高等学校教材

应用随机过程

浙江大学 张帼奋 赵敏智 编

高等教育出版社

高等学校教材

应用随机过程

Yingyong Suiji Guocheng

浙江大学　张帼奋　赵敏智　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是随机过程的入门教材，全书共分五章，着重介绍第二至五章，内容包括概率论的预备知识、随机过程基本概念、马尔可夫链、泊松过程与布朗运动以及平稳过程。除第一章外，后面各章都配备了思考题，便于读者对该章内容进行更清晰的梳理。本书内容由浅入深，例题典型新颖，注重随机过程的应用。

本书可作为非数学类专业学生的教材，也可供其他科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/张帼奋，赵敏智编.--北京：高等教育出版社，2017.4

ISBN 978-7-04-047095-6

Ⅰ.①应… Ⅱ.①张… ②赵… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第321550号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 王 琰　版式设计 童 丹
插图绘制 黄云燕　责任校对 殷 然　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	8.5		
字　数	150千字	版　次	2017年4月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2017年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	16.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 47095-00

前　言

本书是随机过程的入门教材，只要有概率论基础，又对随机过程感兴趣，就可以通过学习本书获得一定的随机过程知识。基于这个出发点，我们主要介绍了随机过程中最基本、应用最广泛的内容：马尔可夫链、泊松过程、布朗运动以及平稳过程。全书的内容是这样安排的：第一章作为预备知识，主要是回顾概率论的基本知识；第二章介绍随机过程的定义、分布及数字特征；第三章介绍马尔可夫链的定义、状态的分类、平稳分布、吸收概率与平均吸收时间；第四章主要描述了泊松过程与布朗运动的基本特征；第五章介绍平稳过程的定义及其相关性质。除第一章外，后面各章都配备思考题，便于读者对该章内容进行更清晰的梳理。

本书内容由浅入深，例题和习题都尽可能贴近生活且兼顾趣味性，从而帮助读者更好地理解随机过程的概率直观和实际应用。此外，我们还把随机过程的一些模拟结果做成了二维码，以期让读者更直观地了解随机过程的变化规律。书后的附录介绍了马尔可夫链、泊松过程和布朗运动的模拟算法以及在 R 软件上的编程实现。

本书是在《概率论、数理统计与随机过程》（2011 年出版）基础上修订完成的，采用本书进行教学约需 24 学时。

我们非常感谢对本书提出很多有益建议的审稿人，在改进本书的过程中，他们的意见发挥了重大的作用；我们也衷心感谢高等教育出版社的胡颖女士，她为本书的顺利出版提供了很多帮助。

由于编者水平有限，书中还有许多不足之处，恳请各位同行、专家及广大读者朋友批评指正。

编　者

2017.1

目　　录

第一章 预备知识

§1.1 随机变量及其分布

由随机试验所有可能结果构成的集合称为**样本空间**,用 S 表示. 定义在样本空间 S 上的实值单值函数 X 称为**随机变量**. 函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$ 称为随机变量 X 的**分布函数**.

若随机变量 X 的所有可能取值是有限个或可列个,则称 X 为**离散型随机变量**.

设随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,\cdots,x_n,\cdots$,则 $P(X=x_k)=p_k,k=1,2,\cdots$ 称为离散型随机变量 X 的**分布律**或**分布列**,也可以用表 1.1 表示.

表 1.1 离散型随机变量分布律表

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布律性质:(1) $p_i\geqslant 0$;(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$.

对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,若存在非负函数 $f(x)$,使得对于任意实数 x,有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称 X 为**连续型随机变量**,其中 $f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**,简称**密度函数**或**概率密度**.

密度函数性质:

(1) $f(x)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$;

(3) 在 $f(x)$ 的连续点 x 处,$F'(x)=f(x)$;

(4) 对于任意实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,有

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

常用的随机变量的分布见附表 1.

特别地，当 $X\sim U(a,b)$ 时，对 (a,b) 的子区间 (c,d)，有

$$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a}.$$

当 $X\sim N(0,1)$ 时，分布函数 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 可以通过查附表 2 或利用 Excel 表得到，而且 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，$P(X\leqslant x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

§1.2 多元随机变量及其分布

1.2.1 n 元随机变量及其分布函数

给定样本空间 S，如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是随机变量，那么称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 **n 元随机变量**，称 n 元函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)$ 为 n 元随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**分布函数**.

设二元随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则 X 的**边际分布函数**

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=F(x,\infty).$$

同理，Y 的**边际分布函数**

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=F(\infty,y).$$

若对于任意实数 x,y，

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 与 Y **相互独立**.

