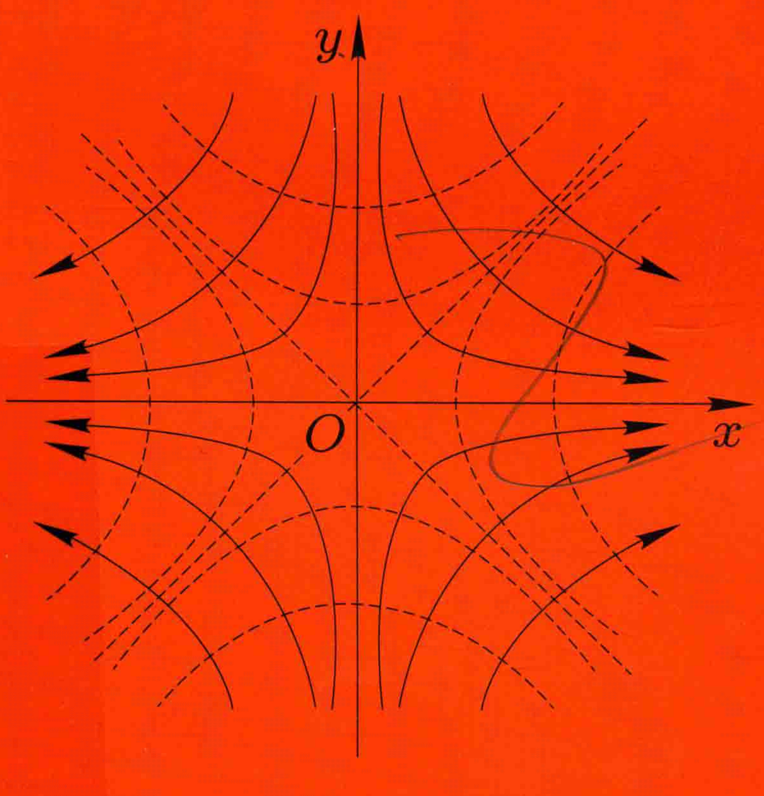
几何背景下的数学物理方法

常晋德　编著



高等教育出版社

几何背景[redacted]理方法

Jihe Beijing [redacted] Wuli Fangfa

常晋德　编著

阜阳师范学院图书馆
藏书

高等教育出版社·北京

内容提要

本书内容除包括传统的复变函数、数学物理方程、特殊函数和积分变换外，还概述了微积分中的数学思想，简单介绍了广义函数的入门知识。本书观点新颖，极具启发性，内容由浅入深，同时又能深入浅出。全书注重对数学概念的阐述、对知识的来龙去脉的交代，把数学思想方法和具体的数学知识融为一体，以此来不断提升读者对数学知识的认识和理解水平；尤为注重几何直观的引导作用，尽量以平面和函数空间为背景阐述全书内容，对数学物理方程的常用解法，诸如分离变量法和积分变换法等的原理都做出了几何解释。并且，从推广函数空间的坐标表示的角度引出广义函数的概念，实现了从函数概念到广义函数概念的自然过渡。全书为读者进一步学习泛函分析铺平了道路。

本书是面向理工科非数学类、非物理学类专业大学生的数学物理方法课程的教材，也可供数学类和物理学类专业的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

几何背景下的数学物理方法 / 常晋德编著 . -- 北京：高等教育出版社，2017. 6

ISBN 978-7-04-047370-4

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①常… Ⅲ. ①数学物理方法 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 024755 号

策划编辑 田 玲　责任编辑 田 玲　特约编辑 马 骞　封面设计 李树龙
版式设计 马敬茹　插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘丽娴　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京市联华印刷厂
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 32
字 数 650 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2017 年6月第 1 版
印 次 2017 年6月第1次印刷
定 价 58.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 47370-00

