

二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列

经济数学

(第3版)

JINGJI SHUXUE

张杰明 主 编

张晋珠 尚肖飞 副主编

赠送
电子课件

- 先进性与基础性相统一 •
- 教材建设与教学改革相统一 •
- 综合性与针对性相统一 •

清华大学出版社



二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列

经济数学

(第3版)

张杰明 主 编

张晋珠 尚肖飞 副主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是根据高等学校经济类专业微积分课程的教学大纲组织编写的.本书采用全新的编排方式,注重突出数学课程的循序渐进、由浅入深的特点,具有理论联系实际、课程紧密结合专业的特色.全书以“注重概念、强化应用、培养技能”为重点,充分体现了“以应用为目的,以实用为标准”的原则.

本书的主要内容有一元函数微积分学、微分方程、多元函数微积分学、无穷级数.为了更好地适应现代经济数学教学的要求,本书详细介绍了需求、供给、边际和弹性等常见的经济模型,简要介绍了基尼系数、投资和消费者剩余等重要的经济模型,在第二、七、九和十一章后配有相应的经济知识拓展,附录 B 和附录 C 分别介绍了数学建模和数学软件 MATLAB 的内容.本书的各章节还精心配置了例题和习题,便于学生对有关知识的掌握与应用;书末附有部分习题答案.带 * 号内容供学时较多的专业选用.

本书可作为普通高等学校、成人高校及本科院校举办的二级学院和民办高校的教材.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/张杰明主编. —3 版. —北京:清华大学出版社,2017

(二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列)

ISBN 978-7-302-47322-0

I. ①经… II. ①张… III. ①经济数学—高等学校—教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 124111 号

责任编辑:梁媛媛 孟 攀

封面设计:刘孝琼

责任校对:吴春华

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62791865

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:29.75

字 数:720 千字

版 次:2007 年 8 月第 1 版 2017 年 7 月第 3 版

印 次:2017 年 7 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:59.80 元

前 言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学,是人类文化和文明的重要组成部分.能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志,数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用.

步入 21 世纪,学科间的交叉与融合越来越普遍,作为一种定量分析工具,数学方法在经济、管理的实践中被大量运用.因此,普通应用型高校经管类各专业对数学课程提出了新的更高的要求,数学教学更加注重培养学生运用数学知识解决经济问题的能力.针对新形势下应用型大学数学教育的改革思路以及教育部高等院校应用型人才的培养目标,为了培养优秀的经济管理类应用型人才,课程组(微分方程应用研究团队)在国内外专家、学者的指导下,经过多年的调研、考察和教学实践,充分借鉴国内外最新优秀教材的思想和方法,编写了适用于经管类各专业学生使用的大学数学教材《经济数学》(第 3 版).通过三年的试用和六年多的使用,课程组不断改进、充实和完善教材内容,取得了很好的教学效果,较大地提高了大学数学的教学质量.该教材是“全国高等学校大学数学教学研究与发展中心”、山西省教育厅教改课题“大学生数学建模竞赛应用能力培养的研究与实践”和山西省教育科学“十三五”规划课题“基于应用能力培养的本科院校高等数学教学改革研究”的主要研究成果之一;《经济数学》教材的第 1 版和第 2 版,在 2010 年和 2012 年山西省普通高等学校教学成果奖评选中两次荣获二等奖.

本书在编写过程中,以高等学校经管类专业微积分课程的教学大纲为基础,注重与经管类专业课程的衔接,同时保持了数学学科的科学性和系统性.教材在内容上突出精选够用,表达上力求通俗易懂,满足了高等教育实践性、应用性强的特点.在概念引入、理论分析等环节上注意结合经管类学生的实际,尽可能从学生熟悉的问题入手,进行深入浅出的讲解,力求使基本概念、基本定理直观化、具体化.

为了更好地适应高等教育应用型人才的培养,我们结合高校教材最新的发展趋势,对《经济数学》第 2 版进行了全面的修改,并根据经管类学生的实际情况,对教材的许多内容进行了删、减、增(实用)、细的处理,弱化数学定理的证明,充分注重数学与经济各学科间的交叉,注重数学在经济、管理中的应用.本书将数学建模的思想贯穿到大学数学教学中,逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和自学能力,增强学生运用所学知识去分析、解决经济问题的初步能力,为后继课程和今后工作打下必要的数学基础.

