国外优秀数学教材系列

# 图论

## ——一个迷人的世界

*The Fascinating World of Graph Theory*


[美] 亚瑟·本杰明（Arthur Benjamin）
加里·查特兰（Gary Chartrand） 著
张萍（Ping Zhang）

程晓亮 管涛 范兴亚 胡兆玮 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

# 图　论

## ——一个迷人的世界


亚瑟·本杰明（Arthur Benjamin）
［美］加里·查特兰（Gary Chartrand）　著
张萍（Ping Zhang）

程晓亮　管　涛　范兴亚　胡兆玮　译



机械工业出版社

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2015-0556 号。

**图书在版编目（CIP）数据**

图论：一个迷人的世界/（美）亚瑟·本杰明（Arthur Benjamin），（美）加里·查特兰（Gary Chartrand），（美）张萍著；程晓亮等译. —北京：机械工业出版社，2016. 10
书名原文：THE FASCINATING WORLD OF GRAPH THEORY
国外优秀数学教材系列
ISBN 978-7-111-55119-5

Ⅰ. ①图…　Ⅱ. ①亚…②加…③张…④程…　Ⅲ. ①图论－研究　Ⅳ. ①O157. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 246413 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　王　芳　刘丽敏
责任校对：杜雨霏　封面设计：路恩中
责任印制：李　洋
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2016 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
190mm×215mm · 16. 75 印张 · 382 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-55119-5
定价：49.90 元



凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

| | |
|---|---|
| 电话服务 | 网络服务 |
| 服务咨询热线：010-88379833 | 机 工 官 网：www. cmpbook. com |
| 读者购书热线：010-88379649 | 机 工 官 博：weibo. com/cmp1952 |
| | 教育服务网：www. cmpedu. com |
| **封面无防伪标均为盗版** | 金　书　网：www. golden-book. com |

# 原书内容简介

图论的迷人世界可以追溯到几个世纪以前，以图论为中心的数学构造展示了数学学科之间的联系。图论应用在生物学、计算机科学、运输学等领域，同时，图论本身也包含了数学中一些美丽公式和知名问题。例如，一次旅行中，一个人想要参观许多城市，可选择的线路中最短的是哪一条？至少需要多少种不同颜色填充地图才能使得相邻地区都被着成不同的颜色？这本书探索上述相关问题和我们所了解的一些困惑，并且只要求读者具有高中代数知识背景。某种意义下，本书更加注重着眼于图论的发展历程和一些代表这一领域问题的独特见解。

本书介绍了图论的基本概念，解释了图论中各种经典问题。例如，熄灯的问题、最小生成树问题、哥尼斯堡七桥问题、中国邮递员问题、国际象棋中马的遍历问题和路的着色问题等。书中也给出了各种类型的图，例如，二部图、欧拉图、彼得森图和树等。每一章都为读者设置了练习题，包含了具有挑战性的探索性问题。

以一种开放的眼光进入图论的世界，本书为您提供了令人兴奋的数学问题及其解决方法。

# 原书前言

我们常常认为数学理应享有较高的声誉，但事实并非如此。数学中的很多领域都让人感觉枯燥，需要花费大量的精力去学习和理解。近年来，有许多学术文章对美国高中生和其他国家的学生在数学和科学方面加以比较，得出了获得数学专业研究生学位的学生越来越少的报告。无论什么原因，事实是没有足够多的有天赋的美国学生对学习数学感到很开心。许多美国学生都在错失学习数学的机会。事实上，有许多数学分支是很有意思的。在这些领域内的许多有趣的定理背后都包含着一段这个定理由来的历史，一个关于那些甘于奉献的数学家们如何发现这些有趣和重要定理的故事。这些定理不一定是被专门钻研这个方向的人们发现，还有许多时候是意外收获。这些定理的证明对数学及其他领域是十分有用的，本书十分荣幸能给您介绍这样一个数学领域，欢迎来到图论的迷人世界。

