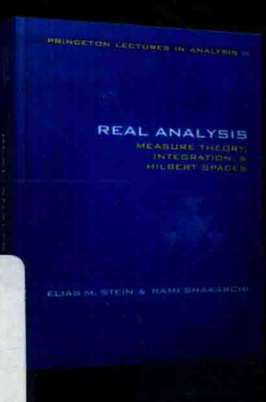
"十三五"国家重点出版物出版规划项目
世界名校名家基础教育系列
Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts
普林斯顿分析译丛

Real Analysis:
Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces

实分析

[美] 伊莱亚斯 M. 斯坦恩（Elias M. Stein）
拉米·沙卡什（Rami Shakarchi） 著
叶培新 魏秀杰 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

普林斯顿分析译丛

实 分 析

[美] 伊莱亚斯 M. 斯坦恩（Elias M. Stein）
拉米·沙卡什（Rami Shakarchi） 著

叶培新 魏秀杰 译

机 械 工 业 出 版 社

本书为普林斯顿分析译丛中的第三册实分析，内容分为测度论、积分以及希尔伯特空间三部分。第1章测度论：给出勒贝格测度的构造，进而定义了可测函数。第2章积分理论：给出勒贝格积分的定义、性质以及一些收敛定理，解决了引言中关于连续函数的极限的问题。第3章微分与积分：通过引入极大函数、有界变差函数以及绝对连续函数等概念对微分与积分的对应关系做了系统的阐述。第4章希尔伯特空间简介：在引入正交、投影等基本概念之后，讲解了希尔伯特空间与傅里叶级数以及复分析的联系。第5章希尔伯特空间：对几个重要的希尔伯特空间进行了深入的探讨。第6章抽象测度和积分理论：在一般的测度空间上建立积分理论，这使得实分析的理论变得清晰简明。第7章豪斯多夫测度和分形：介绍豪斯多夫测度与豪斯多夫维数，之后研究了填满空间的曲线。

本书可作为数学专业高年级本科生或研究生的实分析教材，同时也可作为相关科研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实分析/（美）伊莱亚斯 M. 斯坦恩（Elias M. Stein），（美）拉米·沙卡什（Rami Shakarchi）著；叶培新，魏秀杰译. —北京：机械工业出版社，2005.4

书名原文：Real Analysis：Measure Theory，Integration，and Hilbert Spaces

“十三五”国家重点出版物出版规划项目．世界名校名家基础教育系列

ISBN 978-7-111-55296-3

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①伊…　②拉…　③叶…　④魏…　Ⅲ.①实分析-高等学校-教材　Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 264133 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　李　乐
责任校对：陈延翔　封面设计：张　静
责任印制：常天培
涿州市京南印刷厂印刷
2017 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 19.25 印张 · 2 插页 · 388 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-55296-3
定价：78.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

译 者 序

本书的英文版是普林斯顿大学的分析学系列教材中的第三部。本书的第一作者是国际上享有盛誉的调和分析的领袖人物之一的伊莱亚斯 M. 斯坦恩教授，他由于在实分析上的杰出成就，特别是多个实变元的哈代空间理论的建立，于 1999 年获得沃尔夫数学奖。除了研究工作之外，斯坦恩在人才培养上也有卓越的成就。其中他的两个学生 Charles Fefferman、陶哲轩分别于 1978 年和 2006 年获数学界的最高奖——菲尔兹奖。相信由这样一位分析大师主导撰写的这部教材一定能引领读者进入博大、精美的实分析世界。

本书内容丰富，几乎涵盖了实分析的所有基本的重要题材，并且强调了分析学中的各个领域的统一与联系，在叙述方面语言也非常生动、流畅，注重循序渐进，对基本概念和基本方法的来龙去脉、后续应用、主要思想的阐述非常详尽、透彻。此外，本书还配备了大量不同层次的习题，使读者能更好地理解书中的内容，同时也培养了探索精神与创新能力。

本书是一本不可多得的实分析方面的优秀教材。译者在力求保持原著风格的基础上翻译本书，并且希望该书中文译本的出版能对我国相关专业的人才培养以及广大科学技术工作者有很好的帮助。但限于译者的水平，译文中的不妥与错误之处在所难免，恳请广大读者指正。

