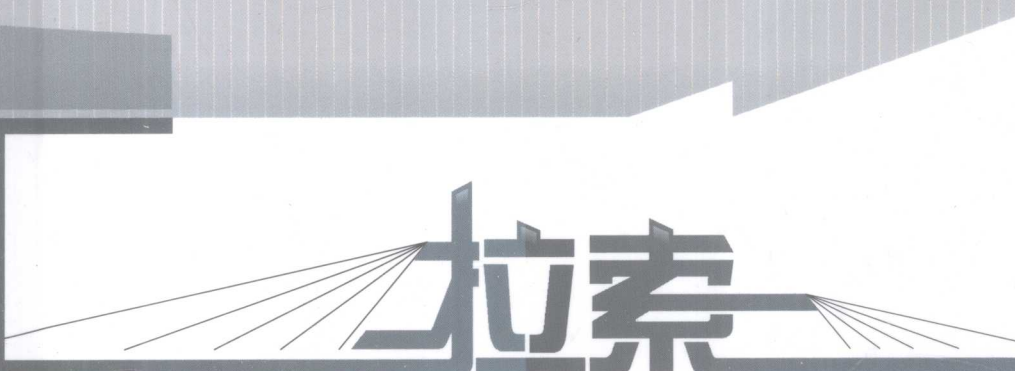




拉索

基本理论及应用

Basic Theory and Application of Cable

◎ 李强兴 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



拉索

基本理论及应用

Basic Theory and Application of Cable

◎ 李强兴 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

拉索基本理论及应用/李强兴著. —武汉:武汉大学出版社,2017.1
ISBN 978-7-307-18756-6

I. 拉… II. 李… III. 桥梁工程—悬索结构—结构设计 IV. U442.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 242609 号

责任编辑:孙 丽 杨赛君 责任校对:杜筱娜 装帧设计:吴 极

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)

印刷:虎彩印艺股份有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:345 千字

版次:2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-18756-6 定价:68.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

拉索在自然界广泛存在,柔索在两支承点间受重力作用处于平衡,就可称为拉索。本书介绍拉索的基本理论,并结合工程实际通过基本理论拓展其应用。

悬链线是拉索的一种形式。悬索桥的主缆就是悬链线,悬索桥的发展历史悠久。中国是悬索桥的故乡,公元前 250 多年,四川境内就出现了古人修建的人行笕桥(竹索桥)、藤索桥。随着社会的进步,以及铁索制造工艺的发展和应用,逐渐出现了铁索桥。公元前 50 年(汉宣帝甘露四年)在四川建成了长达百米的铁索桥。伽利略首先对环链受力形状使用“悬链线”一词。约翰·伯努利(1667—1748 年)于 1691 年成功解出了无弹性悬链线的解。之后有多位数学家(包括欧拉)也解出了悬链线的解。

但是寻求拉索有弹性解是跨越半个世纪的事,1957 年德国人开始建造斜拉桥,到 1965 年德国人 H. J. Ernst^[1]以抛物线为基础导出了用于斜拉桥的表观弹性模量(即 Ernst 公式)。1977 年英国桥梁专家 M. S. Troitsky 在《斜拉桥理论与设计》(中译本)^[2]中指出:“斜拉桥的斜缆、桥塔及主梁的工作性能都表现为非线性,尚无精确的方法可以利用。”

1981 年,我国著名结构工程专家金问鲁^[3]指出:“悬挂结构具有几何非线性……如何能迅速地、完满地求出非线性解,实际在数学观点上看是优化法问题。”1983 年我国单圣涤等采用“八次曲线”来模拟拉索的求静力构形,寻求悬索的计算^[4]。1985 年, H. A. Buchholdt^[5]所著《悬索屋顶结构导论》中尚未出现拉索静力解,说明当时对拉索的求解尚处于探索阶段。1988 年 John W. Leonard^[6]给出斜拉索不成熟解(原文称为悬链方程,他的解是不完全的)。作为斜拉桥重要著作,林元培的《斜拉桥》^[7]尚未出现拉索静力解。