像其他专业领域一样，数学由许多方向组成，它们之间有共性，但也有自己特有的鲜明特征。有些方向可能你很熟悉，比如代数、几何、三角函数和微积分，学习和理解这些学科可能会需要你努力研习，当然这些领域也很有趣。事实上，学习任何学科都很有趣。但是，这些有趣的数学领域从哪里来呢？答案是它来自于人们本身，来自于他们的好奇心、他们的想象力、他们的聪明才智。虽然有些人是数学家，但也有些人不是，其中有些就是学生——就像你我，或者当年的你我。

我们的目的是在这里向您介绍一个也许比较陌生的图论领域。我们希望向您展示数学的乐趣所在。我们相信您能感觉到数学不仅有趣而且还会为之激动。我们不仅要介绍这些有趣的结果，同样期待能和您分享发现和解决这些问题的方法。

在这里我们可以看到，一个有趣的问题往往不是用数学方法解决完就完成了任务，而是经常会引出一整套数学理论。尽管本书不打算深入钻研一些太高深的数学问题，但是我们会给出其中的一些思想或者思路来说明其正确性。

第一章以一些好玩的问题作为引子，这些问题给出了这本以图论为主题的数学书中的主要概念。其中的一些问题具有历史性意义，当我们拥有足够多的信息来解决它们时，我们会重新拾起它们。这一部分初步探讨了图论中的一些基本数学概念。在这一章的最后，我们给出了一个通常被称为图论第一定理的定理，用来处理一个所有顶点都赋予了度数的图的问题。

第二章从一场数学领域中的定理选美大赛来展开。我们看到，在最美丽的数学定理列表中不仅出现了关于图论的定理，而且一个在图论方面地位尤其特殊的数学家出现了。其中的一个定理引导我们步入图论中研究较多的一类图，即正则图。从这时开始，图的顶点的度数和长度都将加以讨论。本章的其余部分是关于图的结构的一些概念和思想。这章以图论中一个尚未解决的问题结束。

第三章讨论了一个图所具备的最基本性质，在任何两个地点之间都可以互相旅行。这产生了图中的各点之间的距离问题，这个位置对应于所给定的位置是近还是远。这章还有一个幽默的概念，即厄多斯数，这个概念是在描述与厄多斯合作过的数学家以及与“与厄多斯合作过的数学家”合作过的数学家以及……

第四章介绍了一个连通图拥有的最简单的结构，引导我们认识树形图——因为它们看起来像树。这类图可以和化学联系在一起，也能够帮助我们解决一些需要做一系列决断的决策问题。本章最后讨论了一个实际问题，就是设计一个成本最低的公路系统，使我们在系统中任何两个位置之间可以旅行。

图论有一个相当奇特的历史。这一领域的大部分知识开始于 18 世纪，那是天才的数学家莱昂哈德·欧拉提出和解决哥尼斯堡七桥问题，接着又描述了一个值得思考的更复杂的问题的时代。这产生了一类图形，我们以欧拉为之命名，并在第五章研究它，这一章还提起了另一个众所周知的问题——中国邮递员问题，这是一个关于邮递员进行一次环形巡游的最短路程问题。

第六章讨论了以 19 世纪一个著名的物理学家和数学家命名的图的问题，这个人是威廉·罗恩·哈密尔顿爵士。虽然哈密尔顿很少处理图论问题，但是他提出了“十二面体代数系统”，这促使他发明了一个在十二面体中寻找环形路径的游戏，且每个顶点恰好经过一次。20 世纪中期的知识大爆炸也包含了这方面的内容。这章以一个重要的实际问题结束，即找到一个最短的或者最省钱的环形路径使其经过这个系统中的每个地方。

有一个问题是关于一些对象的集合是否足够用以与另一个对象的集合匹配——例如申请工作匹配或人与人之间的匹配。这种问题会在第七章中讨论。在 19 世纪末第一次提出将图论作为数学的一个理论领域，并且确立了“图”这个词，也就是我们这本书所讨论的主要内容，从这章中我们可以了解到一个赛制安排有多少种不同的方案。