感谢江辉有老师对译稿的意见，同时本书的翻译得到了国家自然科学基金（项目号 11271199）的资助。

叶培新
南开大学

前　　言

从2000年春季开始，四个学期的系列课程在普林斯顿大学讲授，其目的是用统一的方法去展现分析学的核心内容。我们的目的不仅是为了生动说明存在于分析学的各个部分之间的有机统一，还是为了阐述这门学科的方法在数学其他领域和自然科学的广泛应用。本系列丛书是对讲稿的一个详细阐述。

虽然有许多优秀教材涉及我们覆盖的单个部分，但是我们的目标不同：不是以单个学科，而是以高度的互相联系来展示分析学的各种不同的子领域。总的来说，我们的观点是观察到的这些联系以及所产生的协同效应将激发读者更好地理解这门学科。记住这点，我们专注于形成该学科的主要方法和定理（有时会忽略掉更为系统的方法），并严格按照该学科发展的逻辑顺序进行。

我们将内容分成四卷，每一卷反映一个学期所包含的内容，这四卷的书名如下：

Ⅰ. 傅里叶分析导论。

Ⅱ. 复分析。

Ⅲ. 实分析：测度论、积分以及希尔伯特空间。

Ⅳ. 泛函分析：分析中的几个论题。

但是这个列表既没有完全给出分析学所展现的许多内部联系，也没有完全呈现出分析学在其他数学分支中的显著应用。下面给出几个例子：第一册中所研究的初等（有限的）Fourier级数引出了Dirichlet特征，并由此得到等差数列中有无穷多个素数；X-射线和Radon变换出现在卷Ⅰ的许多问题中，并且在卷Ⅲ中对理解二维和三维的Besicovitch型集合起着重要作用；Fatou定理断言单位圆盘上的有界解析函数的边界值存在，并且其证明依赖于前三册书中所形成的方法；在第一册中，θ函数首次出现在热方程的解中，接着第二册使用θ函数找到一个整数能表示成两个或四个数的平方和的个数，并且考虑ζ函数的解析延拓。

对于这些书以及这门课程还有几句额外的话。一学期使用48个课时，在很紧凑的时间内结束这些课程。每周习题具有不可或缺的作用，因此，练习和问题在我们的书中有同样重要的作用。每个章节后面都有一系列“练习”，有些习题简单，而有些则可能需要更多的努力才能完成。为此，我们给出了大量有用的提示来帮助读者完成大多数的习题。此外，也有许多更复杂和富于挑战的“问题”，特别是用星号*标记的问题是最难的或者超出了正文的内容范围。

尽管不同的卷之间存在大量的联系，但是我们还是提供了足够的重复内容，以便只需要前三本书的极少的预备知识：只需要熟悉分析学中初等知识，例如极限、

级数、可微函数和 Riemann 积分，还需要一些有关线性代数的知识。这使得对不同学科（如数学、物理、工程和金融）感兴趣的本科生和研究生都易于理解这套书。

我们怀着无比喜悦的心情对所有帮助本套书出版的人员表示感激。我们特别感谢参与这四门课程的学生。他们持续的兴趣、热情和奉献精神所带来的鼓励促使我们有可能完成这项工作。我们也要感谢 Adrian Banner 和 José Luis Rodrigo，因为他们在讲授这套书时给予了特殊帮助并且努力查看每个班级的学生的学习情况。此外，Adrian Banner 也对正文提出了宝贵的建议。

我们还希望特别感谢以下几个人：Charles Fefferman，他讲授第一周的课程（成功地开启了这项工作的大门）；Paul Hagelstein，他除了阅读一门课程的部分手稿，还接管了本套书的第二轮的教学工作；Daniel Levine，他在校对过程中提供了有价值的帮助。最后，我们同样感谢 Gerree Pecht，因为她很熟练地进行排版并且花了时间和精力为这些课程做准备工作，诸如幻灯片、笔记和手稿。