序　　言

这是一本面向理工科非数学类、非物理学类专业大学生的数学物理方法课程的教材，除了包括传统的教学内容，即复变函数和数学物理方程外，还对微积分中的数学思想和广义函数做了简要的介绍。通常工科数学教材都强调数学知识的工具性和实用性，重点放在了对数学的应用上，忽略对知识的来龙去脉的交代，也不重视学生对数学概念的理解。这样做的缺点是使学生的数学水平始终停留在较低的层次上。可是科学技术的发展，已经要求工科大学生学习越来越多的数学知识。像实变函数和泛函分析这些对数学类专业的学生都很抽象、学习难度很大的课程已经进入了我国许多高校的工科研究生的教学范围。但现有的工科本科数学教学却没有做好铺垫和衔接工作。另外，国内许多高校都开设了工科数学分析课程。这说明很多人已经认识到传统的高等数学的教学内容和教学方式已经不能再满足学生后续学习的需求。不同于同类书籍，本书注重对数学概念的阐述，注重对知识的来龙去脉的交代，注重把数学思想方法和具体的数学知识融为一体，以此来不断提升学生对数学知识的认识和理解水平。本书将为读者开辟一条直通泛函分析的道路。

在数学产生之初，虽然是代数与几何并立，但由于几何的形象直观，人们更愿意把数学的根基建立在几何之上。但不可公度线段的发现和非欧几何的产生，让人们认识到几何不是绝对可靠的数学知识，开始以代数为数学的根基。在微积分上百年的严密化过程中，逻辑开始深入人心，在数学中占据绝对主导地位，而直观开始遭到排斥。虽然在 1931 年，哥德尔不完备性定理的提出已经说明了数学知识不可能通过公理化为这个大厦建立绝对可靠的根基，但重逻辑、轻直观的思潮并未受到太大的影响。直至 1997 年尼达姆 (Tristan Needham) 教授出版 *Visual Complex Analysis* (有中译本，见 [15]) 一书以来，在数学领域掀起了一股可视化的潮流。所谓可视化，其实就是从几何的角度看分析学或代数学的问题。如果我们追溯分析学的历史源头的话，就会发现解析几何就是代数与几何融合的产物。微积分，乃至整个分析学都可概括为

$$\text{分析学} = \text{几何的背景} + \text{代数的语言} + \text{无穷的问题。}$$

所以从几何的角度阐述分析学是一个自然的途径。

著名数学家阿蒂亚在南开大学 2000 年的一个报告中指出:

视觉占用了大脑皮层的 80% 或 90% …… 因此空间直觉或空间观察力是

> 一种非常强有力的工具, 也是几何学在数学上占有如此重要位置的原因, 它不仅仅对那些明显具有几何性质的事物可以使用, 甚至对那些没有明显几何性质的事物也可以使用。我们努力将它们归结为几何形式, 因为这样可以让我们使用我们的直觉。我们的直觉是我们最有力的武器。

本书的主体由数学物理方法的传统教学内容: 复变函数和数学物理方程 (即偏微分方程) 构成。复变函数属于明显具有几何性质的事物, 数学物理方程则属于没有明显几何性质但可归结为几何形式的事物。我国著名数学家徐利治教授曾说过:

> 我们学习数学理论、方法或数学定理时, 怎样才算真正懂了呢? 事实上, 只有做到直观上懂才算 "真懂"。所谓 "真懂" 的意思是指: 对数学的理论、方法或定理能洞察其直观背景, 并且看清楚它是如何从具体特例过渡到一般 (抽象) 形式的。
>
> 从感性到理性, 从生动的直观到抽象思维, 这是任何一位数学工作者都必须遵循的认识规律。数学直觉既是抽象思维的起点, 又是其归宿。通过抽象思维, 对数学的本质有所洞察, 有所概括, 这样就形成了更高层次的数学直觉, 从而又可进行更高层次的创造性思维活动。

本书力图以几何为背景, 首先让读者能直观地认识复变函数的内容, 然后通过建立函数空间的概念, 引导读者形成高层次的数学直觉, 从而可以直观地学习数学物理方程的各种主要解法。本书通过建立函数空间中的坐标系概念, 将求解线性偏微分方程的两种基本解法: 分离变量法和积分变换法都解释为坐标法。求解线性偏微分方程的基本解和格林函数法需要在广义函数论的基础上才能将其阐述清楚, 但由于广义函数论太过抽象难懂, 大多数同类教材都回避了这种讲法。但本书将函数空间上的线性连续泛函解释为函数的坐标表示的一种推广形式, 开辟了一条理解广义函数概念的新途径, 实现了函数概念到广义函数概念的自然过渡, 使得广义函数论对非数学类专业的本科生不再高不可攀。

