可靠性统计分析

周源泉 李宝盛 张正平 丁为航 岳文龙 ◎ 著

科学出版社

可靠性统计分析

周源泉　李宝盛　张正平　丁为航　岳文龙　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书用经典方法、贝叶斯方法、信赖方法，深入地研究，完整地解决双参数指数分布、左截尾双参数指数分布、正态(对数正态)分布、韦布尔分布、位置尺度族分布、对数位置尺度族分布及幂律可靠性增长模型的置信估计问题。本书所研究的问题基本都是当今国内外尚未解决的理论和技术难题，本书汇集作者近十五年来的最新研究成果。这些研究成果对准确把握和提高产品可靠性具有重要作用，并且具有广泛的工程应用价值。

本书适用于深入学习、研究可靠性工程和理论统计分析的大学本科生、研究生以及科研单位技术人员和管理人员。

图书在版编目(CIP)数据

可靠性统计分析/周源泉等著. —北京:科学出版社,2017.6
ISBN 978-7-03-053030-1

Ⅰ.①可… Ⅱ.①周… Ⅲ.①可靠性-统计分析 Ⅳ.①C813

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 117723 号

责任编辑:刘宝莉 孙伯元 / 责任校对:郭瑞芝
责任印制:张 倩 / 封面设计:熙 望

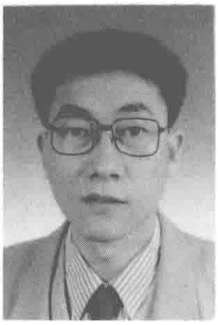
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2017 年 6 月第一次印刷 印张:12 3/4
字数:255 000

定价: 95.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

作 者 简 介

周源泉，男，生于1937年12月，江苏宜兴人。北京强度环境研究所研究员，多所大学的客座教授。1960年毕业于北京大学地球物理系。主要研究方向为可靠性理论与工程、数理统计理论与应用。完成了百余项工程与研究项目，为国家节省了亿元以上经费，多次获中国航天工业总公司与国防科工委科技进步成果奖，获2000年国家质量管理突出贡献奖。发表学术论文220余篇，著有专著：《可靠性评定》（科学出版社）、《可靠性增长》（科学出版社）、《质量可靠性增长与评定方法》（北京航空航天大学出版社）、《可靠性基础入门》（中国统计出版社）。



李宝盛，男，生于1962年5月，陕西宝鸡人。北京航天动力研究所研究员。1983年毕业于中山大学数学专业，获理学学士学位；1988年毕业于西安交通大学概率论与数理统计专业，获理学硕士学位；2000年毕业于西北工业大学航空宇航推进理论与工程专业，获工学博士学位。主要研究方向为可靠性理论与工程、概率统计、液体火箭发动机系统。发表学术论文40余篇，完成可靠性理论与工程研究课题多项，编制可靠性分析计算软件系统多项，编写GJB、QJA标准多项，出版专著两部。

张正平，男，生于1968年4月，江苏高邮人。研究员、北京强度环境研究所所长，国防“973”首席科学家，总装可靠性专家组专家，中华人民共和国国家国防科技工业局环境试验与观测专家组专家，海军战术导弹武器系统可靠性专家组副组长，中国航天科技集团可靠性专家组专家。1992年毕业于北京工业大学固体力学专业，获硕士学位；2009年毕业于哈尔滨工业大学固体力学专业，获同等学力工学博士学位。主要研究方向为可靠性试验与评估。主持科研项目多项，获得国家国防科技进步奖三等奖两项、航天部三等奖一项。发表论文20余篇，出版专著两部。

丁为航，男，生于1973年12月，山东巨野人。1996年毕业于北方工业大学工学部计算机及应用专业，获学士学位；2015年毕业于首都经贸大学工商管理专业，获硕士学位。就职于北京日立北工大信息系统有限公司。主要研究方向为计算机科学与应用。发表学术论文数篇，完成信息系统软、硬件的开发与安装工作多项，编制可靠性评定、可靠性增长及统计预测软件系统多项。

岳文龙，男，生于1977年10月，内蒙古包头人。高级工程师。1999年毕业于北京航空航天大学火箭发动机专业，获学士学位；2008年毕业于国防科技大学航空宇航科学与技术专业，获硕士学位。主要研究方向为液体火箭发动机系统设计、可靠性工程、项目管理。主持科研项目和课题多项。

