^j}\right) \quad (1-9)$$

小波函数 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\phi(t)$ 共同构成了多分辨率基 B , 表示为

$$B = \{b_m\} = \{(\phi_{j,k}(x)),_{k \in \mathbb{Z}} \cup (\psi_{j,k}(x)),_{j \leq J, k \in \mathbb{Z}}\} \quad (1-10)$$

对有限区域, $[\{\phi_{j,n}\},_{0 \leq n \leq 2^j}, \{\psi_{j,n}\},_{-\infty < j \leq J, 0 \leq n < 2^j}]$ 定义了 $L^2[0,1]$ 的基。设小波函数 $\psi(t)$ 属于 C^q 且具有 q 阶消失矩, 函数 f 在 $[0,1]$ 上具有有限个不连续点, 且在這些不连续点之间是一致 Lipschitz $\alpha (\alpha < q)$ 的, 则小波变换的非线性逼近误差为^[22]:

$$\varepsilon_n^W[M] = o(M^{-2\alpha}) \tag{1-11}$$

此时函数 f 的傅立叶非线性逼近误差 $\varepsilon_n^F[M]$ 只有 M^{-1} 的衰减级。 f 在不连续点之间的正则性越高, 小波非线性逼近相对于傅立叶非线性逼近的改进就越大。

小波分析已经广泛应用于许多科学领域。原则上讲, 传统使用傅立叶分析的地方, 都可以用小波分析取代。小波分析优于傅立叶分析的地方是它在时间域和频率域同时具有良好的局部化性质。由于对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长, 从而可以聚焦到对象的任意细节。无疑, 小波分析比傅立叶分析能更“稀疏”地表示一维分段光滑 (piecewise smooth) 或者有界变差函数, 这是小波分析取得巨大成功的一个关键原因。

近年来, 基于小波变换的图像压缩技术发展迅速, JPEG 2000 国际标准的推出是其一个重要的成功标志。我们将在后续章节对基于小波变换的图像编码作详细的讨论。

遗憾的是, 虽然小波分析在处理一维信号时表现出良好的性能, 然而这种优越性并不能简单推广到二维或更高维。在图像处理应用中, 自然图像的边缘轮廓等几何结构, 是视觉信息的关键特征。而这些结构并不是一维分段光滑线段的简单堆积, 自然物体光滑边界使得不连续的点 (边缘) 通常位于光滑曲线 (轮廓) 上, 而并不仅仅是点奇异。由于传统的二维小波变换是对一维基的可分离式扩展, 表现出各向同性的特点, 因而无法捕获轮廓上的光滑性^[31], 不能达到理想的稀疏表征。

图 1-3 表示了用二维可分离小波来逼近图像中奇异曲线的过程。由一维小波张成的二维小波基具有正方形的支撑区间, 不同的分辨率下, 其支撑区间为不同尺寸大小的正方形。二维小波逼近奇异曲线过程, 最终表现为用“点”来逼近“线”的过程。在尺度 j , 小波支撑区间的边长近似为 2^{-j} , 幅值超过 2^{-j} 的小波系数的个数至少为 $o(2^j)$ 阶^[22]。当尺度变细时, 非零小波系数的数目以指数形式增长, 出现大量不可忽略的系数。可见由于小波基在水平与垂直方向是等量精细的, 它无法利用轮廓几何特性, 造成在不连续点存在大量的小波系数, 且数目随尺度的变小迅速增加, 最终表现为不能“稀疏”表示原函数。

可分离的小波基由一维小波函数 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\phi(t)$ 构造而成, 生成的小波基