二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列

经济数学

（第3版）

JINGJI SHUXUE

张杰明　主　编
张晋珠　尚肖飞　副主编

赠送
电子课件

· 先进性与基础性相统一 ·
· 教材建设与教学改革相统一 · 综合性与针对性相统一 ·

清华大学出版社

二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列

经济数学

(第3版)

张杰明 主 编

张晋珠 尚肖飞 副主编

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书是根据高等学校经济类专业微积分课程的教学大纲组织编写的.本书采用全新的编排方式,注重突出数学课程的循序渐进、由浅入深的特点,具有理论联系实际、课程紧密结合专业的特色.全书以“注重概念、强化应用、培养技能”为重点,充分体现了“以应用为目的,以实用为标准”的原则.

本书的主要内容有一元函数微积分学、微分方程、多元函数微积分学、无穷级数.为了更好地适应现代经济数学教学的要求,本书详细介绍了需求、供给、边际和弹性等常见的经济模型,简要介绍了基尼系数、投资和消费者剩余等重要的经济模型,在第二、七、九和十一章后配有相应的经济知识拓展,附录B和附录C分别介绍了数学建模和数学软件 MATLAB的内容.本书的各章节还精心配置了例题和习题,便于学生对有关知识的掌握与应用;书末附有部分习题答案.带 * 号内容供学时较多的专业选用.

本书可作为普通高等学校、成人高校及本科院校举办的二级学院和民办高校的教材.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/张杰明主编. —3版. —北京:清华大学出版社,2017
(二十一世纪普通高等院校实用规划教材·经济管理系列)
ISBN 978-7-302-47322-0

Ⅰ.①经… Ⅱ.①张… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第124111号

责任编辑: 梁媛媛 孟 攀
封面设计: 刘孝琼
责任校对: 吴春华
责任印制: 李红英
出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　**邮　　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载: http://www.tup.com.cn, 010—62791865
印 装 者: 清华大学印刷厂
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185mm×230mm　**印　　张:** 29.75　**字　　数:** 720千字
版　　次: 2007年8月第1版　2017年7月第3版　**印　　次:** 2017年7月第1次印刷
印　　数: 1～3000
定　　价: 59.80元

产品编号: 074003—01

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，是人类文化和文明的重要组成部分.能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要标志，数学教育在培养高素质科学技术人才中具有其独特的、不可替代的重要作用.

步入21世纪，学科间的交叉与融合越来越普遍，作为一种定量分析工具，数学方法在经济、管理的实践中被大量运用.因此，普通应用型高校经管类各专业对数学课程提出了新的更高的要求，数学教学更加注重培养学生运用数学知识解决经济问题的能力.针对新形势下应用型大学数学教育的改革思路以及教育部高等院校应用型人才的培养目标，为了培养优秀的经济管理类应用型人才，课程组（微分方程应用研究团队）在国内外专家、学者的指导下，经过多年的调研、考察和教学实践，充分借鉴国内外最新优秀教材的思想和方法，编写了适用于经管类各专业学生使用的大学数学教材《经济数学》(第3版).通过三年的试用和六年多的使用，课程组不断改进、充实和完善教材内容，取得了很好的教学效果，较大地提高了大学数学的教学质量.该教材是“全国高等学校大学数学教学研究与发展中心”、山西省教育厅教改课题“大学生数学建模竞赛应用能力培养的研究与实践”和山西省教育科学“十三五”规划课题“基于应用能力培养的本科院校高等数学教学改革研究”的主要研究成果之一；《经济数学》教材的第1版和第2版，在2010年和2012年山西省普通高等学校教学成果奖评选中两次荣获二等奖.

本书在编写过程中，以高等学校经管类专业微积分课程的教学大纲为基础，注重与经管类专业课程的衔接，同时保持了数学学科的科学性和系统性.教材在内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂，满足了高等教育实践性、应用性强的特点.在概念引入、理论分析等环节上注意结合经管类学生的实际，尽可能从学生熟悉的问题入手，进行深入浅出的讲解，力求使基本概念、基本定理直观化、具体化.