第八章关注的问题是一个图能否被分为其他特定类型的图，主要是圈。一些具体的完全图是否能以某种方式被分为三角形圈，这种情况对应了19世纪中期数学家托马斯·柯克曼提出并解决的通常被冠以“柯克曼女生问题”之后的问题。还介绍了图分解问题和图的顶点被整数适当标记并生成边的标记问题之间的联系。本章的最后以一个名为四色方柱的趣味游戏以及基于图论知识的解决方案收尾。

通常会有这样的情况发生，游历中涉及单行道，为了在图中将它模型化，在边上标明方向是有必要的。这产生了定向图的概念，这样的结构也可以用于表示比赛中一支队伍战胜另一支队伍。对于这类数学问题会出现在第九章。这章还有一个大讨论，即各种各样的投票技术可以产生意想不到的结果。

一些有趣的问题可以看作一个图是否可以在平面上没有交叉边地被画出。在第十章中借助可平面图的概念可以处理这类问题，其中讨论了一个砖厂问题，源自于第二次世界大战时的一个集中营。

数学中最著名的问题之一就是任何一个地图的区域能否用四种颜色区分，使得有相邻边界的两个区域颜色不同？这个四色问题是在19世纪中期一个年轻的英国数学家提出的，当时三等分角和化圆为方的问题已经在社会上众所周知，而四色问题又悄悄地传播开来，问题出名不仅是因为解决这个问题的时间跨度长，还因为它的解决方法，在第十一章中我们会对其进行讨论。这引出了给一个图的顶点着色，并且怎样用其解决一系列问题的讨论，例如，从日程安排到交通指示灯阶段变化的问题。

有趣的不仅仅是给一个图的顶点着色，无论是从实践的观点，还是理论的观点，给它的边着色都是值得关注的。这就是第十二章的主题。这也可以帮助我们解决一类日程安排问题，这也引出了图论中我们称之为拉姆齐数的一系列数值。这章还包括一个有趣的问题，叫作道路着色问题，它告诉我们在某些特定的仅包含单行道的交通系统中，每个地方都有相同数目的道路出口，那么道路可以被着色使得给出的一系列方向就必然能到达指定地点。

而这本书的最主要的目的是为了说明数学的一个分支可以如此有趣（有时还很神秘），这本书也可以用作习题集。本书最后有包括书中的所有章节的练习题。

最后，我很高兴能够得到非常专业的普林斯顿大学出版社员工的好评，尤其是维基·科恩（Vickie Kearn）、萨拉·勒纳（Sara Lerner）、艾莉森·纽齐斯（Alison Anuzis）、奎因·法斯汀（Quinn Fusting），还有我们最初原稿的匿名审稿人，他们的评论、反馈以及对细节的关注对这本书的改进十分有帮助。在此表示我们诚挚的感谢。

# 原书序言

在传统的数学书中，典型的写法是作者从最简单的、最容易的结论逐步引向更为具体并具有挑战和复杂的结论。这不是我们将在这里做的，我们的意图是展示我们以一定顺序思考的有趣的、漂亮的素材，让我们相信这将保持读者对这门学科的兴趣以及对即将发生的事感到惊奇。有时我们会证明这个结论，有时我们出于某些原因不给证明。当我们没有给出证明时，我们将提供给读者一个直观感觉或者一个参考，这个参考是已经被发现的一些结论。说到这里，在这本书的最后附有每个章节的练习题，这也是教授们拿这本书当练习册的一个原因。

因此，怀着对著名作曲家和作词家斯蒂芬·桑德海姆的愧疚与感激，下面的诗改编自他的作品：我们将向你介绍

一些熟悉的，
一些特别的，
一些适用于每个人的
图论之夜。

有时定向的，
经常有关联的，
有意义和超乎意料的
图论之夜。
没有复杂的，
一些完整的，
*你能确定我们是离散的，*
方向，
新应用，
四色问题搞定它，
微积分的明天，
图论之夜。