随着时代的前进,1994 年 H. M. Irvine 的 *Cable Structures*^[8]对索的解析解有很大突破, Irvine 给出了以原长位置为自变量表示的三个方程,即拉力方程、水平距方程、垂直距方程。1997 年肖恩源在 *Cable Structures* 基础上发表了《索的特性(续)》^[9],于是在我国首次在 Irvine 的 *Cable Structures* 中引入倾斜索的解(即斜拉索部分解)。但是,此后到 2007 年在有关斜拉桥及悬索桥的博士论文的参考文献中竟未出现 1994 年 H. M. Irvine 的 *Cable Structures*。若仔细研究,发现 H. M. Irvine 的推导没有涉及横截面变化的内在关系,所以国内有人认为推导斜拉索要引入泊松比;另外, H. M. Irvine 的推导只给出三个方程,无应力索长是用近似理论推导,反映 Irvine 的结果尚未终结。1996 年沈世钊等^[10]发表《悬索结构设计》著作,仍未出现拉索静力解。于是笔者首次引入质量守恒定律,并采用双曲函数推导变量函数,开创了新局面,可谓“山重水复疑无路,柳暗花明又一村”,并于 1996 年发表《斜拉索静力解》^[11]和 1997 年发表《斜拉索静力解(续)》^[12]。自此之后直接或间接引用《斜拉索静力解》的论文不断增加。例如辽宁交通科学研究所王伯惠^[13]于 2003 年按斜拉索静力解的思路,推导斜拉索用不同参数表示的解析表达式。简单地说,1996 年《斜拉索静力解》出现之后短短几年,《斜拉索静力解》的推广及应用非常活跃,且其先后被收入《中国建设科技文库》《中国综合运输体系发展全书》等。可见,《斜拉索静力解》一书在社会上影响颇大。事实上,架空电力线

路、水利工程、桥梁工程、土建工程、缆索起重机的缆索、旅游缆索、矿山矿井牵引起吊索、电梯的钢丝绳、农林业索道、光缆、船舶使用的缆绳、拉索支撑屋顶等都有拉索理论的应用,因此《斜拉索静力解》将为重大工程建设发挥重要作用。

本书将“斜拉索”更名为“拉索”(the stretching cable),因为本书证明了垂直拉索、水平拉索、倾斜拉索的理论公式被拉索理论解全部统一,所以定名为“拉索”,具有重要理论意义,并使本书主题更清晰,内涵更具广泛性。自然界的拉索尽管有多种表现形式,且含一些特定附加荷载,它们的解法也可归到拉索的理论范畴,但仅为拉索理论解的一部分。因此使用“拉索”代替“斜拉索”更具科学性和普遍性。

架空电力导线是拉索应用的一部分,本书第 6 章“导线舞动分析”是本书较重要的内容,在导线舞动理论研究方面有所突破。导线在横风作用下摆动,按照力学原理建立运动微分方程,导出导线摆动方程。导线摆动中必然会出现离心力,离心力的引入是必经之途,与质量守恒定律的引入一样,具有重要意义。导线舞动理论研究引入离心力,脉络清晰,公式推导更合理。用导出的理论计算中山口导线 1988 年 12 月 25 日舞动的观测记录,结果令人鼓舞。与实测频率比较,误差为 0.15%,与实测舞幅比较,误差为 0.23%,最大误差都在 0.3%之内,可以说研究结果与实测完全吻合。有一句话:“舞动……是世界性难题。”^[14]今天终于撬开这扇大门,得出的理论将会给导线舞动进一步研究提供重要的理论参考。

此外,书中还包含很多首次面世的内容,如无导数拉力误差计算、空缆索夹参数、多集中力联解法、小垂度界定、含温度三点测索力等。

拉索基本理论的重要意义在于:没有拉索理论,斜拉桥一样能够造出来,只是不完善,斜拉桥是人类的科学技术发明;然而,拉索静力解的导出是自然现象的一项发现,特别是拉索的基本理论,它在斜拉索静力解的基础上证明了水平拉索、垂直拉索和倾斜拉索都是出于一体——拉索静力解;揭示自然界拉索的形态特征,阐明拉索的力学行为,从而为拉索工程设计和计算提供精确结果。拉索静力解的导出,是人类认识自然的进步,为自然科学史增添新的篇章。

本书配套的 Visual Basic 应用序集和 Visual Basic 源程序已放在出版社官网(http://www.stmpress.cn/html/2016/jxsj_1111/35.html)上,共有 18 个程序,有需要及感兴趣的读者可自行下载。