在编写过程中,课程组注重教材的基础性、实践性、科学性和先进性,突出“三用一

新”的特点,即实用、适用、够用和创新。本书知识体系完整,结构严谨,内容精练,循序渐进,推理简明,通俗易懂。本书在例题和习题的选配上,遵循由易到难的原则,同时辅以历年研究生入学考试中的经典题型,以满足不同层次学生的需求,并提供了部分习题的参考答案或提示。

与其他经济数学教材相比,本书还有如下特点。

(1) 本书在大学数学的体系、内容、方法上进行了改革。将数学和经济紧密结合在一起,这是以往《经济数学》教材很少做过的。为此课程组查阅了大量和经济有关的数学教材,仔细研究了宏观、微观经济学和其他经济类专业课程的教材,从中找出和微积分密切相关并且具有典型特色的经济模型和案例。

(2) 本书将数学建模思想、方法贯穿于整个课程体系之中。我们在很多章节给出了与教材章节内容有关的数学建模案例,又在附录中对数学建模进行了专门的介绍。通过这种方式,既可以提高读者在学习过程中的兴趣,又可以达到理论联系实际的目的,对培养读者的创新意识很有帮助。

(3) 本书注重培养学生应用所学的数学知识解决数学问题的能力,特别是将数学软件 MATLAB 结合具体教学内容进行讲授,包括基本使用方法,借助软件完成公式演算、数值计算、图形绘制的练习等,其目的是突出对学生建模能力的培养,提高学生的分析能力和运用数学知识解决实际问题的能力。

(4) 本书将数学文化修养提到了一个新的高度。把数学看成是一种崭新的文化,是人类如何对待世界的一种新态度和一种新思维。有鉴于此,本书在各章结尾附有与其内容相关的数学文化知识,包括数学史、数学家简介、数学逸事等内容,使学生真正体会到数学之美,充分展现数学课程的人文教育功能。

本书由山西大学商务学院的张杰明教授提出编写思想、提纲、列出章节目录,负责全书的策划、统稿、定稿,并且编写了第一章、第十章和附录 C;景冰清副教授编写了第二章;太原工业学院的张晋珠教授编写了第三章和附录 B;杨晨副教授编写了第四章;太原学院的尚肖飞副教授编写了第五章和第七章;赵转萍老师编写了第六章和附录 A;张艳桃老师编写了第八章;李文姿老师编写了第九章;太原学院的赵登科副教授编写了第十一章。

在编写过程中,山西大学的郭耀鹏教授、山西财经大学的王译教授和太原理工大学的张洪斌教授都仔细审阅了本书,并提出许多宝贵的指导意见,使本书增色不少。本书还得到山西大学商务学院的徐仲安教授、杨继平教授、石生教授的大力支持。

由于编者的水平有限,书中的缺点和错误在所难免,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编者

目 录

第一章 函数 1

第一节 集合 1

一、集合的概念 1

二、集合的运算 2

三、绝对值 3

四、区间和邻域 4

习题 1-1 5

第二节 函数的概念、性质和例题 6

一、函数的概念 6

二、函数的性质 9

三、建立函数关系的例题 12

习题 1-2 13

第三节 反函数、复合函数和

初等函数 14

一、反函数 14

二、基本初等函数 15

三、复合函数 20

四、初等函数 21

习题 1-3 21

第四节 经济学中的几种常用函数 22

一、需求函数与供给函数 22

二、成本函数、收益函数与利润

函数 24

三、其他经济函数 26

习题 1-4 27

阅读资料 28

本章小结 29

第二章 极限与连续 31

第一节 极限 31

一、数列极限 31

二、函数极限 35

习题 2-1 40

第二节 极限的运算 41

习题 2-2 45

第三节 极限存在准则和两个

重要极限 45

一、极限存在准则 45

二、两个重要极限 46

习题 2-3 51

第四节 无穷小量与无穷大量 52

一、无穷小量 52

二、无穷大量 53

三、无穷小量的比较 55

习题 2-4 58

第五节 连续 59

一、函数连续的概念 59

二、函数的间断点 61



三、连续函数的性质与初等函数	
的连续性	63
四、闭区间上连续函数的性质	65
习题 2-5	68
知识拓展 复利、贴现模型(极限)	69
阅读资料	73
本章小结	74