我们也感谢普林斯顿大学的 250 周年纪念基金和美国国家科学基金会的 VI-GRE 项目的资金支持。

伊莱亚斯 M. 斯坦恩

拉米 · 沙卡什

于普林斯顿

2002 年 8 月

在实分析这卷中，我们建立了关于测度论与积分的基本事实，这使我们重新审视和进一步发展前面几卷的几个重要的主题，进而介绍了分析学的一些相当引人入胜的其他分支。为了帮有兴趣的读者，书中还附有包含更前沿的材料，以星号 * 标注这些内容在第一次读的时候可以略去。

2004 年 11 月

目　　录

译者序

前言

引言 …… 1

1　傅里叶级数：完备化 …… 1

2　连续函数的极限 …… 2

3　曲线的长度 …… 2

4　微分与积分 …… 3

5　测度问题 …… 3

第 1 章　测度论 …… 5

1　预备知识 …… 5

2　外测度 …… 11

3　可测集与勒贝格测度 …… 15

4　可测函数 …… 23

4.1　定义与基本性质 …… 24

4.2　用简单函数或阶梯函数逼近 …… 26

4.3　李特尔伍德三大原理 …… 27

5*　Brunn-Minkowski 不等式 …… 28

6　习题 …… 30

7　问题 …… 37

第 2 章　积分理论 …… 40

1　勒贝格积分：基本性质与收敛定理 …… 40

2　可积函数空间 L^1 …… 54

3　Fubini 定理 …… 58

3.1　定理的叙述与证明 …… 59

3.2　Fubini 定理的应用 …… 62

4*　傅里叶反演公式 …… 66

5　习题 …… 69

6　问题 …… 73

第 3 章　微分与积分 …… 75

1　积分的微分 …… 75

1.1　哈代-李特尔伍德极大函数 …… 77

1.2　勒贝格微分定理 …… 79

2　好的核与恒同逼近 …… 82

3 函数的可微性 …… 86
3.1 有界变差函数 …… 87
3.2 绝对连续函数 …… 95
3.3 跳跃函数的可微性 …… 98
4 可求长曲线与等周不等式 …… 100
4.1 *曲线的闵可夫斯基容量 …… 102
4.2 *等周不等式 …… 106
5 习题 …… 108
6 问题 …… 114
第 4 章 希尔伯特空间简介 …… 117
1 希尔伯特空间 L^2 …… 117
2 希尔伯特空间 …… 121
2.1 正交性 …… 123
2.2 酉映射 …… 126
2.3 准希尔伯特空间 …… 127
3 傅里叶级数与法图定理 …… 127
3.1 法图定理 …… 129
4 闭子空间与正交投影 …… 131
5 线性变换 …… 134
5.1 线性泛函与里斯表示定理 …… 135
5.2 伴随 …… 136
5.3 例子 …… 138
6 紧算子 …… 140
7 习题 …… 144
8 问题 …… 150
第 5 章 希尔伯特空间：几个例子 …… 155
1 L^2 上的傅里叶变换 …… 155
2 关于上半平面的哈代空间 …… 159
3 常系数偏微分方程 …… 165
3.1 弱解 …… 166
3.2 主要定理和关键估计 …… 168
4* 狄利克雷原理 …… 171
4.1 调和函数 …… 174
4.2 边值问题和狄利克雷原理 …… 180
5 习题 …… 187
6 问题 …… 192
第 6 章 抽象测度和积分理论 …… 195
1 抽象测度空间 …… 195
1.1 外测度与卡拉泰奥多里定理 …… 196
1.2 度量外测度 …… 198