序

可靠性工程是一门多学科交叉又相互渗透的新型边缘学科，正在方兴未艾地发展。可靠性数学和故障物理等构成了可靠性工程的基础。可靠性工程已从研究产品结构设计、质量控制、试验设计、数据统计、预计与评价等，成功应用到了航空航天、电子、机械、网络、电力、铁路、核工业、工程建筑等许多领域，并产生了显著的社会和经济效益。

可靠性统计分析作为可靠性工程的重要组成部分，研究产品的可靠性结构、概率模型及试验等信息，利用统计方法和手段，评价和估计产品的结构、性能、寿命等可靠性指标，为可靠性工程实践创造了显著的价值。

《可靠性统计分析》这本书，深入研究了可靠性统计分析的许多重要问题，丰富了可靠性工程的理论研究。其中包括双参数指数分布、左截尾双参数指数分布、正态(对数正态)分布、韦布尔分布、位置尺度族分布、对数位置尺度族分布及幂律可靠性增长模型等等的可靠性统计分析问题，书中的理论方法独特，统计分析结果精确。许多研究内容是当今国内外尚未解决的理论和技术难题。该书汇集了作者们近十五年来的最新研究成果，对准确把握和提高产品可靠性具有重要的理论和现实指导意义。相信此书的出版，会对我国军、民用产品的可靠性发展，起到有力的推动作用。

中国工程院院士

2013 年 4 月 17 日

前　言

1997 年，拙著《质量可靠性增长与评定方法》出版，经陈希孺院士推荐，被评为国防科技工业优秀图书。但陈先生对该书并不太满意，认为它有向工程师妥协的倾向，他希望我们撰写既有助于提高工程师数理统计水平，又有新内容可供应用的书籍。鉴于此，我们多年没有动笔。直到 2009 年，我们给出了(对数)位置尺度族分布的单双样精确预测区间与 l 个未来样本的顺序统计量的精确预测区间，这是国际上 30 年来未能解决的课题，解决了(对数)位置尺度族分布及其重要成员的可靠性评估问题，加上对幂律模型的检验与贝叶斯区间估计、双参数指数分布可靠性评估等工作内容，就构成了本书。

在研究过程中，李宝盛研究员、丁为航先生与本人密切合作，将本书的理论部分给予了计算机编程实现，给本书的各个新模型编制了高精度软件，数值验证了本书的各命题，使本书成果的推广和应用成为可能。

本书的出版得到了北京强度环境研究所领导的大力支持。

本书在编写过程中得到了北京航天动力研究所有关领导的有力支持。

郭建英教授将本书的部分手稿编辑为电子稿，本书的前两章承陈希孺院士、中国科学院系统科学研究所成平研究员审查指正，又得到了谢光选、黄瑞松两位院士的推荐。作者对以上提到的诸位深表敬意。

50 年前，钱学森同志指出国防科技工业要搞质量控制可靠性，并指定本人为质量控制可靠性的第一个新兵，每忆及此，感慨良多。谨以本书作为向祖国质量可靠性事业 50 周年的献礼！

由于作者水平所限，不足之处在所难免，敬请专家与读者批评指正。

周源泉
2014 年

目　录

第 1 章　双参数指数分布的可靠性评估

本章对双参数指数分布的参数(位置参数 μ、尺度参数 θ)、可靠性测度(失效率 λ、平均失效前时间(mean time to failure,MTTF)M、可靠寿命 t_R、可靠度 $R(t)$)的一致最小方差无偏估计(uniformly minimum-variance unbiased estimator,UMVUE)、无信息先验分布下的贝叶斯估计进行了讨论,并系统地给出了这些参数与测度的经典精确限、信赖精确限、无信息先验分布下的贝叶斯精确可信限,并用数值例说明了这些方法。

双参数指数分布是可靠性工程中一种有用的失效分布,它被用于描述伺服机构、车辆[1]、泵[2]等产品的寿命,它的概率密度函数(probability density function,PDF)为

$$f(t)=\theta^{-1}\mathrm{e}^{\frac{-(t-\mu)}{\theta}}I_{[\mu,\infty)}(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(t-\mu)}I_{[\mu,\infty)}(t)$$

式中

$$I_{[\mu,\infty)}(t)=\begin{cases}1, & \mu\leqslant t<\infty\\ 0, & t<\mu\end{cases}$$