本书的写作耗费了作者数年之久的时间, 为达到让读者理解本书内容的目的, 写作的切入点更换了数次。这些写作动机已经交织在了一起, 每一个写作动机都在本书中留下了深深的印记。所以从几何的角度阐述全书内容只是本书的一个主要写作目标。其余的写作目标罗列如下:

1. 从微积分的数学思想起步来阐述全书内容。

   所以本书以概述微积分中的数学思想开头, 然后通过 "温故而知新" 的方式引出复变函数的内容和函数空间中的坐标系概念。

   分析学是与无穷打交道的数学分支。本书开篇就直入主题, 将无穷的问题摆到

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

读者面前, 让读者知道将要面对什么。学习分析学就必然会和各种极限过程 (例如让许多人头痛的无穷级数), 和无穷维空间打交道。希望读者尽早认识到畏惧无穷的心态是不可取的, 既然避无可避, 还不如勇敢面对。

2. 从数学方法论的角度阐述本书内容, 揭示数学知识被创造的过程。

   在美国国家研究委员会 1989 年的一份报告《人人关心数学教育的未来 —— 关于数学教育的未来致国民的一份报告》中指出:

   > 实在说来, 没有一个人能教数学, 好的教师不是在教数学而是能激发学生自己去学数学。教育调查提供了令人信服的证据, 那就是只有当学生通过自己的思考建立起自己的数学理解能力时才能真正学好数学。

   > 所有学生学习数学时都在从事大量的创造。他们按自己的想法去解释所学的东西时, 就像在创造一种理论去弄懂这些东西; 他们不是简单地复习学过的内容, 而是用新的观点去改造原有的想法。

   根据上述观点, 数学学习的过程是数学知识被重新建构的过程。因此只有向学生展示数学知识的创造过程, 才能更好地帮助他们学习和理解所学的数学知识。

3. 融入数学史材料, 借鉴历史的经验。

4. 把数学科普读物的写作手法引入到数学教材的写作中来。

   在这方面, 休森 (Stephen Fletcher Hewson) 教授所著的 *A Mathematical Bridge: An Intuitive Journey in Higher Mathematics* (有中译本《数学桥: 对高等数学的一次观赏之旅》) 是一个成功的尝试。在国内则有刘里鹏所著的《从割圆术走向无穷小 —— 揭秘微积分》。只不过刘里鹏写作此书时只是一个非数学类专业的大一学生, 而且只用了 40 天时间便完成了写作。所以刘里鹏所著的书在专业水准方面有所欠缺, 未引起数学类专业人士的关注。

5. 贯彻 "数学是常识的精微化" 思想, 将抽象的数学和生活实际联系起来。

本书最主要的参考文献是 [1]、[2] 和 [17]。在此向这些书的作者深表谢意。其余参考文献由于数目众多, 恕不能在此一一列出, 详见书后所附的参考文献目录。在此向这些文献的作者一并致谢。应当指出, 在参考文献中, 有相当一部分是向读者推荐的进一步的阅读文献。与本书内容相关的数学史资料在参考文献中也占了不小的比重。

本书的编写得到了中国海洋大学数学科学学院原院长方奇志教授和原教学副院长王林山教授的支持, 以及数学物理方法任课教师王莉萍教授、高翔副教授和陈春光博士的支持, 在此表示感谢。在教学过程中, 作者从与王莉萍教授和赵元章副教授的交流中吸取了他们的一些教学心得体会, 特别是王莉萍教授一直关心和支持本书的写作, 在此对他们特别表示感谢。本书习题中选编了中国海洋大学数学物理方法公共课的部分期末考试题,