在此对武汉大学图书馆提供丰富的文献资料表示感谢。

由于著者水平有限,书中不妥之处在所难免,望读者批评、指正。

李强兴

武汉大学土木建筑工程学院

2016 年 8 月

目 录

1 拉索基本公式推导	(1)
1.1 拉索静力解	(1)
1.1.1 静力平衡方程和控制微分方程	(1)
1.1.2 原长的解	(2)
1.1.3 弧长(有弹性索长)的解	(3)
1.1.4 水平距的解	(5)
1.1.5 垂直距的解	(5)
1.2 用三角函数表示的拉索公式	(6)
1.3 水平索(悬链线)和垂直索由拉索理论统一	(7)
1.3.1 水平索(悬链线)由拉索理论统一	(7)
1.3.2 垂直索由拉索理论统一	(8)
1.4 无弹性水平拉索曲线推导	(11)
1.5 无弹性倾斜拉索曲线推导	(14)
1.6 拉索静力解是最优解	(15)
1.6.1 拉索常规截面设计	(16)
1.6.2 最优化截面设计	(16)
1.6.3 拉索静力解的解析解是最优解	(20)
2 拉索内涵拓展	(21)
2.1 曲率	(21)
2.1.1 曲率的一般表达式	(21)
2.1.2 参数表示的曲率	(22)
2.1.3 拉索曲率	(23)
2.2 重心	(24)
2.2.1 x 方向重心坐标公式	(25)
2.2.2 y 方向重心坐标公式	(26)
2.2.3 参照倾线重心坐标公式	(27)
2.3 垂度	(28)
2.3.1 拉索的垂度式	(28)
2.3.2 最大垂度	(28)
2.3.3 最大垂度位置	(29)
2.3.4 中央垂度	(29)
2.3.5 最低垂度	(30)
2.3.6 最低垂度位置	(30)
2.4 垂跨比	(30)
2.4.1 倾斜索垂跨比	(30)
2.4.2 垂度向倾角投影不与弧线拟合	(32)

2.5	小垂度的界定	(33)
2.5.1	垂跨比一览	(33)
2.5.2	悬链线小垂度的界定	(33)
2.5.3	垂平力比界定小垂度	(34)
2.5.4	最大垂度与中央垂度相比	(36)
2.6	复形索	(36)
2.7	拉索误差计算	(39)
2.7.1	精度分析	(39)
2.7.2	水平索误差计算	(41)
2.8	倾斜拉索误差计算	(44)
3	含附加荷载拉索的解	(49)
3.1	悬链线中间一集中力的解	(49)
3.2	悬链线一集中力不居中的解	(49)
3.3	倾斜索含一个集中力的解	(52)
3.3.1	空载模型	(52)
3.3.2	有集中力的解	(53)
3.3.3	验证	(54)
3.4	含多集中力的解	(55)
3.4.1	评述迭代法解多集中力	(55)
3.4.2	模型的建立	(56)
3.4.3	索夹参数	(59)
3.4.4	与文献[17]比较	(61)
3.5	水平分布荷载与索上分布荷载的转换	(62)
3.5.1	微分荷载等效定理	(62)
3.5.2	水平分布荷载转换为索上分布荷载	(62)
3.5.3	索上荷载转换为水平荷载	(63)
3.6	含水平分布荷载的解	(64)
3.6.1	建立微原段受力平衡方程	(64)
3.6.2	弧长(即有应力索长)式推导	(66)
3.6.3	水平距式推导	(69)
3.6.4	垂直距式推导	(72)
3.6.5	原长式推导	(74)
3.6.6	与文献[18]比较	(76)
3.6.7	关于含水平分布荷载解垂跨比、曲率、重心的计算	(77)
4	考虑温度拉索的计算	(83)
4.1	温度对斜拉索技术参数的影响	(83)
4.2	考虑有温度变化建立模型	(86)
4.3	斜拉桥牵索就位温度问题	(87)
4.4	综合荷载	(90)
4.4.1	覆冰荷载	(90)
4.4.2	风荷载	(90)
4.4.3	综合荷载计算	(91)

4.5	2008 年年初冰雪灾害架空电线断线分析	(92)
4.6	导线状态方程与拉索理论比较	(96)
4.7	悬索桥因温度影响索塔顶的水平位移	(100)
4.7.1	常温状态	(100)
4.7.2	含温度变化索鞍滑移模型	(102)
4.7.3	含温度变化索塔弯曲模型	(102)
4.7.4	计算结果列表	(103)
4.8	温度对斜拉索实地测量的影响	(104)
4.8.1	常温态三点法解模型参数	(104)
4.8.2	三点法各参数的相对误差	(105)
4.8.3	含温度三点坐标计算常温力	(106)
4.8.4	含温度差三点法悬链线模型	(107)
4.9	任意温度下频率测力计算常温态力	(108)
4.10	垂直索弹性模量测量问题	(110)
5	拉索动力分析	(111)
5.1	抛物线	(111)
5.2	倾斜索运动微分方程推导	(112)
5.2.1	时间函数的解	(113)
5.2.2	边界条件	(114)
5.2.3	振型函数的解	(114)
5.2.4	振幅 D 与初相角 ϵ	(117)
5.2.5	振幅随阶数的变化	(118)
5.3	考虑索含弯曲刚度的解	(119)
5.3.1	时间函数	(121)
5.3.2	振型函数	(121)
5.4	频差渐大现象	(126)
5.5	派生公式——频差法	(127)
5.6	派生公式——两点法	(128)
5.7	派生公式——不含抗弯刚度	(128)
5.8	动态力的误差	(129)
5.9	派生公式——非线性直线化回归	(132)
5.10	动态力是唯一的	(133)
5.11	弦振动方程的振幅	(139)
5.12	傅氏振幅	(140)
5.12.1	抛物线	(140)
5.12.2	无弹性悬链线	(141)
5.12.3	等高无弹性拉索曲线	(143)
5.13	求动幅静方程	(144)
5.13.1	检验 1	(146)
5.13.2	检验 2	(149)
5.13.3	检验 3	(151)
5.13.4	与 Zui H 实用公式的比较	(152)