1.3 延拓定理 …… 201
2 测度空间上的积分 …… 203
3 例子 …… 205
3.1 乘积测度和一般的 Fubini 定理 …… 205
3.2 极坐标的积分公式 …… 207
3.3 R 上的博雷尔测度和勒贝格-斯蒂尔切斯积分 …… 208
4 测度的绝对连续性 …… 212
4.1 带号测度 …… 212
4.2 绝对连续性 …… 213
5* 遍历定理 …… 216
5.1 平均遍历定理 …… 218
5.2 极大遍历定理 …… 219
5.3 逐点遍历定理 …… 222
5.4 遍历保测变换 …… 224
6* 附录：谱定理 …… 227
6.1 定理的叙述 …… 227
6.2 正算子 …… 228
6.3 定理的证明 …… 230
6.4 谱 …… 232
7 习题 …… 233
8 问题 …… 239
第 7 章 豪斯多夫测度和分形 …… 243
1 豪斯多夫测度 …… 244
2 豪斯多夫维数 …… 248
2.1 例子 …… 248
2.2 自相似 …… 255
3 空间填充曲线 …… 261
3.1 四次区间和二进正方形 …… 262
3.2 二进对应 …… 264
3.3 佩亚诺映射的构造 …… 266
4* Besicovitch 集和正则性 …… 269
4.1 拉东变换 …… 271
4.2 当 $d \geqslant 3$ 时集合的正则性 …… 276
4.3 Besicovitch 集有维数 2 …… 277
4.4 Besicovitch 集的构造 …… 279
5 习题 …… 284
6 问题 …… 288
注记和参考 …… 291
符号索引 …… 293
参考文献 …… 296

引　言

> 我怀着惊恐的心情转身离开并对没有导数的函数这个令人痛惜的祸害感到厌恶。
>
> C. Hermite，1893

1870 年分析学概念框架的革命性变革开始成型，这最终导致了对那些诸如函数等的基本对象，以及对诸如连续性、可微性和可积性的那些概念的理解的重大变革和推广。

早先的观点认为分析学中的相关函数由公式或其他“解析”表达式给出，这些函数具有连续性（或接近于连续），并且在大多数点有导数，此外它们用被接受的积分方法可积。所有这些思想开始让位于这个学科所产生的多个例子与问题的重压之下，这些例子与问题不容忽视且理解它们需要有新的概念。与这些发展相平行的是更几何化的或更抽象的，从而新的认识立即产生了：更为清晰地了解曲线的性质，它们的可求长性与延拓；始于直线、平面的子集等，以及赋予每个子集的测度的集合论的兴起。

这并不是说这些进展所要求的观念的改变没有受到相当的抵制。矛盾的是，一些那个时代的领袖数学家，即那些最有可能理解新的方法与理念的人却是最持怀疑态度的。到现在许多问题被解决了，我们才知道新思想最终胜出了。我们将在这里从某种程度上来说不严格地描述几个最有意义的问题。

1　傅里叶级数：完备化

只要 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的［黎曼（Riemann）］可积函数，就能定义它的傅里叶（Fourier）级数为 $f\sim\sum a_n e^{inx}$，这里

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx,\tag{1}$$

且有帕塞瓦（Parseval）等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx。$$

然而当限制在黎曼可积函数时以上的函数与它们的傅里叶系数之间的关系不是

完全对应的。因此，若我们考虑具有平方范数的这样的函数所构成空间 **R**，以及平方范数的空间 $l^2(\mathbf{Z})$[㊀]，对 **R** 中的每个元素 f 赋予 $l^2(\mathbf{Z})$ 的一个对应元素 $\{a_n\}$，两个范数是相同的。然而，容易构造出 $l^2(\mathbf{Z})$ 的元素在 **R** 中没有对应的函数[㊁]。注意到空间 $l^2(\mathbf{Z})$ 是完备的，而 **R** 不是。因此我们有如下两个问题：

（ⅰ）当我们完备化 **R** 时，这些假定存在的"函数" f 是什么？换句话说：给定任意序列 $\{a_n\}\in l^2(\mathbf{Z})$ 对应于这些系数的（假定的）函数 f 的性质是什么？

（ⅱ）如何对这样的函数 f 积分（特别地，如何证明式（1））？

2　连续函数的极限

假定 $\{f_n\}$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数列。假设对每个 x，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 存在，且探求极限函数 f 的性质。

若我们假定收敛是一致的，则显然 f 处处连续。然而一旦去掉一致收敛的假设，事情可能就会急剧变化且一些十分微妙的问题就产生了。人们可以构造一个连续函数序列 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f 使得

（a）对所有 x，$0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$。

（b）当 $n\to\infty$ 时，序列 $f_n(x)$ 单调递减。

（c）极限函数 f[㊂] 不是黎曼可积的。

然而，根据（a）和（b），序列 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于一个极限。那么人们自然要问：使用何种积分能够使得对 f 积分后得到