是区间$[\mu,\infty)$的示性函数;$\theta>0$ 是尺度参数;μ 是位置参数,其取值范围为$-\infty<\mu<\infty$,μ 还被称为最小寿命、起始参数、转移参数(shift parameter)、保证时间参数(guarantee time parameter)或门槛参数(threshold parameter)。

为了不致混淆,Evans 等[3]建议称 $\mu\geqslant 0$ 的双参指数分布为左截尾双参数指数分布。关于后者的贝叶斯推断,将在第 2 章中讨论。

双参数指数分布的可靠性评估是指给出 θ、μ、失效率 $\lambda=\theta^{-1}$、平均失效前时间[4]

$$M=\begin{cases}\mu+\theta, & \mu\geqslant 0\\ \theta\mathrm{e}^{\frac{\mu}{\theta}}, & \mu<0\end{cases}\tag{1.1}$$

可靠度函数

$$R(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\lambda(t-\mu)}, & t\geqslant\mu\\ 1, & t<\mu\end{cases}\tag{1.2}$$

可靠寿命

$$t_R=\mu+\theta\ln\frac{1}{R}$$

的点估计(包括 UMVUE 与贝叶斯估计)与置信限(包括经典限、信赖限与无信息先验 PDF 下的贝叶斯可信上(下)限)。

关于双参数指数分布的可靠性评估问题，已有一些文献进行了讨论。对于无替换定数截尾，μ、θ、$R(t)$的 UMVUE 可见文献[5]，μ、θ、λ 的经典限可在文献[6]中找到。对于完全样本的情况，Guenther 等[7]给出了 $R(t)$ 与 t_R 的经典精确下限。对于无替换定数截尾，Grubbs[1]给出了 $R(t)$的信赖近似限，虽然他自称其近似限适用于 $\mu\geqslant 0$ 的情况，但事实上，其近似限适用于 $-\infty<\mu<\infty$ 的情况。Dunsmore[8]给出了完全样本情况下，可靠寿命的近似上、下限。Engelhardt等[9]给出了 $t<t_1$(t_1 是无替换定数截尾样本的第一个顺序统计量)时$R(t)$与 t_R 的精确置信下限，以及 $t>t_1$ 时 $R(t)$与 t_R 的近似下限。文献[9]指出，他们关于 $R(t)$与 t_R 的正态近似下限有非常高的精度，甚至认为没有必要去计算出精确限，关于正态近似限的这个结论，还被以后的文献(如 Lawless[10]、Bain 等[11]、周源泉等[12])引用。但是，文献[9]关于他们的正态近似限的结论是不正确的，因为他们的正态近似限比 Grubbs 的信赖近似限精度差得多。这将在第 2 章左截尾双参数指数分布的可靠性评估中详细讨论，事实上，要给出近似限的精度，就必须给出 $R(t)$与 t_R 在各种情况下的精确限，包括经典的信赖限及贝叶斯限，另外，平均失效前时间也是工程上感兴趣的可靠性测度。给出其点估计与区间估计是本章的主要目的之一。总之，本章将系统地给出 μ、θ、λ、M、t_R、$R(t)$的 UMVUE 与无信息先验 PDF 下的贝叶斯估计，以及这些参数与测度的经典、信赖与无信息先验 PDF 下的贝叶斯精确限。

1.1 预备知识

在后面的分析中，会多次用到以下的预备知识。

(1) 对 $a>0$，r 为不小于 2 的整数，定义

$$G_a(r-1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(r-1)}\int_0^a x^{r-2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

则

$$G_a(r-1) = (-1)^{r-1}\left[1-\sum_{j=0}^{r-2}\frac{(-a)^j}{j\,!}\mathrm{e}^a\right] \tag{1.3}$$

只要反复地进行分部积分，即可证明式(1.3)。

(2) 不完全伽马函数与泊松分布质量函数间有以下关系：

$$I_x(r) = 1-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{x^j}{j\,!}\mathrm{e}^{-x} \tag{1.4}$$

式中，$I_x(r) = \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_0^x u^{r-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ 是不完全伽马函数，r 为正整数。

(3) 无替换定数截尾场合，无信息先验 PDF 下，(λ,μ)的贝叶斯后验 PDF。

由 Jeffreys[13] 的理论可知，位置尺度族参数(u,θ)的无信息先验 PDF 为

$\pi_1(\mu,\theta)=\theta^{-1}$，则$(\lambda,\mu)$的无信息先验 PDF 为

$$\pi(\lambda,\mu)=\left|\frac{\partial(\mu,\theta)}{\partial(\lambda,\mu)}\right|\pi_1(\mu,\theta)=\lambda^{-1}$$