对于 x，若 $P(X=x)>0$，则

$$F_{Y|X}(y|x)=P(Y\leqslant y|X=x)$$

称为在 $\{X=x\}$ 条件下 Y 的**条件分布函数**；若 $P(X=x)=0$，且对所有 $\varepsilon>0$，有 $P(x-\varepsilon<X<x+\varepsilon)>0$，则 Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P(Y\leqslant y|x-\varepsilon<X<x+\varepsilon).$$

1.2.2 二元离散型随机变量

如果 (X,Y) 的取值只有有限对或可列无限对，称 (X,Y) 为**离散型随机变量**.

设(X,Y)的取值为(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，称

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为(X,Y)的**联合分布律**.

联合分布律的性质：(1) $p_{ij}\geqslant 0,i,j=1,2,\cdots$；(2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=1$.

设(X,Y)的联合分布律为$p_{ij},i,j=1,2,\cdots$，则X,Y的**边际分布律**或**边缘分布律**分别为

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\xlongequal{\text{def}}p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\xlongequal{\text{def}}p_{\cdot j},\quad j=1,2,\cdots,$$

如表 1.2 所示.

表 1.2 (X,Y)的联合分布律与边际分布律表

		Y					$P(X=x_i)$
		y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	
X	x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
	x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$		$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

若$P(X=x_i)=p_{i\cdot}>0$，则当$\{X=x_i\}$时Y的**条件分布律**为

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots.$$

若$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$，则当$\{Y=y_j\}$时X的**条件分布律**为

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots.$$

随机变量X与Y**相互独立**当且仅当对于任意的(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j).$$

1.2.3 二元连续型随机变量

设(X,Y)是二元随机变量,联合分布函数为$F(x,y)$,若存在二元非负函数$f(x,y)$,使得对于任意实数x和y,有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X,Y)是**二元连续型随机变量**,$f(x,y)$称为(X,Y)的**联合概率密度函数**,简称**联合密度函数**.

联合密度函数的性质:

(1) $f(x,y)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$;

(3) $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(4) $f(x,y)$的连续点(x,y)处,$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

设随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,则X,Y的**边际密度函数**分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

当$f_Y(y)\neq 0$时,在$\{Y=y\}$条件下X的**条件密度函数**为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)};$$

当$f_X(x)\neq 0$时,在$\{X=x\}$条件下Y的**条件密度函数**为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

设随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$,X与Y的边际密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$,则X与Y**相互独立**当且仅当$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上除去面积为零的区域外处处成立.

1.2.4 二元随机变量常见分布

(1) 二元均匀分布

设D是二维有界区域,称随机变量(X,Y)在D上服从**均匀分布**,如果(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(D\text{ 的面积})^{-1}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

若 $G\subset D$,则 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{G\text{ 的面积}}{D\text{ 的面积}}$.

(2) 二元正态分布

设二元随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中,$-\infty<\mu_1,\mu_2<\infty$,$\sigma_1,\sigma_2>0$,$-1<\rho<1$,称$(X,Y)$服从**二元正态分布**,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

n 元正态分布性质:

(1) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 元正态分布,则它的任意 k 元$(k=1,2,\cdots,n)$分量$(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})$服从正态分布. 特别地,每一个分量 X_i 都服从正态分布. 反之,若 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$都服从正态分布,且相互独立,则$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从正态分布.

(2) $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 元正态分布的充要条件是它的 n 个分量的任意线性组合(不为零)均服从一元正态分布.

(3) 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 元正态分布,设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 都是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性组合,则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$也服从正态分布.

(4) 若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 元正态分布,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立当且仅当它们两两不相关.

§1.3 随机变量的数字特征

1.3.1 数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<\infty$,则称 X 的数学期望存在,**数学期望**

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x<\infty$，则称 X 的数学期望存在，**数学期望**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x.$$

设 $Y=g(X)$. 当离散型随机变量 X 具有分布律 $P(X=x_k)=p_k,k=1,2,\cdots$ 时，若 $\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k<\infty$，则 Y 的数学期望存在，且

$$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k;$$

当连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ 时，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)\mathrm{d}x<\infty$，则 Y 的数学期望存在，且

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $Z=h(X,Y)$. 当离散型随机变量 (X,Y) 具有联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$ 时，若 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|h(x_i,y_j)|p_{ij}<\infty$，则 Z 的数学期望存在，且

$$E(Z)=E(h(X,Y))=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)p_{ij};$$

当连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$ 时，若 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h(x,y)|f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，则 Z 的数学期望存在，且

$$E(Z)=E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若 $Y=X^k,k=1,2,\cdots$ 的数学期望存在，则称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶(原点)矩；若 $E[(X-E(X))^k]$ 存在，则称它为 X 的 **k 阶中心矩**.

