



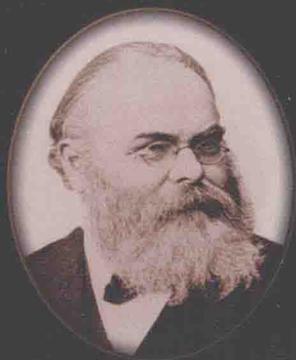
国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

SCHWARZ LEMMA

# Schwarz 引理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

SCHWARZ LEMMA

# Schwarz 引理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书系统地介绍了 Schwarz 引理、保角映射以及复函数的逼近,并且着重地介绍了 Carathéodory 和 Kobayashi 度量及其在复分析中的应用. 论述深入浅出, 简明生动, 读后有益于提高数学修养, 开阔知识视野.

本书可供从事这一数学分支相关学科的数学工作者、大学生以及数学爱好者研读.

### 图书在版编目(CIP)数据

Schwarz 引理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨:  
哈尔滨工业大学出版社, 2016. 5

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5876-5

I. ①S… II. ①刘… III. ①多复变函数论  
IV. ①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 035207 号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 张永芹 刘立娟  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 17.75 字数 183 千字  
版 次 2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5603-5876-5  
定 价 68.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

◎  
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

### 潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了极大兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英大辞典》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片。

### 丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此。一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇，诚绝唱也。《论语》束身严谨，勇于面世，“己所不欲，勿施于人”，有长者之风。司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句：“人生自古谁无死，留取丹心照汗青”“谁言女子非英雄，夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

### 读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎

目

录

- § 1 几道数学竞赛培训题 //1
- § 2 保角映射 //3
- § 3 一道德意志联邦共和国竞赛题 //5
- § 4 Schwarz 引理 //9
- § 5 同时代的两位 Schwarz //11
- § 6 一个伯克利问题 //13
- § 7 中国大学生夏令营试题 //15
- § 8 与非欧几何的联系 //20
- § 9 与多复变函数论的联系 //23
- § 10 复函数的逼近 //25
- § 11 与插值问题的联系 //27
- § 12 Carathéodory 和 Kobayashi 度量及其在复分析中的应用 //28
  - 1 序言 //28
  - 2 单值化定理 //30
  - 3 源自于 Schwarz 引理和 Schwarz-Pick 引理的推动 //32
  - 4 关于小林度量的基本事实 //35
  - 5 关于 Carathéodory 度量的一些基本事实 //38
  - 6 小林度量和 Carathéodory 度量的比较 //41

- § 13 陆启铿论 Schwarz 引理 //44
- § 14 陆启铿再论多复变数函数的 Schwarz 引理 //54
- 1 内容的简单介绍 //54
  - 2 本节所用的符号及所引用的结果的说明 //60
  - 3 基本定理的证明 //63
  - 4 在可递域的 Schwarz 引理第二部分之研究 //69
  - 5 一些反例 //73
  - 6 在可递域  $\mathcal{D}$  常数  $k_0(\mathcal{D})$  的存在及其推论 //86
  - 7 定理 7 之证明及其推论 //92
  - 8 在多圆柱  $P_n$  的 Schwarz 常数 //98
  - 9  $k_0(\mathcal{R}_I), k_0(\mathcal{R}_{II}), k_0(\mathcal{R}_{III})$  与  $k_0(\mathcal{R}_{IV})$  的数值 //105
  - 10 两典型域的拓扑乘积之 Schwarz 常数 //118
  - 11 未解决的问题 //128
- § 15 史济怀论 Schwarz 引理 //130
- 1 星形圆型域的 Schwarz 引理 //130
  - 2 全纯映射的从属原理 //136
  - 3 多圆柱上的星形映射 //137
  - 4 多圆柱上的凸映射 //147
  - 5 球上的星形映射 //152
  - 6 球上的凸映射 //159
- § 16 Schwarz 引理的重要性 //166
- 1 The Schwarz Lemma in  $B$  //166

- 2 Fixed-Point Sets in  $B$  //171
- 3 An Extension Problem //173
- 4 The Lindelöf-Čirka Theorem //176
- 5 The Julia-Carathéodory Theorem //185
- § 17 Schwarz 引理的算子在解析函数中的推广 //201
  - 1 Banach 代数中对谱半径的 Schwarz 引理 //201
  - 2 关于 von Neumann-Heinz 定理与 Ky Fan 定理的推广 //211
- 附录 1 线性变换与 Lobachevsky 几何 //224
  - 1 Lobachevsky 几何在圆上的 Euclid 图像 //224
  - 2 给定附标的两点间的非欧距离的计算法 //226
  - 3 非 Euclid 圆周 //228
  - 4 曲线的非欧长度 //229
  - 5 非 Euclid 面积 //229
  - 6 远 环 //230
  - 7 超 环 //231
  - 8 Lobachevsky 几何在半平面上的 Euclid 图像 //233
- 附录 2 陆启铿——在断弦琴上奏出多复变最强音 //236
  - 1 断弦琴终奏美妙曲 //236
  - 2 千里马自荐 //237
  - 3 创建中国多复变 //239
  - 4 办开放的研究所 //242

5 音乐游泳寄闲情 //244

附录 3 Schwarz 引理在重整化变换中的一个  
应用 //245

参考文献 //261

编辑手记 //263

## § 1 几道数学竞赛培训题

北京大学社会学教授郑也夫指出：中国教育的一大弊病是过度复习，为拿高分花大量时间去做类似的问题，数学竞赛也不例外，培训试题太多。

先来看三道复数的竞赛培训试题。

**试题 1** 已知  $z, a, x \in \mathbf{C}$ ,  $x = \frac{a - \bar{z}}{1 - a\bar{z}}$ , 且  $|z| = 1$ ,

求证:  $|x| = 1$ .