在此向出题人表示感谢。

最后作者要感谢的是那些在课堂上与作者讨论过数学物理方法相关问题, 以及支持和鼓励作者编写和出版本书的学生们。他们是作者写作本书最大的动力。

由于作者学识有限, 本书难免会有疏漏之处, 欢迎同行和读者批评指正! 我的电子邮箱地址为

mathwalker@163.com。

需要本书电子课件的教师, 也敬请联系作者。

常晋德

2016 年 10 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第零章　微积分中的数学思想概述

世上无空中楼阁. 要想学好数学物理方法的内容, 必须从它的最重要的基础之一 —— 微积分起步. 也就是说, 要先理解好微积分的内容. 在此, 我们将概述与本书相关的微积分的思想方法. 本书的一个目标就是要说明数学物理方法中的数学思想和方法只是微积分中的思想方法的发展. 我们假定读者已经学过微积分的知识, 所以在表述上侧重于思想的阐述, 而不是做严格的逻辑推理, 因此难以顾及一些细节方面的严谨性. 本章旨在提高读者对微积分的认识和理解程度, 部分内容是一般的微积分教材里没有的.

0.1　微积分的起源

微积分是研究事物的运动与变化的数学分支, 而事物的运动与变化必然涉及无穷的概念.

0.1.1　无法回避的无穷

无穷的概念由来已久. 早在公元前 5 世纪, 古希腊哲学家芝诺就利用无穷的概念构造了与运动相关的四个悖论, 至今发人深思. 在这里我们只陈述其中两个. 第一个悖论说阿基里斯 (希腊神话中的人物, 善跑) 追不上乌龟. 阿基里斯与乌龟赛跑, 由于乌龟跑得慢, 所以让乌龟先跑. 当乌龟到达 B 点时, 阿基里斯开始从 A 点出发 (见图 0.1). 当阿基里斯追到 B 点时, 乌龟已经到了 C 点, 而当阿基里斯追到 C 点时, 乌龟又到了 D 点. 就这样, 阿基里斯要想追上乌龟就必须先到达乌龟之前的位置, 可当他到达乌龟之前的位置时, 乌龟又已经到了新的位置. 阿基里斯追赶乌龟的过程就这样被分成了一个无穷的过程. 就像自然数不能被数尽一样, 无穷的过程直观上是不可能完成的. 于是就得出了阿基里斯无法追上乌龟的结论. 这个悖论称为**阿基里斯悖论**. 第二个悖论说运动是不可能的. 如果要从 A 点到 B 点, 就必须先经过它们的中间点 C (见图 0.2). 同样, 如果要从 A 点到 C 点, 就必须先经过它们的中间点 D. 如此类推下去, 任何的运动都必须经历一个无限的过

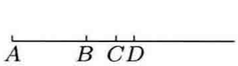


图 0.1　赛跑的过程

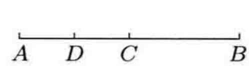


图 0.2　二分法

程. 这个悖论称为**二分法悖论**. 我国古代哲学家庄子也曾提出过类似的论点: “一尺之棰, 日取其半, 万世不竭 (见《庄子 · 天下篇》).” 这两个芝诺悖论是建立在空间或时间是无限可分的假设的基础之上的, 而空间或时间是否无限可分是仁者见仁智者见智的哲学问题. 一个更根本的问题是: 无穷是否存在? 事实上, 除了人为构造出来的与无穷有关的概念或过程外, 在客观世界中没有什么是无穷的. 即便是空间和时间也难以证明无穷的存在性, 最新物理学知识告诉我们宇宙并非无边无际, 而时间是人为创造的概念. 无穷到底存在还是不存在也许根本就没有答案. 所以当人们面对无穷的概念时, 能做的就是选择承认还是拒绝承认它. 在很长一段时间里, 解决芝诺悖论的方法就是否认无穷的存在性, 从而也就不存在什么芝诺悖论了.