数学期望的性质：

(1) 线性性：$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$；

(2) 若 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$；

(3) 马尔可夫不等式：若 $E(|X|^k)$ 存在，则对于 $\varepsilon>0$，$P(|X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$.

1.3.2 方差

二阶中心矩 $E[(X-E(X))^2]$ 也被称为**方差**,记为 $D(X)$. 称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为**标准差**或**均方差**.

方差的计算公式:

$$D(X)=E[(X-E(X))^2]=E(X^2)-(E(X))^2.$$

方差的性质:

(1) $D(aX+c)=a^2D(X)$;

(2) $D(X)=0$ 当且仅当 $P(X=c)=1$,这里 $c=E(X)$;

(3) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$,

特别地,当 X 与 Y 相互独立时,$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;

(4) 切比雪夫不等式:对于 $\varepsilon>0$, $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

1.3.3 协方差与相关系数

随机变量 X 与 Y 的**协方差**定义为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

协方差的计算公式:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

随机变量 X 与 Y 的**相关系数**定义为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

协方差的性质:

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $D(X)=\mathrm{Cov}(X,X)$;

(3) $\mathrm{Cov}(aX_1+bX_2+c,Y)=a\mathrm{Cov}(X_1,Y)+b\mathrm{Cov}(X_2,Y)$,

$\mathrm{Cov}(aX+bY,cX+dY)=acD(X)+(ad+bc)\mathrm{Cov}(X,Y)+bdD(Y)$,

$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)+b^2D(Y)$.

相关系数的性质:

(1) $-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant1$;

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 当且仅当存在 $a,b\neq0$,使得 $P(Y=a+bX)=1$.

相关系数反映了 Y 与 X 线性关系的密切程度:$|\rho_{XY}|$ 越接近 1,Y 与 X 线性关

系的程度越密切,当$|\rho_{XY}|=1$时,Y与X以概率1存在线性关系;$|\rho_{XY}|$越接近0,Y与X线性关系的程度越不密切,特别地,当$\rho_{XY}=0$时,称Y与X不相关或零相关. 而当$\rho_{XY}>0(<0)$时,称Y与X正(负)相关. 若X与Y相互独立,则X与Y不相关;但反之不一定成立.

§1.4 极限定理

1.4.1 大数定律

设$Y_1,\cdots,Y_n,\cdots$是一随机变量序列,若存在常数c,使得对于任给的$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-c|\geqslant\varepsilon)=0,$$

等价于

$$\lim_{n\to\infty}P(|Y_n-c|<\varepsilon)=1,$$

则称$\{Y_n\}$**依概率收敛到**c,记为$Y_n\xrightarrow{P}c$.

依概率收敛性质:

(1) 若$Y_n\xrightarrow{P}c$,$g(x)$在c点连续,则$g(Y_n)\xrightarrow{P}g(c)$;

(2) 若$Y_n\xrightarrow{P}c$,$Z_n\xrightarrow{P}d$,$g(x,y)$在(c,d)点连续,则$g(Y_n,Z_n)\xrightarrow{P}g(c,d)$.

切比雪夫大数定律 设$X_1,\cdots,X_n$相互独立,$E(X_i)=\mu$,$D(X_i)=\sigma^2$,$i=1,\cdots,n$,则当$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$.

辛钦大数定律 设$X_1,\cdots,X_n$独立同分布,$E(X_1)=\mu$,则当$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$.

1.4.2 中心极限定理

独立同分布中心极限定理 设$X_1,\cdots,X_n$独立同分布,数学期望$E(X_1)=\mu$,方差$D(X_1)=\sigma^2$,则当$n\to\infty$时,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

即当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$.

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理 设 n_A 为 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，p 为事件 A 在每次试验中发生的概率($0<p<1$)，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

即当 n 充分大时，$n_A \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$.

第二章 随机过程基本概念

在自然界和现实生活中，存在着一些随时间演变的随机现象，比如降雨量的变化、股票价格的波动、保险公司理赔人数的变化、人的一生中身高的变化等. 随机过程就是研究这些随时间演化的随机现象. 例如，考虑某大学食堂一天中就餐人数的变化，假设食堂每天早上 6:00 开门，晚上 10:00 关门，对任何$6\leqslant t\leqslant 22$，以 $X(t)$ 表示 t 时刻食堂就餐人数，则 $X(t)$ 是一个随机变量. 而就餐人数随时间变化而变化，一般 7:00—8:00，11:00—12:30，17:00—19:00 是就餐高峰时期. 所以对不同的 t，随机变量 $X(t)$ 也可能不同. 于是$\{X(t);6\leqslant t\leqslant 22\}$就是一个随机过程. 它牵涉无穷多个随机变量. 任取一天，观察这一天就餐人数的变化，对所有的 $6\leqslant t\leqslant 22$，把 t 时刻就餐的人数记录下来，就是对随机过程$\{X(t);6\leqslant t\leqslant 22\}$进行了一次随机试验. 根据观察到的结果可得到 t 的某个函数 $x(t)$，$6\leqslant t\leqslant 22$，这个函数被称为随机过程的一个样本函数（或样本轨道），或说是对随机过程的一次实现.