**试题 2** 证明: 若对  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ,  $|z_1 - \bar{z}_2| = |1 - z_1 z_2|$  成立, 则  $|z_1|, |z_2|$  中至少有一个等于 1.

**试题 3** 设  $z, w \in \mathbf{C}$ , 且  $z \neq w$ ,  $|z| = 2$ , 求  $\left| \frac{z - w}{4 - z\bar{w}} \right|$  的值.

这三个问题的共同之处在于都出现形式  $\frac{z_1 - \bar{z}_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ , 在试题 2 中只是将  $z_2$  令为  $\bar{z}_2$ , 于是有

$$\left| \frac{z_1 - \bar{z}_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|}{|1 - z_1 z_2|}$$

在试题 3 中令  $z_1 = \frac{z}{|z|}$ ,  $z_2 = \frac{w}{2}$ , 则  $z = 2z_1$ ,  $w =$

$2z_2$  代入  $\left| \frac{z - w}{4 - z\bar{w}} \right|$  中得  $\left| \frac{2z_1 - 2z_2}{4 - 4\bar{z}_1 z_2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$ .

再看一道培训讲座例题(《中学生数学》2005 增刊

第六讲复数,长沙市雅礼中学杨日武).

设  $|a| < 1$ , 对复平面上任何点  $z$ ,  $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$  或者小于 1, 或者等于 1, 或者大于 1, 从而整个平面分成三个子集. 所述的条件等价于

$$|z-a|^2 \leq |1-\bar{a}z|^2$$

或

$$(1-|a|^2)(|z|^2-1) \leq 0$$

第一个集合是开圆盘  $|z| < 1$ , 第二个集合是单位圆周  $|z| = 1$ , 第三个集合是闭单位圆盘的外部  $|z| > 1$ , 对于  $z = \infty$ , 该表达式的值为  $|a|^{-1}$ , 从而  $z = \infty$  属于第三个集合.

## § 2 保角映射

一般地说,在域  $D$  定义的函数  $w=f(z)$ ,把  $D$  内的曲线

$$C: z(t) = x(t) + ig(t), a \leq t \leq b$$

映射为  $w$  平面的曲线

$$\Gamma: f(z(t)) = f(x(t) + ig(t)), a \leq t \leq b$$

称  $\Gamma$  为在  $f$  下  $C$  的象(图 1).

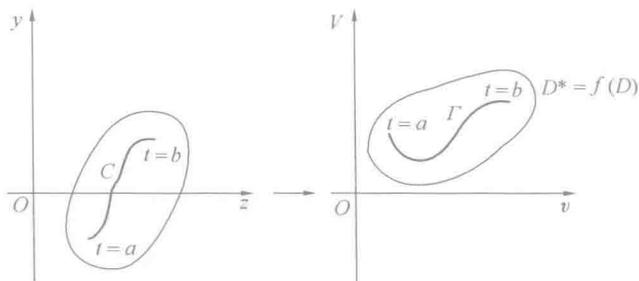


图 1

下面我们建立保角映射的概念:

设  $C_1, C_2$  为通过  $z_0$  的两条光滑曲线,在  $w=f(z)$  下,它们在  $w$  平面的象为  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ,当在  $z_0$  处  $C_1, C_2$  的切线夹角与  $w_0 = f(z_0)$  处  $\Gamma_1, \Gamma_2$  的切线的夹角,包括角的取向在内相等时,则称  $w=f(z)$  在  $z_0$  保角映射.最容易而且基本的保角映射即一次映射

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0$$

这种类型的有理数称为一次函数,由此函数决定的从  $z$  平面到  $w$  平面的映射称为一次映射.

一次映射具有下列重要性质:

**定理 1(圆圆对应)** 一次映射将  $z$  平面上的圆变为  $w$  平面上的圆,但直线看作圆的一种.

**定理 2(镜像原理)** 如在一次映射下  $z$  平面的圆  $O$  变为  $w$  平面上的圆  $O'$ ,则关于圆  $O$  互相处于镜像位置的两点  $P, Q$  变为关于圆  $O'$  处于镜像位置的两点.

利用以上两定理可证明 1920 年 A. Winternitz 在《Monatsh Math.》Vol. 30:123 证明的如下结论:

设  $C$  是单位圆内的一个圆周,则存在单位圆到其自身的形如

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

的变换,它把圆周  $C$  映射到以原点为中心的圆周.

**证明** 按假设,沿圆周  $C$  我们有

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \text{常数}$$

即  $a$  和  $\frac{1}{\bar{a}}$  (若  $a=0$ ,则为 0 和  $\infty$ ) 是关于  $C$  以及单位圆周公共的调和点对. 设  $z_0$  表示  $C$  的圆心,  $r$  为其半径,  $z_0 \neq 0, r < 1 - |z_0|$ , 则  $a$  ( $|a| < 1$ ) 满足二次方程

$$(a - z_0) \left( \frac{1}{a} - \bar{z}_0 \right) = r^2$$

或

$$(|a| - |z_0|) \left( \frac{1}{|a|} - |z_0| \right) = r^2$$

其中  $\arg a = \arg z_0, a$  是任意的.