投试 n 个样品，其无替换定数截尾试验的前 r 个顺序统计量为

$$t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r,\quad r\leqslant n$$

其总试验时间 τ 为

$$\tau=\sum_{i=1}^{r}t_i+(n-r)t_r$$

记

$$s=\tau-nt_1$$

命题 1.1　对于无替换定数截尾($r\geqslant 2$)的双参数指数分布，当(λ,μ)取无信息先验 PDF 时，(λ,μ)的后验 PDF 为

$$f(\lambda,\mu)=\begin{cases}\dfrac{ns^{r-1}}{\Gamma(r-1)}\lambda^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda[s+n(t_1-\mu)]}, & -\infty\leqslant\mu\leqslant t_1;\lambda>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{1.5}$$

λ 的后验边缘 PDF 为

$$f(\lambda)=\frac{s^{r-1}}{\Gamma(r-1)}\lambda^{r-2}\mathrm{e}^{-\lambda s}I_{[0,\infty)}(\lambda)\tag{1.6}$$

即参数为$(r-1,s)$的伽马分布。

给定 λ 时，μ 的后验条件 PDF 为

$$f(\mu|\lambda)=n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda(t_1-\mu)}I_{(-\infty,t_1]}(\mu)\tag{1.7}$$

μ 的后验边缘 PDF 为

$$f(\mu)=(r-1)\frac{n}{s}\left[1+\frac{n}{s}(t_1-\mu)\right]^{-r}I_{(-\infty,t_1]}(\mu)\tag{1.8}$$

证　无替换定数截尾试验的似然函数为

$$\begin{aligned}L&=\frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r\mathrm{e}^{-\lambda(\tau-n\mu)}\\&=\frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r\mathrm{e}^{-\lambda[s+n(t_1-\mu)]}\end{aligned}$$

则在无替换定数截尾试验后，(λ,μ)的后验 PDF 为

$$\begin{aligned}f(\lambda,\mu)&=\frac{\pi(\lambda,\mu)L}{\iint\pi(\lambda,\mu)L\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu}\\&=c\lambda^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda[s+n(t_1-\mu)]}\end{aligned}$$

下面确定常数 c。当给定无替换定数截尾样本后，μ 的取值范围由$-\infty<\mu<\infty$变为$-\infty<\mu\leqslant t_1$，故 λ 的后验边缘 PDF 为

$$f(\lambda)=\int_{-\infty}^{t_1} f(\lambda,\mu)\mathrm{d}\mu=\frac{c}{n}\lambda^{r-2}\mathrm{e}^{-\lambda s}$$

显然，$c=\dfrac{ns^{r-1}}{\Gamma(r-1)}$，即 $\lambda\sim\Gamma(r-1,s)$，且

$$f(\mu|\lambda)=\frac{f(\lambda,\mu)}{f(\lambda)}=n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda(t_1-\mu)}I_{(-\infty,t_1)}(\mu)$$

μ 的后验边缘 PDF 为

$$\begin{aligned}f(\mu)&=\int_0^{\infty} f(\lambda,\mu)\mathrm{d}\lambda\\&=(r-1)\frac{n}{s}\left[1+\frac{n}{s}(t_1-\mu)\right]^{-r}I_{(-\infty,t_1]}(\mu)\end{aligned}$$

证毕。

(4) (λ,μ)的信赖 PDF。

命题 1.2　在双参数指数分布的无替换定数截尾($r\geqslant 2$)场合，(λ,μ)的信赖 PDF 与无信息先验 PDF 下的贝叶斯后验 PDF 相同。

证　Epstein 等[6]指出，$u=2n\lambda(t_1-\mu)$与 $v=2s\lambda$ 相互独立地分别服从自由度为 2 与 $2r-2$ 的 χ^2 分布，故(u,v)的联合 PDF 为

$$h(u,v)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\frac{1}{2^{r-1}\Gamma(r-1)}v^{r-2}\mathrm{e}^{-\frac{v}{2}},\quad u,v>0$$