第三章 导数与微分

第一节 导数概念	76
一、导数定义	76
二、几个基本初等函数的导数	
公式	80
三、可导与连续的关系	83
习题 3-1	84
第二节 导数的运算法则	85
一、函数的和、差、积、商的	
求导法则	85
二、反函数求导法则	88
三、复合函数求导法则	90
四、初等函数的求导问题	92
习题 3-2	93
第三节 高阶导数、隐函数及由参数	
方程所确定的函数的导数	95
一、高阶导数	95
二、隐函数的导数	98
* 三、由参数方程所确定的	
函数的导数	100
习题 3-3	102
第四节 微分	103
一、微分的定义及几何意义	103
二、微分的运算法则	105
三、微分在近似计算中的应用	108
习题 3-4	111

阅读资料	112
本章小结	114

第四章 导数的应用

第一节 微分中值定理	115
一、罗尔定理	115
二、拉格朗日中值定理	116
* 三、柯西中值定理	119
习题 4-1	119
第二节 洛必达法则	119
习题 4-2	124
第三节 函数的单调性与极值	124
一、函数单调性的判别法	124
二、函数极值的判别法	127
三、最大值和最小值的求法	131
习题 4-3	134
第四节 函数图形的描绘	135
一、曲线的凹凸性与拐点	135
二、函数图形的描绘	138
习题 4-4	143
第五节 导数在经济分析中的应用	144
一、边际与边际分析	144
二、弹性与弹性分析	147
习题 4-5	152
阅读资料	156
本章小结	157

第五章 不定积分

第一节 不定积分概述	159
一、原函数与不定积分的概念	159
二、不定积分的几何意义	160

三、基本积分表	161	一、定积分的换元积分法	200
四、不定积分的性质	162	二、定积分的分部积分法	204
习题 5-1	164	习题 6-3	206
第二节 换元积分法	165	第四节 广义积分	207
一、第一类换元积分法 (凑微分法)	165	一、无穷区间上的广义积分	207
二、第二类换元积分法	170	二、无界函数的广义积分	210
习题 5-2	174	习题 6-4	212
第三节 分部积分法	176	* 第五节 定积分的近似计算	212
习题 5-3	178	一、矩形法	212
* 第四节 有理函数的积分	178	二、梯形法	213
一、有理真分式化为部分分式 之和	179	三、抛物线法	214
二、有理真分式的积分	180	习题 6-5	216
习题 5-4	181	阅读资料	216
第五节 积分表的使用方法	181	本章小结	217
习题 5-5	182		
阅读资料	183	第七章 定积分的应用	219
本章小结	184		
第六章 定积分	186	第一节 定积分的元素法	219
第一节 定积分的概念和性质	186	第二节 定积分在几何上的应用	221
一、定积分的概念	186	一、平面图形的面积	221
二、定积分的性质	191	二、旋转体的体积	226
习题 6-1	194	习题 7-2	228
第二节 微积分基本定理	195	第三节 定积分在经济上的应用	230
一、变上限函数及其导数	195	一、已知边际函数求总量 的问题	230
二、牛顿-莱布尼茨公式	196	二、投资问题	231
习题 6-2	199	三、国民收入分配问题	233
第三节 定积分的换元积分法和 分部积分法	200	四、消费者剩余和生产者剩余 问题	234
		习题 7-3	235
		知识拓展 红绿灯管理模型(积分) ...	236
		阅读资料	238