为了更好地适应高等教育应用型人才的培养，我们结合高校教材最新的发展趋势，对《经济数学》第2版进行了全面的修改，并根据经管类学生的实际情况，对教材的许多内容进行了删、减、增（实用)、细的处理，弱化数学定理的证明，充分注重数学与经济各学科间的交叉，注重数学在经济、管理中的应用.本书将数学建模的思想贯穿到大学数学教学中，逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和自学能力，增强学生运用所学知识去分析、解决经济问题的初步能力，为后继课程和今后工作打下必要的数学基础.

在编写过程中，课程组注重教材的基础性、实践性、科学性和先进性，突出“三用一

新”的特点，即实用、适用、够用和创新. 本书知识体系完整，结构严谨，内容精练，循序渐进，推理简明，通俗易懂. 本书在例题和习题的选配上，遵循由易到难的原则，同时辅以历年研究生入学考试中的经典题型，以满足不同层次学生的需求，并提供了部分习题的参考答案或提示.

与其他经济数学教材相比，本书还有如下特点.

(1) 本书在大学数学的体系、内容、方法上进行了改革. 将数学和经济紧密结合在一起，这是以往《经济数学》教材很少做过的. 为此课程组查阅了大量和经济有关的数学教材，仔细研究了宏观、微观经济学和其他经济类专业课程的教材，从中找出和微积分密切相关并且具有典型特色的经济模型和案例.

(2) 本书将数学建模思想、方法贯穿于整个课程体系之中. 我们在很多章节给出了与教材章节内容有关的数学建模案例，又在附录中对数学建模进行了专门的介绍. 通过这种方式，既可以提高读者在学习过程中的兴趣，又可以达到理论联系实际的目的，对培养读者的创新意识很有帮助.

(3) 本书注重培养学生应用所学的数学知识解决数学问题的能力，特别是将数学软件MATLAB结合具体教学内容进行讲授，包括基本使用方法，借助软件完成公式演算、数值计算、图形绘制的练习等，其目的是突出对学生建模能力的培养，提高学生的分析能力和运用数学知识解决实际问题的能力.

(4) 本书将数学文化修养提到了一个新的高度. 把数学看成是一种崭新的文化，是人类如何对待世界的一种新态度和一种新思维. 有鉴于此，本书在各章结尾附有与其内容相关的数学文化知识，包括数学史、数学家简介、数学逸事等内容，使学生真正体会到数学之美，充分展现数学课程的人文教育功能.

本书由山西大学商务学院的张杰明教授提出编写思想、提纲、列出章节目录，负责全书的策划、统稿、定稿，并且编写了第一章、第十章和附录C；景冰清副教授编写了第二章；太原工业学院的张晋珠教授编写了第三章和附录B；杨晨副教授编写了第四章；太原学院的尚肖飞副教授编写了第五章和第七章；赵转萍老师编写了第六章和附录A；张艳桃老师编写了第八章；李文姿老师编写了第九章；太原学院的赵登科副教授编写了第十一章.

在编写过程中，山西大学的郭耀鹏教授、山西财经大学的王译教授和太原理工大学的张洪斌教授都仔细审阅了本书，并提出许多宝贵的指导意见，使本书增色不少. 本书还得到山西大学商务学院的徐仲安教授、杨继平教授、石生教授的大力支持.

由于编者的水平有限，书中的缺点和错误在所难免，欢迎广大专家、同行和读者批评指正.

编　者

目 录

第一章 函 数

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中变量与变量之间依赖关系的数学描述,也是经济数学的主要研究对象.在这一章中,我们将在已有知识的基础上,进一步加深对函数概念及性质的理解和掌握,为学习本课程打下必要的理论基础.

第一节 集 合

一、集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一.研究任何对象都不可避免地用到集合,例如所有自然数的集合、一个方程根的集合、某三角形内所有点的集合、一个班全体学生的集合等.一般来说,具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**,组成集合的每一个对象称为集合的**元素**.通常以大写字母 A、B、D…表示集合,而以小写字母 a、b、x…表示集合的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$,读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;否则记作 $a\notin A$,读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.一个集合,若它只含有有限个元素,则称为**有限集**;不是有限集的集合称为**无限集**.