在经典学派看来，λ、μ 是未知常数，$h(u,v)$规定了 t_1 与 s 的概率分布，而在信赖学派看来[14]，在无替换定数截尾试验之后，t_1 与 s 是固定的，$h(u,v)$规定了 λ、μ 的概率分布，即信赖分布。据此，可得(λ,μ)的信赖 PDF 为

$$f_1(\lambda,\mu)=h[u(\lambda,\mu),v(\lambda,\mu)]\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,v)}\right|$$

式中，雅可比行列式为

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\lambda,\mu)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial u}{\partial\mu}\\ \dfrac{\partial v}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial v}{\partial\mu}\end{vmatrix}=4ns\lambda$$

故

$$\begin{aligned}f_1(\lambda,\mu)&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n\lambda(t_1-\mu)}\frac{1}{2^{r-1}\Gamma(r-1)}(2s\lambda)^{r-2}\mathrm{e}^{-s\lambda}4ns\lambda\\&=\frac{ns^{r-1}}{\Gamma(r-1)}\lambda^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda[s+n(t_1-\mu)]},\quad \lambda>0;-\infty<\mu\leqslant t_1\end{aligned}$$

证毕。

必须指出，对于 $\mu\geqslant 0$ 的情况，(λ,μ) 不存在信赖 PDF。因此，Grubbs[1] 给出的 $R(t)$ 的信赖近似限只适用于 $-\infty<\mu\leqslant t_1$ 的情况，而不适用于 $\mu\geqslant 0$ 的情况。Pierce[15] 认为，对于 $\mu\geqslant 0$ 的情况，(λ,μ) 存在信赖 PDF，这是不正确的。另外，文献[15]还认为，$\mu\geqslant 0$ 时，$R(t)$ 的信赖精确限、经典精确限与无信息先验 PDF 下的贝叶斯精确限三者一致，这个结论也不正确。因为 $\mu\geqslant 0$ 时，不存在信赖精确限，另外，后面及第 2 章左截尾双参数指数分布的可靠性评估将指出，$\mu\geqslant 0$ 及 $-\infty<\mu\leqslant t_1$ 时的 $R(t)$ 的经典精确限是一致的。而 $\mu\geqslant 0$ 时，$R(t)$ 的无信息先验 PDF 下的贝叶斯精确限与经典精确限是不一样的。

1.2　μ、θ、λ、M、t_R、$R(t)$ 的点估计

1.2.1　μ、θ、λ、M、t_R、$R(t)$ 的一致最小方差无偏估计

根据 Lehmann-Scheffe-Blackwell 定理[14,16]，参数的 UMVUE 是参数的充分完备统计量的函数，且是被估参数的无偏估计。据此，即可方便地给出以下的命题。

命题 1.3　对做无替换定数截尾试验的双参数指数分布，μ、θ、λ、t_R、$R(t)$ 的 UMVUE 分别为

$$\begin{cases}\hat{\theta}=\dfrac{s}{r-1}\\[2mm] \hat{\lambda}=\dfrac{r-2}{s}\\[2mm] \hat{\mu}=t_1-\dfrac{s}{[n(r-1)]}\\[2mm] \hat{t}_R=t_1+\dfrac{s}{r-1}\left(\ln\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{n}\right)\\[2mm] \hat{R}(t)=\begin{cases}1, & t<t_1\\ \dfrac{n-1}{n}\left(r-\dfrac{t-t_1}{s}\right)_+^{r-2}, & t\geqslant t_1\end{cases}\end{cases}\tag{1.9}$$

式中

$$x_+=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

证　Epstein 等[6]指出，(t_1,s) 是 (μ,θ) 的充分完备统计量，因此，这里仅需验证上述各估计量的无偏性就可以了。因 $2n\lambda(t_1-\mu)\sim x_2^2$ 与 $2s\lambda\sim x_{2r-2}^2$ 相互独立。故 $t_1-\mu\sim\Gamma(1,n\lambda)$ 与 $s\sim\Gamma(r-1,\lambda)$ 相互独立。则

$$E\hat{\theta}=\frac{Es}{r-1}=\theta$$

$$E\hat{\lambda} = (r-2)E\left(\frac{1}{s}\right)= (r-2)\int_0^{\infty} \frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)}s^{r-1}\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}s$$

$$=(r-2)\lambda\frac{\Gamma(r-2)}{\Gamma(r-1)}=\lambda$$

$$E(\hat{\mu}-\mu)=E\left[(t_1-\mu)-\frac{s}{n(r-1)}\right]=\frac{1}{n\lambda}-\frac{1}{n\lambda}=0$$