本章小结	240	习题 8-5	277
第八章 微分方程	241	第六节 微分方程在经济中的应用 ...	278
第一节 微分方程的概念	241	阅读资料	281
一、引例	241	本章小结	283
二、微分方程的基本概念	242	第九章 多元函数微分学	286
习题 8-1	245	第一节 空间解析几何简介	286
第二节 一阶微分方程	245	一、空间直角坐标系	286
一、可分离变量的微分方程	246	二、曲面与方程	288
二、齐次方程	247	习题 9-1	292
三、一阶线性微分方程	250	第二节 多元函数的概念、极限与	
四、微分方程在几何中的应用 ...	253	连续	292
习题 8-2	255	一、多元函数的概念	292
第三节 可降阶的高阶微分方程	256	二、常见的多元经济函数	295
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分		三、多元函数的极限与连续	297
方程	256	习题 9-2	300
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分		第三节 偏导数与全微分	301
方程	257	一、偏导数的概念	301
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分		二、高阶偏导数	303
方程	258	三、偏导数的经济意义	305
习题 8-3	259	四、全微分的概念	307
第四节 二阶常系数线性微分方程 ...	260	五、近似计算	311
一、二阶常系数齐次线性微分		习题 9-3	311
方程	260	第四节 多元复合函数与隐函数的	
二、二阶常系数非齐次线性微分		微分法	312
方程	264	一、复合函数的微分法	313
习题 8-4	270	二、隐函数的微分法	316
第五节 差分方程	270	习题 9-4	318
一、差分的概念与性质	270	第五节 多元函数的极值	318
二、差分方程的概念	272	一、二元函数的极值	318
三、一阶常系数线性差分方程 ...	273	二、最大值与最小值	320

* 三、条件极值	321	第二节 数项级数收敛判别法	362
* 四、最小二乘法	323	一、正项级数及其比较判别法 ...	363
习题 9-5	325	二、交错级数	368
知识拓展 期权定价模型(偏微分) ...	325	三、任意项级数	369
阅读资料	329	习题 11-2	371
本章小结	331	第三节 幂级数及其性质	372
第十章 多元函数积分学	333	一、幂级数及其收敛性	373
第一节 二重积分	333	二、幂级数的运算性质	376
一、二重积分的概念	333	习题 11-3	378
二、二重积分的性质	336	第四节 函数展开成幂级数	379
习题 10-1	337	一、泰勒级数	379
第二节 二重积分的计算	338	二、函数展开成幂级数	380
一、利用直角坐标系计算二重		* 三、幂级数在近似计算中的	
积分	338	应用	384
二、交换累次积分次序计算二重		习题 11-4	385
积分	345	第五节 级数在经济中的应用举例 ...	386
* 三、利用极坐标计算二重		知识拓展 人口预测模型	389
积分	346	阅读资料	392
习题 10-2	350	本章小结	393
* 第三节 二重积分的应用	351	附录 A 积分表	395
习题 10-3	353	附录 B 数学建模简介	405
阅读资料	353	附录 C 数学软件 MATLAB 简介	429
本章小结	355	部分习题参考答案	443
第十一章 无穷级数	356	参考文献	466
第一节 数项级数	356		
一、数项级数的基本概念	357		
二、数项级数的性质	359		
习题 11-1	362		

第一章 函 数

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中变量与变量之间依赖关系的数学描述,也是经济数学的主要研究对象.在这一章中,我们将在已有知识的基础上,进一步加深对函数概念及性质的理解和掌握,为学习本课程打下必要的理论基础.

第一节 集 合

一、集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一.研究任何对象都不可避免地用到集合,例如所有自然数的集合、一个方程根的集合、某三角形内所有点的集合、一个班全体学生的集合等.一般来说,具有某种特定性质的对象的总体称为集合,组成集合的每一个对象称为集合的元素.通常以大写字母 $A, B, D \cdots$ 表示集合,而以小写字母 $a, b, x \cdots$ 表示集合的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;否则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.一个集合,若它只含有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

集合常用的表示法有 3 种:列举法、图示法和描述法.

(1) 列举法.把集合的全体元素一一列举出来表示,并用花括号括起来.

例如,由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A ,可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\};$$

由元素 1, 2 组成的集合 B ,可表示成

$$B = \{1, 2\}.$$

注意:用列举法表示集合时,必须列出集合的所有元素,不得遗漏和重复.