6 导线舞动分析 (155)

6.1 概述 (155)

6.2 两种观点的辨析 (157)

6.3 摆动频率方程 (157)

6.4 阻尼比 (160)

6.5 有温度变化的综合荷载 (161)

6.6 解频率方程 (162)

6.6.1 求解摆动频率方程 (162)

6.6.2 摆动频率方程说明的问题 (165)

6.7 导线舞动分析 (166)

6.7.1 导线摆动离心力的实验 (166)

6.7.2 导线摆动的失稳 (167)

6.7.3 单位长度离心惯性力的推导 (167)

6.8 离心惯性力的模型建立 (171)

6.9 导线舞动轨迹分析 (172)

6.9.1 导线舞动轨迹图 (172)

6.9.2 按舞动轨迹图用数学模型详细描述舞动 (173)

6.9.3 导线摆动与跳动的动能比 (178)

6.9.4 导线舞动轨迹解释结果 (178)

6.10 中山口导线舞动幅值计算 (179)

6.10.1 中山口导线位置 (179)

6.10.2 1988 年 12 月 25 日气象数据 (179)

6.10.3 凝冰系数 (180)

6.10.4 舞幅计算 (180)

6.10.5 摆动频率计算 (184)

6.10.6 计算结果 (185)

6.11 防舞装置——扰流器 (186)

6.11.1 扰流器形状 (186)

6.11.2 扰流器的大小、长度、铺设方法 (187)

6.11.3 扰流器在我国的应用 (187)

6.12 防舞装置——间隔棒 (188)

6.12.1 间隔棒的好坏 (188)

6.12.2 分裂导线安装间隔棒抑制舞动原理 (188)

6.12.3 管筒间隔棒 (189)

6.12.4 管筒间隔棒优越性分析 (190)

6.12.5 实际应用 (195)

6.13 小摆幅单摆周期和大摆幅单摆周期的推导 (195)

6.13.1 小摆幅单摆周期的推导 (195)

6.13.2 大摆幅单摆周期的推导 (195)

附录 双曲函数公式、顾德曼变换 (200)

参考文献 (207)

1 拉索基本公式推导

1.1 拉索静力解

柔索在自然状态下是不受力的,如果要承受外力,只能是承受张力的绝对柔软的线状物体。它具有抗拉性,但无抗压、抗弯、抗扭、抗剪的性能。当柔索承受稳定荷载时才有确定形状。

拉索所形成的是平面弹性曲线,在两支承点,索体处于自重受力状态,由此形成的曲线具有特别重要的特性,它的形态与自身质量分布有密切关系。

1.1.1 静力平衡方程和控制微分方程

设索体是柔软的,既不受压缩也不受弯曲,是只承受拉力的线状物体,索体具有线弹性性质,受力变形满足胡克定律。

索体上含有自身质量,即单位长度重量 q_0 , 索被支承于两点(低端、高端)不等高处,两端设为铰链(也可以是固定端,不影响推导),在重力作用下处于平衡而形成一条曲线,见图 1-1。注意,低端有一倾斜角 θ_0 , 如果 $\theta_0 = 0$, 曲线就成为悬链线右半侧。

按照整体平衡局部也平衡原理,从索上截取微段 dS , 微段拉索也是平衡的,见图 1-2。根据受力建立静力平衡方程,受力索长会变长,横截面面积会减小,因而描述单位长度重量的 q_0 要变为 q 。索长称为有应力索长,有时称为弧长 S (含变形索长)。受力平衡方程就是变形后处于平衡的索的受力平衡,写微元的静力平衡方程

$$\sum y = 0, (T + dT) \cdot \sin(\theta + d\theta) - T \cdot \sin\theta - q \cdot dS = 0$$