# 目　录

# 第一章
# 图论简介

图作为一种数学结构有很多有价值的功能．面对我们所遇到的问题它有助于使问题形象化，同时可以帮助我们分析问题．很多时候，能使我们更好地理解问题，更易于帮助我们找到解决问题的方法．既然图如此有用，首先，我们就来看一下运用图的概念以下这些是如何实现的，并感受图这种数学结构究竟是什么．

## 四个问题

我们先来看看 4 个风格迥异的数学问题，解决这些问题我们会发现只运用以前我们所学到的数学知识会感到束手无策，然而，这些问题都可以通过一种相对新的数学工具加以分析并最终解决，这个工具就是图．这里我们所提及的图不是你之前所熟知的函数图像，例如，图 1.1 描述的是正弦函数 $y=\sin x$ 的图像，这并不是我们所说的图．

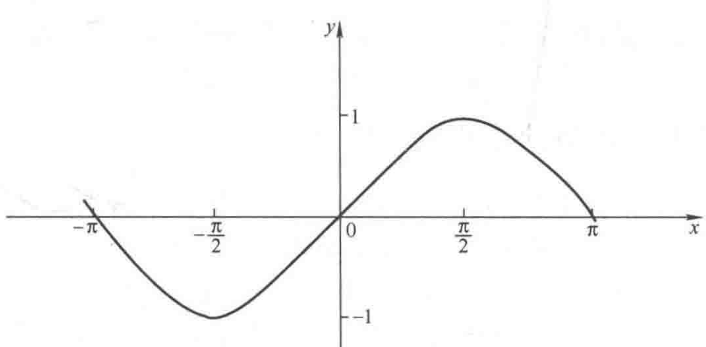


**图 1.1　不是我们所考虑的图**

## 五个王子的问题

从前有一个国王，他统治着整个王国，国王有 5 个儿子，他有一个愿望，他希望在他死后这个王国能被分成 5 个地区，每一个儿子都拥有一个地区，并且每个地区都和其他 4 个地区中的任何一个有公共的边界，国王的这个愿望能实现吗？

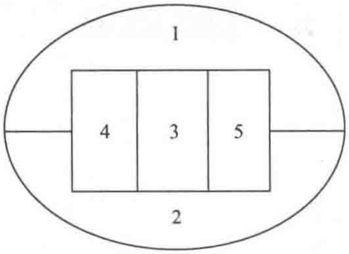


图 1.2　满足国王愿望的尝试图

图 1.2 虽然是满足国王心愿的一个不成功的尝试，但是，5 个地区分别被编号为 1，2，3，4，5，除了地区 4 和 5，其他每个地区都与余下的 4 个地区有公共边界.

如果这个王国能够按照国王的愿望被分成 5 个地区，必须有一些附加条件. 那就是每一个区域用一个点来表示，如果两个地区有公共边界，就用直线或曲线连结起来. 如果 $A$ 和 $B$ 是这个王国中两个相邻的地区，$C$ 和 $D$ 是另外两个相邻的地区，那么总有办法用两条不相交的直线将每对点连结起来.

我们刚刚研究的问题就是一个图的问题，这也是首次提到我们所研究的图. 一个图 $G$（graph）是一些点和线的集合，这些点叫作顶点（vertices），两个顶点的连线叫作边（edges），以某种方式相关联的两个点被一条边所连结. 那么，根据图 1.2 中给出的王国分为 5 个地区的划分，得到图 1.3 所示的图 $G$.

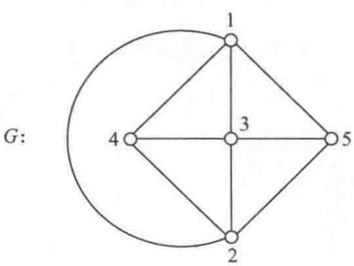


图 1.3　图 1.2 中区域情况的图论表示

为了实现国王的愿望，这个图必须有 5 个顶点，每两个顶点构成 1 条边，这样的图叫作 5 阶（order）的完全图（complete graph），用 $K_5$ 表示.