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\ ?$$

使用勒贝格（Lebesgue）积分我们能够解决这个问题以及前一个问题。

3　曲线的长度

当人们学习微积分时，首先要处理的问题是平面上曲线的长度的计算。假定我们考虑平面上的一条连续曲线 Γ，该曲线由参数形式 $\Gamma=(x(t),y(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$ 给出，其中 x 和 y 是 t 的连续函数。按通常的方法定义 Γ 的长度：按 t 递增的顺序依次连接 Γ 上有限多个点的折线长度的上确界。若曲线 Γ 的长度 L 有限，则称该曲线为可求长的。当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 连续可微时，我们有熟知的公式

$$L=\int_a^b\left((x'(t))^2+(y'(t))^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t。\tag{2}$$

当我们考虑一般的曲线时，问题就产生了。更具体地，我们有以下问题：

㊀　我们用书 I 第 3 章的记号。

㊁　见书 I 第 3 章的第 1 节　围绕定理 1.1 的讨论。

㊂　极限 f 可能高度不连续。例如，见第 1 章习题 10。

（ⅰ）为保证 Γ 的可求长对函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 必须施加什么条件?

（ⅱ）当这些条件满足时，式（2）是否成立?

第一个问题用“有界变差”函数的概念可以完全回答。关于第二个问题，当 x 和 y 都是有界变差函数，积分式（2）总是有意义的；然而，在一般情形下等式不成立，但适当地重新参数化曲线 Γ 可以重新建立该等式。

进一步的问题产生了。对于可求长曲线，因为它们被赋予长度，本质上是一维的，是否有二维的（不可求长）曲线？我们将看到确实存在填满正方形的平面连续曲线。更一般的，若适当地定义分数维数的概念，则我们有一维到二维之间的任何维数的曲线。

4 微分与积分

“微积分学的基本定理”表明了微分和积分是互逆运算这一事实。它可用两种方式叙述。我们简述如下：

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=f(x)。 \tag{4}$$

对于第一个断言，存在无处可微的连续函数 F，或者对每个 x，$F'(x)$ 存在，但 F' 不可积，导致了找到 F 所属的广泛的函数类使得式（3）正确的问题。关于式（4），问题是如何适当地对产生于以上考虑的前两个问题的解的可积函数 f 所成的广泛类叙述与建立这个断言。这些问题在借助于某些“覆盖”论证以及绝对连续的概念后可获得解答。

5 测度问题

为使得事情更为明朗，也为了尽量回答以上所有的问题，就必须理解一个基本问题，即测度问题。这个问题的二维情形可（不太严格地）叙述如下：赋予 $\mathbf{R}^2$ 的每个子集 E 一个二维测度 $m_2(E)$，即它的“面积”，推广定义在基本集上的标准概念。让我们在一维情形更为准确地叙述类似的问题，构造一维测度 $m_1=m$，将 $\mathbf{R}$ 中长度的概念推广。

我们寻找定义在 $\mathbf{R}$ 上的子集 E 所成的族的非负函数 m，并允许这个函数取扩充值，即取到 $+\infty$ 值。我们要求：

(a) 若 E 是长度为 $b-a$ 的区间 $[a,b]$，则 $m(E)=b-a$。

(b) 只要 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 且集合 E_n 不相交，就有 $m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)$。

条件（b）是测度 m 的“可数可加性”。它蕴含特殊情形：

(b′) 若 E_1 和 E_2 不相交，则 $m(E_1 \bigcup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$。

然而，为运用在理论中产生的许多极限论证，一般情形（b）是不可或缺的，仅有（b′）本身肯定是不够的。

为使（a）和（b）公理化，人们增加了 m 的平移不变性，即

(c) 对每个 $h \in \mathbf{R}$，$m(E+h) = m(E)$。

该理论的一个基本结果是，当人们限定在考虑一类“可测”的合理的集合时，这个集合类在可数并、交和补运算下封闭且包含开集、闭集等时，这样的测度是存在且唯一的，它就是勒贝格[⊖]测度。