通过否认无穷的存在性, 可以消除芝诺悖论, 但同时也失去了用数学方法研究事物运动变化的可能性. 因为要想研究事物的运动, 我们就需要考虑两点之间的距离问题. 从几何的角度看, 这就是如何度量线段长度的问题. 给定一条线段, 要想度量它的长度, 就像物理中的空间距离需要用米、厘米等长度度量单位去度量一样, 我们必须先有一个基本的长度度量单位, 即单位长度. 不过在数学中我们不需要具体的物理单位, 我们可以任意选定一个长度, 然后规定这个长度为基本单位长度, 记为 1. 所谓求线段的长度, 就是用我们规定的单位长度去度量该线段 (见图 0.3). 度量的结果可分为两种: 一种是恰好可以度量尽, 即线段长度是单位长度的整数倍, 例如 m 倍, 这时我们说线段的长度为 m; 另一种情况是无法度量尽, 即线段长度在单位长度的整数倍之间. 第二种情况的出现可能是因为我们的度量单位选得太大了, 应该用更小的长度度量单位去度量. 这时可以将基本单位长度 n (n 为某个正整数) 等分, 从而得到一个新的更小的长度度量单位 $1/n$. 用这个新的度量单位 $1/n$ 去度量线段的长度, 结果可能还是有两个. 如果度量尽了, 说明线段长度是单位长度 $1/n$ 的整数倍, 例如 m 倍, 这时线段的长度为 m/n. 如果度量不尽, 则说明长度度量单位可能依然选取得过大. 这时我们可调大 n 的取值, 得到更小的长度度量单位 $1/n$, 重新去做度量. 随着不断地调大 n 的取值, 直觉是无法告诉我们第二种情况是否会一直存在下去的. 不过如果我们假设第二种情况不会一直存在下去, 即所有的长度都可以表示为 m/n 的形式, 就会发现这是错误的. 历史上, 毕达哥拉斯学派首先发现直

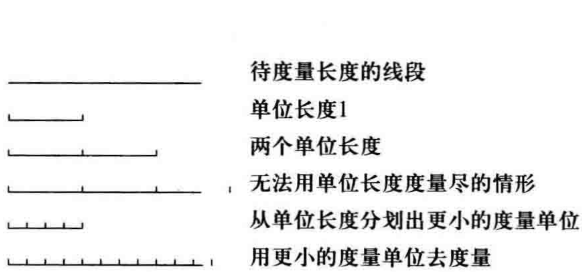


图 0.3　线段长度的度量

角边长为 1 的直角三角形的斜边长度不可能表示为 m/n 的形式. 根据勾股定理 (又称毕达哥拉斯定理), 直角边长为 1 的直角三角形的斜边长度为 $\sqrt{2}$. 我们知道, 作为数, m/n 表示的就是有理数 (rational number, 原意为 “成比例的数”). 也就是说, $\sqrt{2}$ 不是有理数. 证明这一点并不难, 读者可用反证法证明它 (见 [65] 2.2.1 小节). 从前面的讨论可知, 有理数所代表的长度都是可度量的. 这就是有理数的几何意义. 那些无法用长度度量单位度量尽的长度也需要用数值来表示, 所以我们需要引进一些新的数来表示这些长度, 称之为无理数 (irrational number, 意为 “不成比例的数”). 有理数和无理数合称为实数. 这样任意的长度就都可用实数来表示. 但无理数的引入只是从表面上解决了长度度量的问题, 因为在实际应用中我们是无法测量出它的精确值的. 我们只能不断地用更小的度量单位去取得任意精度的近似值. 这是一个无限逼近的过程. 至此我们已经说明哪怕只是确定两点之间的距离这么简单的问题, 都会涉及无穷的过程. 不同于芝诺悖论中的无穷过程是人为用逻辑方法划分出来的, 这里的无穷过程是我们刻画距离或长度的概念时必须面对的. 回避无穷就意味着回避距离的概念. 没有了距离, 事物的运动就无从谈起. 同样的论证完全适用于计时的问题, 因为要计时就离不开时间单位. 回避无穷就意味着回避时间的概念. 没有了时间, 事物的变化就无从谈起. 所以要想研究事物的运动与变化, 无穷的概念就不可回避, 我们必须承认无穷的存在性.