集合常用的表示法有 3 种:列举法、图示法和描述法.

(1) 列举法.把集合的全体元素一一列举出来表示,并用花括号括起来.

例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A,可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

由元素 1,2 组成的集合 B,可表示成

$$B=\{1,2\}.$$

注意:用列举法表示集合时,必须列出集合的所有元素,不得遗漏和重复.

(2) 图示法.以数轴或坐标系的点表示元素,用这些点所组成的区间或区域表示集合的方法.这种表示法在讨论集合关系时显得直观、形象.

(3) 描述法.若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

这里 x 所具有的性质 P,实际上就是 x 作为 M 的元素应满足的充分必要条件:符合性质 P 的任何对象都是集合 M 的元素;反之,集合 M 的元素都必须符合性质 P.

例如,设集合 C 是方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的解集,集合 C 就可表示成

$$C=\{x\mid(x-1)(x-2)=0\}.$$

而 xOy 平面上坐标满足方程 $x^2+y^2=R^2$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 M,可记作

$$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=R^2,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\in\mathbf{R}\}.$$

这个集合 M 实际上就是 xOy 平面上以点 O 为圆心、以 R 为半径的圆周上的点的全体组成的集合.

以后要用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.如果没有特别声明,以后提到的数都是在实数范围内讨论.

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,则必 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A),如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$.例如,设

$$A=\{x\mid x^2=1\},B=\{1,-1\},$$

则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,且规定空集为任何集合的**子集**.

例如,$A=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

二、集合的运算

集合的基本运算有以下几种:并、交、差、补.

设 A、B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的**并集**(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的**交集**(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

由所研究的所有对象构成的集合称为**全集**,记作 I.全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 $\overline{A}$,即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I\text{ 且 }x\notin A\}.$$

设 A、B、C 为任意 3 个集合,则下列法则成立.

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

在两个集合之间还可以定义笛卡儿乘积.

设 A、B 是任意两个集合，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合，称为 A 与 B 的笛卡儿乘积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}.$$

例如，设 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,4\}$，则

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4),(7,2),(7,4)\}.$$

三、绝对值

在研究一些问题时，我们常常要用到实数绝对值的概念.下面介绍实数绝对值的定义及性质.一个实数的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

绝对值及其运算有下列性质.

(1) $|x|\geqslant 0$.

(2) $|x|=\sqrt{x^2}$.

(3) $|-x|=|x|$.

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(5) 如果 $a>0$，则 $\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|\,-a<x<a\}$.

(6) 如果 $b>0$，则 $\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x<-b$ 或 $x>b\}$.

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$.

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，$y\neq 0$.

四、区间和邻域

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$.

数集$\{x|a<x<b\}$称为**开区间**,记作(a,b),即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.$a$ 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地,

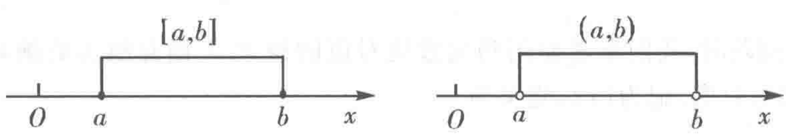
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**.数 $b-a$ 称为这些区间的长度.闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来,分别如图 1-1(a)与图 1-1(b)所示.此外,还有无限区间.引入记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示**无限区间**.例如,

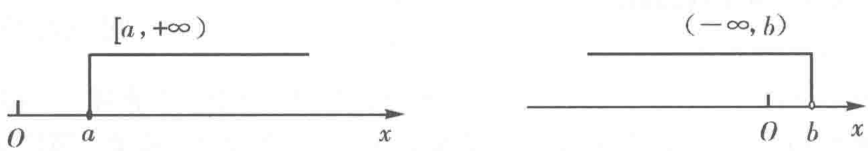
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-2(a)和图 1-2(b)所示.



(a) (b)

图 1-1



(a) (b)

图 1-2

全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简单地称它为"区间",通常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念.以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作$U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径(见图 1-3).