此外，画 $K_5$ 时，还要满足任何边之间是不相交的. 由于在图 1.3 中没有边连结顶点 4 和顶点 5，因此图 1.2 中国王划分区域的方法不是一个满足要求的方案. 在第十章我们还会再次遇到五个王子的问题，届时我们会给出一个完整解决问题的方案.

## 三套房屋和三种公用资源问题

有三座正在建造的房屋，每座房屋都必须和三种公共资源建立起联系，它们分别是供水站、发电站和天然气站. 每个公共设施提供站都需要一条直接从提供站末端到每一座房子的管线，并且不经过另一个公共设施的管线或者另一个在管线上的房子，换句话说，所有的三个公共设施必须埋在地下同一深度而且互不交叉，这样能做到吗？

图 1.4 给出了解决此问题的一个失败的尝试，其中三套房屋分别用 $A$、$B$、$C$ 来表示. 这个问题不仅可以用图的知识来解决，而且从图论的角度来看，与五个王子的问题很相似. 我们可以用 6 个点来代表此情境，用 $A$、$B$、$C$ 三个点来代表房屋，用 $W$、$E$、$NG$ 分别代表水、电和天然气. 当一个点代表房屋，另一个点代表资源时，将两个点用线连结起来，那么这个图有 9 条边，该图表可以记作 $K_{3,3}$，它表示的是分别有 3 个顶点的两个集合，其中一个集合中的每个顶点都要与对应的另一个集合中的所有顶点相连. 为了解决三套房屋和三种资源的问题，我们需要知道在任何边都不相交的情况下能否绘出 $K_{3,3}$. 基于图 1.4 中三套房屋和三种资源问题的尝试可以用图 1.5 的图论语言表示.

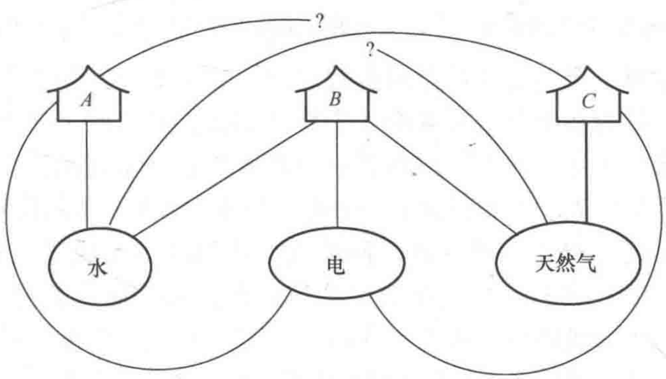


**图 1.4　三套房屋和三种资源的问题**

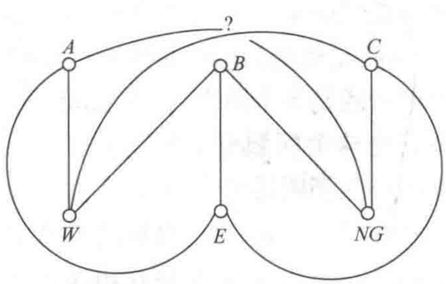


**图 1.5　图 1.4 问题的解决方案**

在第十章，我们还会遇到三套房屋和三种资源的问题，我们将在第十章给出解决此种问题的方案.

在我们的下一个问题中将会介绍一个用点代表人的图，这里我们假设任意两个人要么是朋友要么是陌生人.