$$\sum x = 0, (T + dT) \cdot \cos(\theta + d\theta) - T \cdot \cos\theta = 0$$

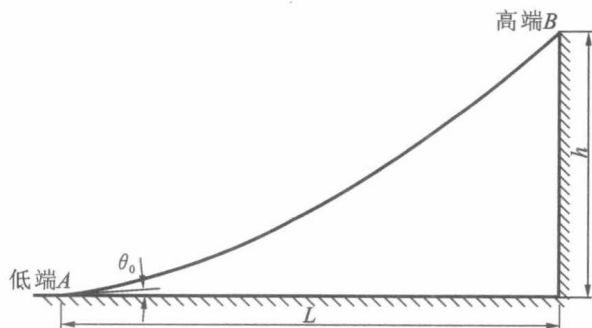


图 1-1

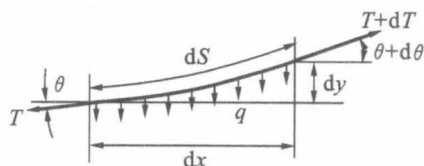


图 1-2

按照无穷小量运算法则,略去高阶无穷小量(无穷小量乘以无穷小量),并有 $\sin(d\theta) = d\theta, \cos(d\theta) = 1$, 前面两式可以简化为

$$T \cdot \cos\theta \cdot d\theta + dT \cdot \sin\theta = q \cdot dS \quad (1.1.1)$$

$$-T \cdot \sin\theta \cdot d\theta + dT \cdot \cos\theta = 0 \quad (1.1.2)$$

式(1.1.1)可化为

$$d(T \cdot \sin\theta) = q \cdot dS \quad (1.1.3)$$

式(1.1.2)可化为

$$d(T \cdot \cos\theta) = 0 \quad (1.1.4)$$

由于

$$\cos\theta = \frac{dx}{dS}, \quad \sin\theta = \frac{dy}{dS}$$

式(1.1.3)变为

$$\frac{d}{dS}(T \cdot \sin\theta) - q = 0 \quad (1.1.5)$$

式(1.1.4)和式(1.1.5)称为控制微分方程。由积分式(1.1.4)得 $T \cdot \cos\theta = \text{常数} = H$, H 称为水平力。由拉力 T 与倾斜角的投影关系可以知道该常数就是水平力。该式表示任意截面上拉力水平投影都相等。

于是得到重要关系式

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = H \cdot \cosh u \quad (1.1.6)$$

称为最大拉力式。

将它代入式(1.1.3),有

$$d\left(\frac{H}{\cos\theta} \cdot \sin\theta\right) = q \cdot dS \quad (1.1.7)$$

此时使用双曲函数推导会很方便,双曲函数的性质可参考附录。令双曲函数角元为 u , 对应三角函数角度为 θ , 应用顾德曼变换有 $\sinh u = \tan\theta$, $\sin\theta = \tanh u$, 则式(1.1.7)变为

$$d(H \cdot \tan\theta) = q \cdot dS$$

$$d(H \cdot \sinh u) = q \cdot dS$$

由于双曲正弦函数的导数 $(\sinh u)' = \cosh u$, 因此式(1.1.7)成为

$$dS = \frac{H}{q} \cdot \cosh u \cdot du \quad (1.1.8)$$

其中 u, q 都是变量,不能直接积分,留待后面处理。

1.1.2 原长的解

所谓原长,就是索处于无弹性状态的长度,所以又有人称其为无应力索长。用 S_0 表示原长,由于原长没有变形,因此截面面积没有变化,这时的单位长度重量就是初始值,即无应力索长的单位长度重量为 q_0 , 式(1.1.7)可以写为

$$d(H \cdot \sinh u) = q_0 \cdot dS_0$$

积分得

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot \sinh u + C_1$$

当 $S_0 = 0$ 时,有 $u = u_0$, 则 $C_1 = -\frac{H}{q_0} \cdot \sinh u_0$ 。其中 u_0 表示低端原点的角元,积分常数 C_1

回代,整理得

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot (\sinh u - \sinh u_0) \quad (1.1.9)$$

但是 $\sinh u_0 = \tan \theta_0$ (最低点切线角的正切), 曲线稳定平衡应该是确定值, 简单起见, 令 $m = \tan \theta_0$, 于是

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot (\sinh u - m) \quad (1.1.10)$$

这是用最简洁形式表示的无应力原长公式。

若用混合式表示(所谓混合式,就是既有双曲函数又有三角函数),如 $\sinh u_0 = \tan \theta_0 = m$, 则 $u_0 = \operatorname{arsinh} m$ 。早期(1980年)美国力学专家梅里安教授(J. L. Meriam)在 *Engineering Mechanics* 一书中推导抛物线时,低端切线角的正切用 m 表示。其目的就是使方程式的书写尽量简短。例如,书写 $\sinh u_0$ 要用 7 个符号,用 m 表示则省去 6 个符号。