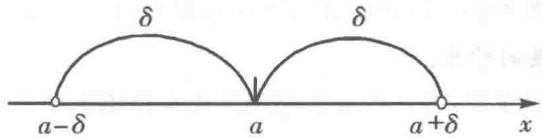


图 1-3

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离,所以 $U(a,\delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的空心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $|x-a|>0$ 表示 $x\neq a$.

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

习题 1-1

1. 用列举法表示下列集合.

(1) 方程 $x^2-3x-4=0$ 的根的集合.

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

(3) 集合 $\{x \mid |x-1|\leqslant 3$ 的整数$\}$.

2. 用描述法表示下列集合.

(1) 小于 3 的所有实数集合.

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 内部(不包含圆周)一切点的集合.

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

3. 如果全集 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,4,6\}$,求:

(1) $A\cap B$,(2) A',(3) $(A\cup B)'$,(4) $A-B$,(5) $A\cap B'$.

4. 已知 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{a,b,c\}$,求 $A\times B$.

5. 某班有学生 50 人,其中 30 人订日报,20 人订晚报,两种报纸都订的有 10 人,试用集合关系表示下列各类学生,并计算出学生的数目.

(1) 至少订一种报纸的学生.

(2) 不订报纸的学生.

(3) 只订晚报不订日报的学生.

6. 解下列不等式.

(1) $|x-2|<3$.　　(2) $0<|2x-3|<1$.

7. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来.

(1) $A=\{x\,|\,|x+1|<2\}$.　　(2) $B=\{x\,|\,1<|x-2|<3\}$.

第二节　函数的概念、性质及例题

一、函数的概念

在观察自然现象和应用技术的过程中,会遇到各种不同的量,其中有的量在这一过程中不发生变化,这种量叫作**常量**;还有一些量在这一过程中是不断变化着的,也就是可以取不同的数值,这种量叫作**变量**.

通常用字母 a、b、c 等表示常量,用字母 x、y、u 等表示变量.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值和它对应,则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的一个函数关系,称变量 y 是变量 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$.数集 D 叫作这个函数的**定义域**,x 叫作**自变量**,y 叫作**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,通过对应法则 f,与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$.当 x 取遍 D 的各个数值时,对应函数值的全体组成的数集 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可用其他字母表示,如 φ、F 等,这时函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时函数的定义域就是使算式有意义的一切实数所组成的集合,称之为函数的自然定义域.

定义域和对应法则是函数的两个要素.只要定义域相同,且 f 代表同一对应法则,则 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 就是同一个函数,而与自变量和因变量用什么字母表示无关.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值不唯一,叫作多值函数.以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

函数的表示主要有 3 种方法:表格法、图形法、解析法(公式法).

(1) 表格法.在实际应用中,把自变量的不同取值与对应的函数值列于一张表格中来表示对应法则的方法.

(2) 图形法.在坐标系中用图形来表示函数关系的方法,即坐标平面上的点集

$$M=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形(见图 1-4),图中的 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

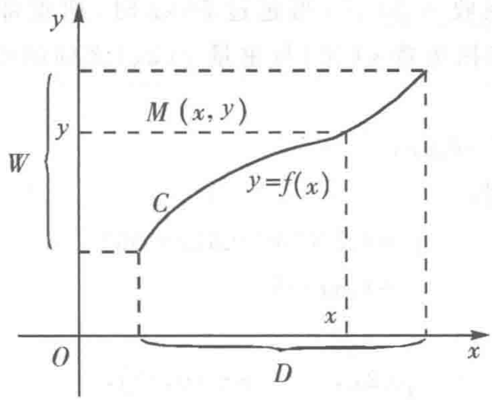


图 1-4

(3) 解析法.自变量和因变量之间的关系用数学表达式表示的方法.

例 1 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的定义域.

解 显然,其定义域为满足不等式 $x^2-3x+2>0$ 的 x 值的集合,解此不等式,得 $x<1$ 或 $x>2$,即 $f(x)$ 的定义域为

$$D=(-\infty,1)\cup(2,+\infty).$$

例 2 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,须有

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -2 \text{ 且 } x\neq\pm 1\}$.

根据函数表达式的不同形式,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1)**显函数** 函数 y 由自变量 x 的解析式直接表示,例如 $y=f(x)$,$y=x^3-1$.