无穷不是一个简单的概念, 要把握无穷单靠直观是远远不够的. 为了认清这一点, 我们考虑自然数集和它的偶数子集. 直观上, 偶数集是自然数集的真子集, 因此它的元素数量应该比自然数集要少; 但显然自然数集和它的偶数子集之间可以建立一一对应的关系, 而对于有限集合这意味着两者数目一样多. 所以连比较两个无穷集合元素多少都不是简单的问题. 这说明面对无穷我们大有文章可做. 在微积分, 乃至整个分析学里, 我们的主要任务就是处理涉及无穷的问题, 特别是包含无穷过程的问题.

0.1.2 微积分的前身: 解析几何

我们都知道, 初等数学可分为代数学和几何学. 也就是说, 数学本来只有代数学和几何学这两个大的分支. 但微积分, 以及本书的所有内容却隶属于一个新的数学分支: 分析学. 那么, 分析学是如何产生的, 它与代数学和几何学之间是什么关系? 牛顿和莱布尼茨都认为微积分是代数的扩展, 它是 “无穷” 的代数, 例如幂级数的加减乘除就是多项式的加减乘除的推广. 直到 1797 年, 拉格朗日仍认为微积分及其后的发展只是初等代数的推广 ([74] 268 页). 也就是说, 在相当长的时间里, 微积分的创立者和发展者们并没有意识到他们正在创造和发展一个新的数学分支. 今天我们知道分析学其实是代数学与几何学相融合的产物, 所以在分析学里既有几何学也有代数学的身影. 与几何和代数不同的是, 分析学主要致力于解决与无穷有关的问题. 但数学本身是个整体, 数学分支只是人为划分出

来的, 所以实际想找出分析学、代数学和几何学各自的边界几乎是不可能的事. 随着无穷的概念进入分析学, 它也就进入了代数学和几何学, 形成了一些数学的交叉分支, 例如无穷维空间几何理论、无穷维李代数等. 不过至少在分析学产生初期, 是否涉及无穷就是它与代数学和几何学的根本差别. 是否涉及无穷的问题也是高等数学和初等数学的一个分界线.

在微积分产生之前, 已经有了一个代数学与几何学相结合的先例, 就是由笛卡儿和费马创立的解析几何. 解析几何的核心思想就是 "数形结合", 即用代数的语言描述几何的对象, 从而实现用代数的方法讨论几何问题的目的. 实现数形结合的第一步是建立数轴的概念. 给定一条直线, 由于直线上的每一点都无差别, 所以任选其上一点作为原点, 记其为点 0, 不妨规定原点右侧的方向为正方向. 通过度量直线上的点到原点之间的距离, 由前面对两点之间距离的讨论, 我们可以将全体实数与直线上的点一一对应起来. 这样与实数建立了一一对应关系的直线称为**实数轴**, 一般简称为**数轴**. 从空间的角度看, 直线代表一维空间. 直线可以用实数表示, 意味着一维空间可以用实数表示. 利用数轴, 一维空间中的运动就可以用函数[1]的概念刻画. 假设从 t_0 时刻开始, 一个可以忽略大小的物体从数轴上的某点出发开始沿此数轴做一维运动, 则每一时刻该物体都位于数轴上的一个点, 从而整个运动过程就可以用位移函数 $x(t)$ 来描述. 我们看到, 虽然描述事物的运动并非笛卡儿的本意, 但正是解析几何的数形结合思想使得利用函数来描述事物的运动变化成为可能. 所以说解析几何是微积分的前身也不为过.

在 16 世纪, 欧洲人为了寻找原料和通商, 开始了大规模的远离海岸的远洋航行活动. 为确定他们在大海中的位置, 在没有陆地为参照物的情况下, 只能以太阳和月亮等天体为参照物. 这就产生了研究天体运动的需求. 同时还有一些其他的运动问题也开始进入人们的视野, 感兴趣的读者可参阅 [74] 中的 16.4 节. 历史上, 正是从对这些运动问题的研究中引出了函数的概念. 函数概念的产生, 使得微积分的创立已经是万事俱备、只欠东风的事了.