1.1.3 弧长(有弹性索长)的解

令索的弧长为 S , 在有弹性情况下,索要增加弹性变形,则对于微段而言,有以下关系

$$\begin{aligned} dS &= dS_0 + \Delta S \\ \Delta S &= \frac{T \cdot dS_0}{E \cdot A_0} \quad (\text{这是胡克定律}) \\ dS &= dS_0 + \Delta S = dS_0 + \frac{T \cdot dS_0}{E \cdot A_0} = dS_0 \cdot \left(1 + \frac{T}{E \cdot A_0}\right) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

或

$$\frac{dS}{dS_0} = 1 + \frac{T}{E \cdot A_0}$$

1.1.3.1 质量守恒定律

下面要引入质量守恒定律。先说明一点,所谓质量守恒定律,就是在任何与周围隔绝的物质系统(孤立系统)中,无论发生何种变化或过程,其总质量保持不变。质量守恒定律是科学上最伟大的守恒定律之一,确立质量守恒定律归功于法国科学家拉瓦锡(A. L. Lavoisier, 1743—1794年)。笔者于1996年^[11]在推导斜拉索静力解中,第一个将质量守恒定律引入公式推导中,解决了索体受力前后单位长度质量变化关系的问题,推导说理严密,这是拉索理论发展的历史性转折点。

根据质量守恒定律,拉索在变形前与变形后的微索段的质量保持不变,有

$$\rho_0 \cdot A_0 \cdot dS_0 = \rho \cdot A \cdot dS$$

其中 ρ_0 、 ρ 分别是受力前索的密度和受力后索的密度。由上式得以下关系

$$\frac{\rho_0 \cdot A_0}{\rho \cdot A} = \frac{dS}{dS_0}$$

$\rho_0 \cdot A_0$ 和 $\rho \cdot A$ 分别是受力前单位长度重量 q_0 和受力后单位长度重量 q , 得

$$\frac{q_0}{q} = \frac{dS}{dS_0}$$

所以有

$$\frac{q_0}{q} = 1 + \frac{T}{E \cdot A_0}$$

或

$$q = \frac{q_0}{1 + \frac{T}{E \cdot A_0}} \quad (1.1.12)$$

分析式(1.1.12), 由于 $\frac{T}{E \cdot A_0} > 0$, 因此等号右边分母 $1 + \frac{T}{E \cdot A_0} > 1$, 得 $\frac{q}{q_0} < 1$, 可知 $q < q_0$, 即拉索受力后单位长度重量变小了。

1.1.3.2 引入质量守恒弧长的推导

受力后控制微分方程是式(1.1.8), 将式(1.1.12)代入式(1.1.8), 并注意到 $T = H \cdot \cosh u$, 则有

$$\begin{aligned} dS &= \frac{H}{\frac{q_0}{1 + \frac{H \cdot \cosh u}{E \cdot A_0}}} \cdot \cosh u \cdot du \\ dS &= \frac{H}{\frac{q_0 \cdot E \cdot A_0}{E \cdot A_0 + H \cdot \cosh u}} \cdot \cosh u \cdot du \\ dS &= \frac{H \cdot E \cdot A_0 + H^2 \cdot \cosh u}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh u \cdot du \end{aligned}$$

整理后得

$$dS = \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u \cdot du$$

两边积分, 得

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot \sinh u + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \frac{1}{4} \cdot [\sinh(2u) + 2u] + C_2$$

当 $S = 0$ 时, 有 $u = u_0$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{H}{q_0} \cdot \sinh u_0 + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \frac{1}{4} \cdot [\sinh(2u_0) + 2u_0] + C_2 \\ C_2 &= -\frac{H}{q_0} \cdot \sinh u_0 - \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \frac{1}{4} \cdot [\sinh(2u_0) + 2u_0] \end{aligned}$$

将积分常数回代并整理, 得拉索弧长公式

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot (\sinh u - \sinh u_0) + \frac{H^2}{4 \cdot q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot [\sinh(2u) + 2u - \sinh(2u_0) - 2u_0] \quad (1.1.13)$$

将上式进一步变化, 考虑 $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$, 于是

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\sinh u \cdot \cosh u + u - \sinh u_0 \cdot \cosh u_0 - u_0) + \sinh u - \sinh u_0 \right]$$

这就是用双曲函数表示的拉索弧长公式。

这里用简单的符号表示,令 $m = \sinh u_0$, 则有

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\sinh u \cdot \cosh u + u - m \cdot \sqrt{1 + m^2} - \operatorname{arsinh} m) + \sinh u - m \right] \quad (1.1.14)$$

如果无拉伸刚度,则含弹性模量的项为无穷大,故该项不存在,弧长就成为原长(无应力索长),与式(1.1.10)相同。

1.1.4 水平距的解

微段弧长在水平方向投影就得到微水平段,即 $dx = dS \cdot \cos\theta$ 。方便起见, dS 可以用式(1.1.14)求导代入,有

$$\begin{aligned} dS &= \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u \cdot du \\ dx &= dS \cdot \cos\theta = \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u \cdot \cos\theta \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u \cdot \cos\theta \cdot du \end{aligned}$$