有了这个测度的构造我们就可以开始继续研究。自此积分的一般理论相继产生，特别地，以上讨论的问题就得到了解决。

年表

我们列出这一学科早期发展中的一些标志性事件以结束引言部分。

1872，魏尔斯特拉斯（Weierstrass）关于无处可微函数的构造。

1881，若尔当（Jordan）引入有界变差函数且在稍后 1887 年给出与可求长性的联系。

1883，康托尔（Cantor）提出三分集。

1890，佩亚诺（Peano）关于填满空间的曲线的构造。

1898，博雷尔（Borel）提出可测集。

1902，勒贝格的测度与积分理论。

1905，Vitali 的不可测集的构造。

1906，法图（Fatou）将勒贝格理论应用于复分析。

⊖ 由于不可测集的存在性，故不存在定义在所有子集形成的集类上的这样的测度。不可测集的构造见第 1 章第 3 节的末尾。

第1章 测 度 论

> 对那些根据先前的思想可以定义测度的集合我们称之为可测集；我们这样做并不意味着不可能对其他集合赋予一个测度。
>
> E. Borel, 1898

本章的内容是关于 $\mathbf{R}^d$ 中的勒贝格测度的构造以及相应可测函数类的研究。在给出一些预备知识之后我们转向第一个重要定义，$\mathbf{R}^d$ 的任意子集 E 的外测度。这通过覆盖 E 的方体的逼近给出。有了这一概念我们就能够定义可测性，且能够将所研究的范围限定在那些可测的集合上。接着我们得到基本结果：可测集簇对补和可数并运算是封闭的，并且若并中的子集是不相交的，则测度是可加的。

可测函数的概念是伴随可测集的思想产生的。它与可测集的关系如同连续函数与开（或闭）集的关系一样。但它有一个重要的优越性，即可测函数类在逐点极限下是封闭的。

1 预备知识

我们首先讨论一些基本概念，这些概念是下面建立的理论的基础。

计算 $\mathbf{R}^d$ 的一个子集的“体积”或“测度”的主要思想是用其他的形状简单且体积已知的并集逼近该集。当指的是 $\mathbf{R}^d$ 中的集合时也可说成“体积”是方便的。但实际上在 $d=2$ 的情形指的是“面积”而 $d=1$ 的情形指的是“长度”。在这里，我们使用矩形或方体作为该理论的基石：在 $\mathbf{R}$ 上我们用区间，在 $\mathbf{R}^d$ 上取区间的乘积。所有维数的矩形容易处理且用所有边长的乘积给出标准的体积的概念。

接着我们证明两个突出这些矩形在开集的几何性质的研究中的重要性的简单定理：在 $\mathbf{R}$ 上每个开集是可数个不相交开区间的并，在 $\mathbf{R}^d$ 上，$d \geqslant 2$，每个开集是“几乎”不相交的闭方体的并，即这些方体只有边界可以重叠。这两个定理引发了稍后给出的外测度的定义。

我们采用以下标准记号。点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^d$ 由 d 元实数组构成

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d),x_i \in \mathbf{R},i=1,2,\cdots,d。$$

点的相加是分量式的，数乘也如此。$\boldsymbol{x}$ 的范数记为 $|\boldsymbol{x}|$，它有如下的标准欧氏范数定义：

$$|\boldsymbol{x}|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2)^{1/2}。$$

两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离因此可简单记为 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$。

$\mathbf{R}^d$ 中的集合 E 的补集记为 E^c，它定义为

$$E^c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d:\boldsymbol{x}\notin E\}。$$

若 E 和 F 是 $\mathbf{R}^d$ 的两个子集，我们记 F 在 E 中的补集为

$$E-F=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d:\boldsymbol{x}\in E \text{ 且 } \boldsymbol{x}\notin F\}。$$

两个集合 E 和 F 的距离定义为

$$d(E,F)=\inf|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|。$$

其中下确界对所有 $\boldsymbol{x}\in E$ 与 $\boldsymbol{y}\in F$ 取值。

开集、闭集和紧集

$\mathbf{R}^d$ 中的以 $\boldsymbol{x}$ 为中心、r 为半径的开球定义为

$$B_r(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^d:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\}。$$

对于 $\mathbf{R}^d$ 的子集 E，若对每个 $\boldsymbol{x}\in E$ 存在 $r>0$ 使得 $B_r(\boldsymbol{x})\subset E$，则称 E 为开集。根据该定义，对于一个集合，若它的补集是开集，则它是闭集。