(2) 图示法.以数轴或坐标系的点表示元素,用这些点所组成的区间或区域表示集合的方法.这种表示法在讨论集合关系时显得直观、形象.

(3) 描述法.若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$$

这里 x 所具有的性质 P ,实际上就是 x 作为 M 的元素应满足的充分必要条件:符合性质 P 的任何对象都是集合 M 的元素;反之,集合 M 的元素都必须符合性质 P .



例如,设集合 C 是方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的解集,集合 C 就可表示成

$$C=\{x|(x-1)(x-2)=0\}.$$

而 xOy 平面上坐标满足方程 $x^2+y^2=R^2$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M ,可记作

$$M=\{(x,y)|x^2+y^2=R^2, x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以点 O 为圆心、以 R 为半径的圆周上的点的全体组成的集合.

以后要用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.如果没有特别声明,以后提到的数都是在实数范围内讨论.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,则必 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$ (读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$ (读作 B 包含 A),如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q},\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$.例如,设

$$A=\{x|x^2=1\}, B=\{1,-1\},$$

则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$,且规定空集为任何集合的子集.

例如, $A=\{x|x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}=\emptyset$,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

二、集合的运算

集合的基本运算有以下几种:并、交、差、补.

设 A, B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

由所研究的所有对象构成的集合称为全集,记作 I .全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 $\bar{A}$,即

$$\bar{A}=\{x|x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

设 A, B, C 为任意 3 个集合,则下列法则成立.

(1) 交换律: $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(4) 摩根律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

在两个集合之间还可以定义笛卡儿乘积.

设 A, B 是任意两个集合, $x \in A, y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合, 称为 A 与 B 的笛卡儿乘积, 记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

例如, 设 $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4\}$, 则

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4)\}.$$

三、绝对值

在研究一些问题时, 我们常常要用到实数绝对值的概念. 下面介绍实数绝对值的定义及性质. 一个实数的绝对值, 记为 $|x|$, 定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质.

$$(1) |x| \geq 0.$$

$$(2) |x| = \sqrt{x^2}.$$

$$(3) |-x| = |x|.$$

$$(4) -|x| \leq x \leq |x|.$$

$$(5) \text{ 如果 } a > 0, \text{ 则 } \{x | |x| < a\} = \{x | -a < x < a\}.$$

$$(6) \text{ 如果 } b > 0, \text{ 则 } \{x | |x| > b\} = \{x | x < -b \text{ 或 } x > b\}.$$

$$(7) |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$(8) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

$$(9) |xy| = |x| \cdot |y|.$$

$$(10) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$$

四、区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$.

数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$. a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$.

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$. a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$.

类似地,

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与图 1-1(b) 所示. 此外, 还有无限区间. 引入记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 例如,

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-2(a) 和图 1-2(b) 所示.

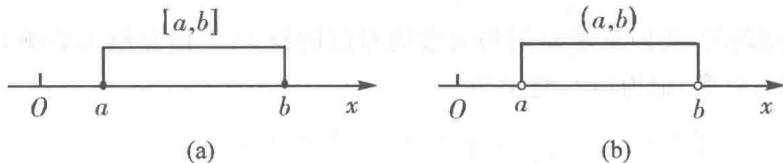


图 1-1

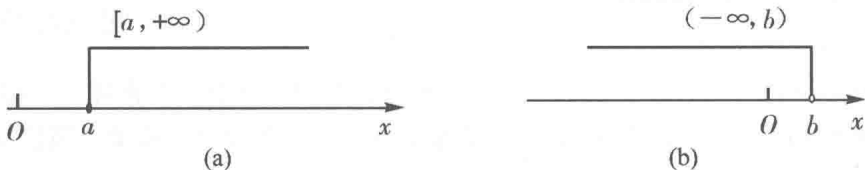


图 1-2

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 就简单地称它为“区间”, 通常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径 (见图 1-3).