根据顾德曼变换可以将三角函数变换为双曲函数,即 $\cos\theta = \frac{1}{\cosh u}$, 则上式变为

$$dx = \frac{H}{q_0} \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh u \cdot du$$

两边积分可得

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot u + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \sinh u + C_3$$

当 $x = 0$, 有 $u = u_0$, 代入得

$$C_3 = -\frac{H}{q_0} \cdot u_0 - \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \sinh u_0$$

将积分常数回代,则有

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot u + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \sinh u - \frac{H}{q_0} \cdot u_0 - \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \sinh u_0$$

整理后得

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{E \cdot A_0} \cdot (\sinh u - \sinh u_0) + u - u_0 \right] \quad (1.1.15)$$

用混合式表示, $\sinh u_0 = \tan\theta_0 = m$, $u_0 = \operatorname{arsinh} m$, 有

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{E \cdot A_0} \cdot (\sinh u - m) + u - \operatorname{arsinh} m \right] \quad (1.1.16)$$

这就是用混合式表示的拉索水平距公式。

1.1.5 垂直距的解

微段弧长在垂直方向投影就得到微垂直段,即 $dy = dS \cdot \sin\theta$ 。同样, dS 用式(1.1.14)求导代入,有

$$dy = \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u \cdot \sin\theta \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u \cdot \sin\theta \cdot du$$

三角函数正弦用顾德曼变换, $\sin\theta = \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$, 则有

$$dy = \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u \cdot \frac{\sinh u}{\cosh u} \cdot du + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u \cdot \frac{\sinh u}{\cosh u} \cdot du$$

$$dy = \frac{H}{q_0} \cdot d(\cosh u) + \frac{H^2}{q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh u \cdot d(\cosh u)$$

两边积分,得

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \cosh u + \frac{H^2}{2 \cdot q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u + C_4$$

C_4 是积分常数,由边界条件可以确定,当 $y = 0$ 时,有 $u = u_0$, 则有

$$C_4 = -\frac{H}{q_0} \cdot \cosh u_0 - \frac{H^2}{2 \cdot q_0 \cdot E \cdot A_0} \cdot \cosh^2 u_0$$

将积分常数 C_4 回代,整理后的结果是

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\cosh^2 u - \cosh^2 u_0) + \cosh u - \cosh u_0 \right] \quad (1.1.17)$$

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\cosh^2 u - \sinh^2 u_0 - 1) + \cosh u - \cosh u_0 \right]$$

由于 $\sinh u_0 = \tan \theta_0 = m$, $\cosh u_0 = \sqrt{1 + \sinh^2 u_0} = \sqrt{1 + m^2}$, 则有

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\sinh^2 u - m^2) + \cosh u - \sqrt{1 + m^2} \right] \quad (1.1.18)$$

这就是用混合式表示的拉索垂直距公式。

1.2 用三角函数表示的拉索公式

上一节我们通过微分方程求解得到 5 个有用公式:最大拉力式(1.1.6)、原长式(1.1.10)、弧长式(1.1.14)、水平距式(1.1.16)和垂直距式(1.1.18),都是用混合函数表示的方程式,形式标准,容易记忆。当然,有时工程师不大喜欢使用它们的表示方式,但是可以通过顾德曼变换将双曲函数变为三角函数。

所谓顾德曼变换,是将三角函数同双曲函数建立相连关系。但要注意,双曲函数没有周期,而三角函数是有周期的。根据顾德曼变换,可以建立如下对应关系:

$$\sinh u_0 = \tan \theta_0 = m, \quad \sinh u = \tan \theta$$

$$\cosh u_0 = \sqrt{1 + \sinh^2 u_0} = \sqrt{1 + m^2}$$

$$\cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$u_0 = \operatorname{arsinh} m = \operatorname{arsinh}(\tan \theta_0) = \ln(\tan \theta_0 + \sqrt{\tan^2 \theta_0 + 1}) = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$$

$$u = \operatorname{arsinh}(\tan \theta) = \ln(\tan \theta + \sqrt{\tan^2 \theta + 1})$$

利用这些关系,可以用三角函数表示拉索有关公式,具体如下。

拉力公式

$$T = \frac{H}{\cos \theta} = H \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \quad (1.2.1)$$

原长公式

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot (\tan\theta - \tan\theta_0) \quad (1.2.2)$$

弧长公式

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot \left(\tan\theta \cdot \sqrt{1 + \tan^2\theta} - \tan\theta_0 \cdot \sqrt{1 + \tan^2\theta_0} + \ln \frac{\tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + 1}}{\tan\theta_0 + \sqrt{\tan^2\theta_0 + 1}} \right) + \tan\theta - \tan\theta_0 \right] \quad (1.2.3)$$