0.2　极限的思想

微积分处理无穷的基本工具就是极限. 虽然严格的极限理论是在微积分创立之后才逐步建立起来的, 但极限的直观思想却有悠久的历史可循. 早在公元前古希腊数学家欧多克索斯创立的用于求曲边形面积和曲面体体积的穷竭法, 就隐含了极限的思想. 我国魏晋时期的数学家刘徽创立的计算圆周率的割圆术可看作是穷竭法的一个特例. 穷竭法一般被认为是迈向积分学的第一步.

[1]函数的概念几经变迁才演变为今天的形式. 历史上, 最早的函数概念形式就是动点运动形成的曲线.

0.2.1 数列极限和数项级数的收敛性

极限成为处理无穷过程的工具是很自然的事, 因为它的思想就是用我们可以把握的有限过程的量去逼近用无穷过程描述的量, 或者说用有限过程中观察到的变化趋势去推断无穷过程的变化趋势. 数列极限的概念可通过直观的逼近过程建立起来.

前面我们引出了无理数的概念, 但还没有给出无理数的表示方法. 现在利用极限的思想, 我们可以解决这个问题了. 其实很简单. 根据前面描述的度量长度的方法, 我们可以先用单位长度 1 去度量, 则对给定的无理数所代表的长度 x, 存在一个非负整数 m, 使得 $0 < x - m < 1$. 然后再用 0.1 所代表的长度去度量, 必存在一个在 0 到 9 之内的整数 m_1, 使得 $0 < x - m.m_1 < 0.1$. 类似地, 我们可以不断地以原度量长度单位的十分之一为新的度量长度单位, 就会依次得到 $m_2, \cdots, m_n$, 使得 $0 < x - m.m_1m_2\cdots m_n < 1/10^n$. 通过这样一个过程, 我们可以得到一个有理数列 $a_n = m.m_1m_2\cdots m_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 随着 n 的增大, a_n 可以在任意要求的精度范围内逼近无理数 x. 要想得到 x 的精确值, 这个过程就必须无限地进行下去, 否则就与无理数不可度量尽的性质矛盾了. 于是正的无理数只能用 (十进制) 无限小数才能表示出来. 所以无理数只能用 (十进制) 无限小数才能表示出来.

从这个简单的无理数表示的例子里, 我们不难得出一般的数列极限的概念. 给定数列 $\{x_n\}$, 说它有极限 a, 如果随着指标 n 的不断增大, x_n 可以以任意的精度逼近 a. 用严格的数学语言即 $\varepsilon - N$ 语言表述出来就是: 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有极限 a. 这里 ε 代表逼近的精度要求, N 反映何时能够达到要求的逼近精度, 即 N 代表数列逼近的速度 (或者说, 数列的收敛速度). 我们看到数列极限的 ε-N 语言完全就是逼近思想的一种表示方式. 在数列极限的概念里, 我们并不在意逼近过程即极限过程是否能最终完成, 我们只是从任意多的有限步逼近中, 观察近似误差的变化趋势, 即误差是否会趋向于 0.

在实际应用中, 许多涉及数列极限的逼近问题, 用无穷级数的概念来描述会更好. 重新考虑上面的无理数的表示问题. 在实际中, 当我们得到无理数 x 的近似值 m 后, 在下一次精度更高的测量中, 我们一般是不会对已有的测量结果置之不理, 而从头开始测量的. 往往我们会在已有结果的基础上, 转向直接度量误差 $x - m$, 得到误差的近似值 $0.m_1$ 之后, 通过 $m + 0.m_1 = m.m_1$ 得到 x 的精度更高的近似值. 所以实际的度量过程是一个不断在已得近似值的基础之上, 加上新的误差的近似值的过程, 即

$$a_n = m + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \cdots + \frac{m_n}{10^n}.$$

所以用有理数列 $\{a_n\}$ 逼近无理数 x 的过程其实还是一个无穷级数求和的问题. 这就引出了无穷级数的收敛性问题. 正如我们已经看到的, 一个无穷级数的收敛性等价于它的部分和序列的收敛性.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com