我们注意到任意（不必可数）开集的并是开集。然而一般仅是有限个开集的交是开集。若我们互换并与交的角色，类似的陈述对闭集类也成立。

对一个集合 E，若它包含于某个半径有限的球，则称它有界。有界闭集称为紧集。紧集具有 Heine-Borel 覆盖性质：

- 假设 E 是紧集，$E\subset\bigcup_{\alpha}\mathcal{O}_\alpha$，且每个 $\mathcal{O}_\alpha$ 是开集，则存在有限多个开集，$\mathcal{O}_{\alpha_1}$，$\mathcal{O}_{\alpha_2},\cdots,\mathcal{O}_{\alpha_N}$ 使得 $E\subset\bigcup_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\alpha_j}$。

用文字叙述为，紧集的任何一个用开集的覆盖包含一个有限子覆盖。

E 是一个集合，$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的点，若对每个 $r>0$，球 $B_r(\boldsymbol{x})$ 包含 E 的点，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的极限点。这意味着 E 中存在任意靠近 $\boldsymbol{x}$ 的点。对于属于 E 的点 $\boldsymbol{x}$，若存在 $r>0$ 使得 $B_r(\boldsymbol{x})\cap E=\{\boldsymbol{x}\}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的孤立点。

对于属于 E 的点 $\boldsymbol{x}$，若存在 $r>0$ 使得 $B_r(\boldsymbol{x})\subset E$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 E 的内点。所有内点的集合称为 E 的内部。E 的闭包 $\overline{E}$ 由 E 和它的极限点组成。E 的边界，记为 ∂E，是由在 E 的闭包但不在 E 的内部的点组成的集合。

注意到一个集合的闭包是一个闭集；E 的每一个点是 E 的极限点；一个集合是闭集当且仅当它包含它的所有极限点。最后，对于一个闭集 E，若它没有任何孤立点，则称它是完美的。

矩形和方体

$\mathbf{R}^d$ 中的一个（闭）矩形 $\mathbf{R}$ 由 d 个一维的闭有界区间的乘积给出

$$R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d],$$

其中 $a_j \leqslant b_j$ 是实数，$j=1,2,\cdots,d$。换句话说，我们有

$$R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in \mathbf{R}^d:$$
$$a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\text{对所有 } j=1,2,\cdots\}。$$

在此说明一下，根据定义，一个矩形是闭的且边平行于坐标轴。在 $\mathbf{R}$ 上，矩形就退化成了有界闭区间，而在 $\mathbf{R}^2$ 上它们通常是矩形。在 $\mathbf{R}^3$ 上，它们是闭的平行六面体。如图 1 所示。我们说矩形 R 的边长为 $b_1-a_1,b_2-a_2,\cdots,b_d-a_d$。矩形 R 的体积表示为 $|R|$，且定义为

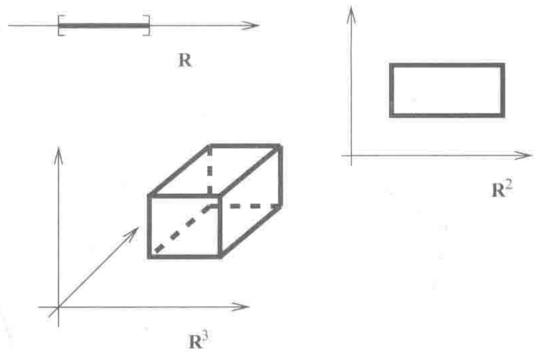


图 1　$\mathbf{R}^d$ 中的矩形，$d=1，2，3$

$$|R|=(b_1-a_1)\cdots(b_d-a_d)。$$

当然，当 $d=1$ 时，“体积”等于长度；当 $d=2$ 时，它等于面积。

开矩形是开区间的乘积，矩形 R 的内部是

$$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_d,b_d)。$$

方体是所有边 $b_1-a_1=b_2-a_2=\cdots=b_d-a_d$ 的矩形。因此，若 $Q\subset \mathbf{R}^d$ 是一个所有边长为 l 的方体，则 $|Q|=l^d$。