水平距公式

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{E \cdot A_0} \cdot (\tan\theta - \tan\theta_0) + \ln \frac{\tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + 1}}{\tan\theta_0 + \sqrt{\tan^2\theta_0 + 1}} \right] \quad (1.2.4)$$

垂直距公式

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\tan^2\theta - \tan^2\theta_0) + \sqrt{1 + \tan^2\theta} - \sqrt{1 + \tan^2\theta_0} \right] \quad (1.2.5)$$

其中, θ_0 是低端(原点)曲线切线角; θ 在通常情况下代表高端切线角, 当 θ 用来描述曲线上任意一点切线角时就是一个自变量。使用这些三角函数式表示的公式略冗长, 不及使用双曲线混合式表示的简短。此外, 还可以导出用力要素表示的一套拉索公式, 此处省略, 本书都使用混合式。

1.3 水平索(悬链线)和垂直索由拉索理论统一

1.3.1 水平索(悬链线)由拉索理论统一

拉索是自然界客观存在的曲线形式, 现在已经能够用数学符号描述这条曲线。悬链线也是客观存在的一种曲线形式, 可以将悬链线统一到拉索中, 也就是说悬链线是拉索的一个组成部分。当倾斜拉索低端切线角 $\theta_0 = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{arsinh}(\tan\theta_0) = 0 \\ \sinh u_0 &= 0 \\ \cosh u_0 &= 1 \end{aligned}$$

1.3.1.1 有弹性悬链线

拉索弹性解可以简化为有弹性悬链线半侧, 即

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot \left(\frac{H}{E \cdot A_0} \cdot \sinh u + u \right) \quad (1.3.1)$$

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\cosh^2 u - 1) + \cosh u - 1 \right] \quad (1.3.2)$$

$$S = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\sinh u \cdot \cosh u + u) + \sinh u \right] \quad (1.3.3)$$

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot \sinh u \quad (1.3.4)$$

$$T = H \cdot \cosh u$$

这个结果与张震陆和陈本贤^[15]发表的《柔索分析的“悬链段”方法研究》中的附录是对应相等的。

1.3.1.2 无弹性悬链线

当悬链线无弹性时,根据有弹性悬链线的拉索公式,现今弹性模量趋于无穷大,即 $E \rightarrow \infty$, 倾斜拉索进一步简化为无弹性悬链线(简称悬链线)半侧,即

$$x = \frac{H}{q_0} \cdot u \quad (1.3.5)$$

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot (\cosh u - 1) = \frac{H}{q_0} \cdot \left(\cosh \frac{q_0 \cdot x}{H} - 1 \right) \quad (1.3.6)$$

$$S_0 = \frac{H}{q_0} \cdot \sinh u = \frac{H}{q_0} \cdot \sinh \frac{q_0 \cdot x}{H} \quad (1.3.7)$$

这些结果同谢传铎《理论力学》^[16]的悬链线公式对应相等。

悬链线的经典表示法是 $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$ 。由 $y = \frac{H}{q_0} \cdot \left(\cosh \frac{q_0 \cdot x}{H} - 1 \right)$ 作变换,令 $a = \frac{H}{q_0}$, a 的量纲是长度单位,如果截距 a 不表示,则不影响曲线形状,但曲线的低端设在 y 轴原点上,故经典的曲线表示公式是

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a} \quad (1.3.8)$$

到此,我们证明了悬链线就是拉索的一个特例,拉索包含了悬链线全部内容,拉索统一悬链线。

1.3.2 垂直索由拉索理论统一

垂直索是拉索一个组成部分,通过仔细分析,斜拉索理论也适用于垂直缆绳的受力计算。因为垂直索只有垂直分量,水平分量为 0,属于一维索。拉索的两维公式中的水平公式不出现, $x = 0$, 弧长公式是二维,所以这里不使用弧长公式。由原长公式转化后可变为可用的一维,垂直公式是一维重要表示式,拉索垂直距公式为

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot (\sinh^2 u - m^2) + \cosh u - \sqrt{1 + m^2} \right]$$

又

$$\sinh u = \frac{V}{H}, \quad m = \frac{V_0}{H}, \quad \cosh u = \sqrt{1 + \frac{V^2}{H^2}}$$

V 是高端垂直力, V_0 是低端垂直力,将此三式代入垂直公式,得

$$y = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\frac{H}{2 \cdot E \cdot A_0} \cdot \left(\frac{V^2}{H^2} - \frac{V_0^2}{H^2} \right) + \sqrt{1 + \frac{V^2}{H^2}} - \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{H^2}} \right]$$