$$E\hat{t}_R=Et_R$$

$$E\hat{R}(t)=EI(t<t_1)+E\left[\frac{n}{n-1}\left(1-\frac{t-t_1}{s}\right)_+^{r-2}I(t\geqslant t_1)\right]$$

$$= P(t_1 > t) + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{t-x-\mu}{s}\right)_+^{r-2}n\lambda$$

$$\times \mathrm{e}^{-n\lambda x}\frac{\lambda}{\Gamma(r-1)}s^{r-2}\mathrm{e}^{-s r}I(t-\mu\geqslant t_1-\mu)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$=P(t_1-\mu\geqslant t-\mu)+\int_0^{t-\mu}(n-1)\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda x}\int_{t-x-\mu}^{\infty}[s-(t-x-\mu)]^{r-2}\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)}\mathrm{e}^{-s\lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-n\lambda(t-\mu)} + \mathrm{e}^{-\lambda(t-\mu)}\int_0^{t-\mu}\int_0^{\infty}(n-1)\lambda\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda x}\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)}y^{r-2}\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-n\lambda(t-\mu)}+\mathrm{e}^{-\lambda(t-\mu)}[1-\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda(t-\mu)}]$$

$$=\mathrm{e}^{-n\lambda(t-\mu)}=R(t)$$

证毕。

顺便指出，Martz 等[2]认为，$\frac{r-1}{s}$是 λ 的 UMVUE，这是不正确的，他们还建议用

$$\widetilde{R}(t)=\exp\left(-\frac{t-\hat{\mu}}{\hat{\theta}}\right)$$

来估计 $R(t)$，它比 $R(t)$的 UMVUE 要略保守些。

1.2.2　μ、θ、λ、M、t_R、$R(t)$的贝叶斯估计

对于作无替换定数截尾试验的双参数指数分布，若(λ,μ)取无信息先验 PDF，在误差平方损失函数下，有下述命题成立。

命题 1.4　μ、θ、λ、M、t_R、$R(t)$的贝叶斯估计分别为

$$
\begin{cases}
E\theta=\dfrac{s}{r-2} \\
E\mu=t_1-\dfrac{s}{n(r-2)} \\
E\lambda=\dfrac{r-1}{s} \\
EM=t_1+\dfrac{s}{(r-2)n(n+1)}\left[n^2-1+\left(\dfrac{s}{\tau}\right)^{r-2}\right] \\
Et_R=E\mu+\ln\dfrac{1}{R}E\theta=t_1-\dfrac{s}{r-2}\left(\ln\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{n}\right) \\
ER(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{s}{\tau-nt}\right)^{r-1}, & t<t_1 \\ \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{s}{s+t-t_1}\right), & t\geqslant t_1\end{cases}
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

证　因 $\lambda\sim\Gamma(r-1,\lambda)$，故

$$E\lambda=\frac{r-1}{s}$$

$$E\theta=E\lambda^{-1}=\frac{1}{\Gamma(r-1)}\int_0^\infty s^{r-1}\lambda^{r-3}\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\lambda=\frac{s}{r-2}$$

$$
\begin{aligned}
E\mu&=\int_{-\infty}^{t_1}\mu f(\mu)\mathrm{d}\mu \\
&=\int_{-\infty}^{t_1}\mu(r-1)\frac{n}{s}\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r}\mathrm{d}\mu \\
&=\int_{-\infty}^{t_1}\mu\mathrm{d}\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r+1} \\
&=\mu\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r+1}\Bigg|_{-\infty}^{t_1}-\int_{-\infty}^{t_1}\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r+1}\mathrm{d}\mu \\
&=t_1-\frac{s}{n(r-2)}\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r+2} \\
&=t_1-\frac{s}{n(r-2)}\left[1+(t_1-\mu)\frac{n}{s}\right]^{-r+2}\Bigg|_{-\infty}^{t_1} \\
&=t_1-\frac{s}{n(r-2)}
\end{aligned}
$$

$ER(t)$需分如下两种情况计算。

(1) 当 $t\geqslant t_1>\mu$ 时，有

$$ER(t)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t-\mu)}n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda(t_1-\mu)}\mathrm{d}\mu f(\lambda)\mathrm{d}(\lambda)$$