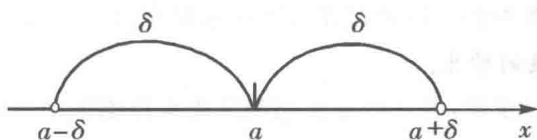


图 1-3

由于 $a-\delta < x < a+\delta$ 相当于 $|x-a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉, 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的空心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

这里 $|x-a| > 0$ 表示 $x \neq a$.

为了方便, 有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习题 1-1

1. 用列举法表示下列集合.

- (1) 方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根的集合.
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.
- (3) 集合 $\{x \mid |x-1| \leq 3\}$ 的整数.

2. 用描述法表示下列集合.

- (1) 小于 3 的所有实数集合.
- (2) 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内部 (不包含圆周) 一切点的集合.
- (3) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.

3. 如果全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求:

- (1) $A \cap B$, (2) A' , (3) $(A \cup B)'$, (4) $A - B$, (5) $A \cap B'$.

4. 已知 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, 求 $A \times B$.

5. 某班有学生 50 人, 其中 30 人订日报, 20 人订晚报, 两种报纸都订的有 10 人, 试用集合关系表示下列各类学生, 并计算出学生的数目.

- (1) 至少订一种报纸的学生.

(2) 不订报纸的学生.

(3) 只订晚报不订日报的学生.

6. 解下列不等式.

(1) $|x-2| < 3$.

(2) $0 < |2x-3| < 1$.

7. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来.

(1) $A = \{x \mid |x+1| < 2\}$.

(2) $B = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}$.

第二节 函数的概念、性质及例题

一、函数的概念

在观察自然现象和应用技术的过程中,会遇到各种不同的量,其中有的量在这一过程中不发生变化,这种量叫作常量;还有一些量在这一过程中是不断变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫作变量.

通常用字母 a, b, c 等表示常量,用字母 x, y, u 等表示变量.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集.如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值和它对应,则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的一个函数关系,称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的定义域, x 叫作自变量, y 叫作因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,通过对应法则 f , 与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应函数值的全体组成的数集 $W = \{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可用其他字母表示,如 φ, F 等,这时函数就记作 $y=\varphi(x), y=F(x)$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时函数的定义域就是使算式有意义的一切实数所组成的集合,称之为函数的自然定义域.

定义域和对应法则是函数的两个要素.只要定义域相同,且 f 代表同一对应法则,则 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 就是同一个函数,而与自变量和因变量用什么字母表示无关.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值不唯一,叫作多值函数.以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

函数的表示主要有 3 种方法:表格法、图形法、解析法(公式法).

(1) 表格法. 在实际应用中, 把自变量的不同取值与对应的函数值列于一张表格中来表示对应法则的方法.

(2) 图形法. 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法, 即坐标平面上的点集

$$M = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的图形 (见图 1-4), 图中的 W 表示函数 $y = f(x)$ 的值域.

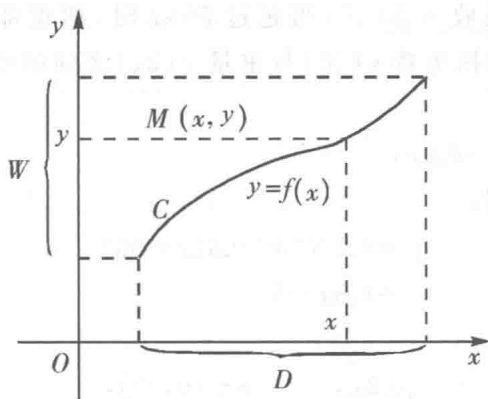


图 1-4

(3) 解析法. 自变量和因变量之间的关系用数学表达式表示的方法.

例 1 确定函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ 的定义域.

解 显然, 其定义域为满足不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 的 x 值的集合, 解此不等式, 得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

例 2 确定函数 $f(x) = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 须有

$$\begin{cases} 1-x^2 \neq 0, \\ x+2 \geq 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq -2 \text{ 且 } x \neq \pm 1\}$.

根据函数表达式的不同形式, 函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) **显函数** 函数 y 由自变量 x 的解析式直接表示, 例如 $y = f(x)$, $y = x^3 - 1$.