随机过程是概率论的“动力学”部分. 这一学科最早源于对物理学的研究，如吉布斯（Gibbs）、玻尔兹曼（Boltzmann）、庞加莱（Poincaré）等人对统计力学的研究. 1907 年，马尔可夫（Markov）在研究相依随机变量序列时，提出了现今称之为马尔可夫链的概念；1931 年，柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）发表了《概率论的解析方法》，奠定了马尔可夫过程的理论基础；1934 年，辛钦（Khinchin）发表了《平稳过程的相关理论》；从 1938 年开始，莱维（Lévy）系统深入地研究了布朗运动（Brownian motion），1948 年，他出版了著作《随机过程与布朗运动》. 现代随机过程论的另外两个代表人物是杜布（Doob）和伊藤（Itô），前者创立了鞅论，后者创立了布朗运动的随机积分理论.

随机过程可以按照它本身的统计特性分成很多类，比如马尔可夫过程、更新过程、高斯过程、平稳过程、鞅等. 随机过程在现实生活中被广泛应用，泊松过程、布朗运动、马尔可夫链等都是重要的随机过程，它们常被用来作为排队论、保险、金融和经济的模型，如经典的布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）模型就是假设股票价格服从几何布朗运动的. 在天气预报、统计物理、天体物理、运筹决策、人口理论、可靠性及计算机科学等很多领域都要经常用到随机过程的理论来建立数学模型.

§2.1 定义和例子

定义 2.1.1 设 S 是样本空间,P 是概率,$T\subset\mathbf{R}$,如果对任何 $t\in T$,$X(t)$ 是 S 上的随机变量,则称 $\{X(t);t\in T\}$ 是 S 上的**随机过程(stochastic process)**,T 称为**参数集**.

用映射来表示:

$$X(t,e):T\times S\to\mathbf{R},$$

即 $X(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $T\times S$ 上的二元单值函数. 固定 t,$X(t,\cdot)$ 是 S 上的随机变量;固定 e,$X(\cdot,e)$ 是 T 的函数,称为随机过程的**样本函数**或**样本轨道(sample path)**,或随机过程的一个实现. 取遍 $t\in T$,$X(t)$ 的所有可能取值全体称为**状态空间(state space)**,记为 I.

以后 $X(t,e)$ 也记为 $X_t(e)$. 很多情况下,T 可以理解为时间参数,如果 T 至多可列,则称为**离散时间**;如果 T 是一个实数区间,则称为**连续时间**. 常用的 T 有:(1) $T=\{0,1,2,\cdots\}$;(2) $T=\{\cdots,-2,-1,0,1,\cdots\}$;(3) $T=(a,b)$;(4) $T=[0,\infty)$;(5) $T=(-\infty,\infty)$. 其中(1),(2)属于离散时间,(3),(4),(5)属于连续时间.

状态空间如果至多可列,则称 $\{X_t;t\in T\}$ 为**离散状态的随机过程**,否则称为**连续状态的随机过程**. 这样按照时间参数和状态空间,随机过程可包含以下四类:(1) 离散时间离散状态的随机过程;(2) 离散时间连续状态的随机过程;(3) 连续时间离散状态的随机过程;(4) 连续时间连续状态的随机过程.

例 2.1.1 (二项过程)某人在打靶,每次命中率是 p,且设各次的结果相互独立. 用 S_n 表示前 n 次命中的次数,则 $\{S_n;n=1,2,\cdots\}$ 是一个离散时间离散状态的随机过程,它的状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 2.1.2 ($\mathbf{Z}$ 上的随机游动)甲、乙两人在玩一种游戏,每次甲赢一元的概率是 p,输一元的概率为 $1-p$,且设各次的输赢结果相互独立. 用 S_n 表示前 n 次甲赢的钱数,则 $\{S_n;n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个离散时间离散状态的随机过程,它的状态空间 $I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$. 这样的过程称为 $\mathbf{Z}$ 上的随机游动. 其样本轨道见图 2.1.1.

特别地,当 $p=\dfrac{1}{2}$时,称 $\{S_n\}$ 为 $\mathbf{Z}$ 上的对称随机游动. 图 2.1.2 给出一条样本轨道.