对于若干个矩形的并集，若这些矩形的内部不相交，则我们称这个并集为几乎不交。

在本章中，由于矩形或方体的覆盖扮演了主要的角色，因而这里我们单独给出两个重要引理。

引理 1.1　若一个矩形 是有限多个其他几乎不相交矩形的并，比如说 $R=\bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$，则

$$|R|=\sum_{k=1}^{N}|R_k|。$$

证　我们考虑将所有矩形 $R_1,R_2,\cdots,R_N$ 的边无限延拓所形成的网格。这样做会得到有限多个矩形，以及 1 到 M 之间的整数的一个分划 $J_1,J_2,\cdots,J_N$，使得并

$$R=\bigcup_{j=1}^{M}\tilde{R}_j \text{与 } R_k=\bigcup_{j\in J_k}\tilde{R}_j,k=1,2,\cdots,N$$

几乎不相交。(见图 2 的说明)

对于矩形 R，我们看到 $|R|=\sum\limits_{j=1}^{M}|\tilde{R}_j|$，这是由于这些网格实际上分割了 R 的

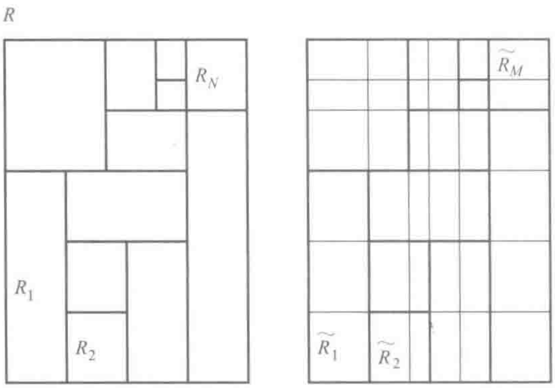


图 2　由矩形 Rk 形成的网格

边，且每个$\tilde{R}_j$由这些分割所得到的区间的乘积组成。因此当把这些$\tilde{R}_j$的体积相加时，我们实际上是对由此产生的区间的长度的乘积求和。由于这对其他矩形 R_1, $R_2,\cdots,R_N$ 也成立，我们得出

$$|R|=\sum_{j=1}^{M}|\tilde{R}_j|=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j\in J_k}|\tilde{R}_j|=\sum_{k=1}^{N}|R_k|。$$

将以上论证稍做修正就可得到下面的结果：

引理 1.2　若 $R,R_1,R_2,\cdots,R_N$ 是矩形，且 $R\subset\bigcup_{k=1}^{N}R_k$，则

$$|R|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|R_k|。$$

主要思想取延拓 $R,R_1,R_2,\cdots,R_N$ 这些矩形的边所形成的网格，且注意到对应于 J_k（以上证明中的）的集合不再需要不相交。

我们现在用方体来给出开集结构的一个描述。我们从 $\mathbf{R}$ 的情形开始。

定理 1.3　$\mathbf{R}$ 的每个开子集 O 可唯一地写为可数个不相交的开区间的并。

证　对每个 $x\in O$，令 I_x 表示包含 x 且包含于 O 的最大开区间。更确切地，由于 O 是开的，x 包含在某个（非平凡的）小区间内，所以若

$$a_x=\inf\{a<x:(a,x)\subset O\}\text{ 与 }b_x=\sup\{b>x:(x,b)\subset O\},$$

那么我们必须有 $a_x<x<b_x$（a_x 和 b_x 可能是无穷值）。现在若令 $I_x=(a_x,b_x)$，则根据构造我们有 $x\in I_x$ 且 $I_x\subset O$。因此

$$O=\bigcup_{x\in O}I_x。$$

现在假定区间 I_x 与 I_y 相交，则它们的并（也是一个开区间）包含于 O 且包含 x。由于 I_x 是最大的，我们必须有$(I_x\cup I_y)\subset I_x$，类似地，$(I_x\cup I_y)\subset I_y$。这当且仅当 $I_x=I_y$ 成立；因此集簇 $\mathcal{I}=\{I_x\}_{x\in O}$里的任何两个不同的区间必须不相交。一旦我们能证明集簇 $\mathcal{I}$ 里仅有可数多个不同区间，我们就完成了该定理的证明。然而，