## 三个朋友或者三个陌生人问题

在一次聚会中至少出席多少人才能够确保其中有 3 个人是互相认识的或者其中有 3 个人是完全陌生的？(见图 1.6)

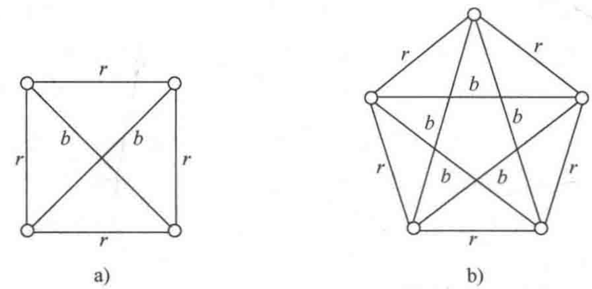


**图 1.6　3 个朋友或 3 个陌生人的答案既不是 4 个人也不是 5 个人**

在这里这个问题也可以用图来表示，事实上可以用一个完全图来表示，假设在聚会中有 4 个人出席，那么，我们画一张有 4 个顶点的图来代表 4 个人，我们将两个点连成一条线来表示两个人是朋友或者是陌生人．因此得到了一个有 4 个顶点和 6 条边的完全图 $K_4$．为了表明这两个人是朋友还是陌生人，我们将边涂成不同的颜色，如果两个人是朋友，我们就把边涂成红色，如果两个人是陌生人，我们就把边涂成蓝色．那么，在图中 3 个互相认识的朋友就会体现为一个红色的三角形，3 个互相不认识的陌生人就会体现为一个蓝色的三角形．在图 1.6a 所表示的情形中，可能不出现 3 个互相认识的朋友或者 3 个互相不认识的陌生人．类似地，当我们给图 1.6b 中的完全图 $K_5$ 染色时，我们发现也会出现如图 1.6a 的类似情况．

这就证明 3 个朋友或是 3 个陌生人的问题的答案是至少 6 个人．事实上，即使现在讨论这个问题有点早，但我们相信我们能够使你信服，我们以定理的形式来阐述这个问题．

**定理 1.1**　3 个朋友或 3 个陌生人的问题的答案是 6 个人，也就是说在任意 6 个人中一定会有 3 个人是互相认识的，或者 3 个人是完全陌生的．

**证明**　我们已经清楚了答案不是 5 个人，所以我们考虑带有 6 个顶点的完全图 $K_6$，它的每条边被染成红色或者蓝色，只要存在 3 个顶点使连结这三个顶点的颜色相同．

我们用 $u$，$v$，$w$，$x$，$y$，$z$ 表示 $K_6$ 的顶点，对于 $u$ 而言，有以 $u$

为起点与另外的5个顶点相连的5条边，在这5条边中至少有3条是颜色相同的，不妨用红色表示．如图1.7a所示，三条红色的边彼此连结 $v$、$w$ 和 $x$，那么 $u$ 连向 $y$ 和 $z$ 的颜色就不重要了．

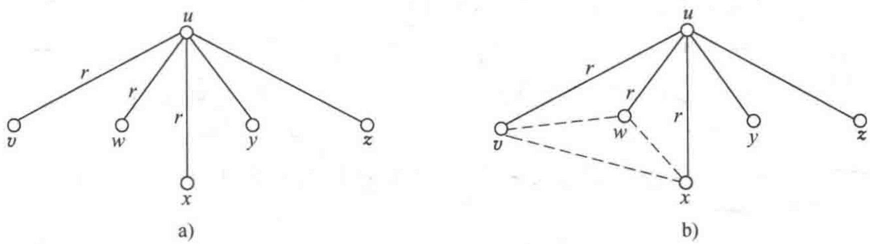


**图1.7　证明定理1.1**

$v$，$w$，$x$ 三个点互相连结会产生3条边，如果其中一条边是红色——例如 $v$ 和 $w$ 之间的线是红色的——那么 $u$，$v$，$w$ 就代表在聚会中互相认识的朋友，用红色三角形 $uvw$ 来表示．另一方面，如果连结 $v$，$w$，$x$ 的边中任意两点的边都不是红色的，也就是说，这三条边都是蓝色的，这就意味着 $v$，$w$，$x$ 是聚会中3个互不认识的陌生人，用蓝色的三角形 $vwx$ 来表示，在图1.7b中已经用虚线表示出了蓝色的三角形 $vwx$．■

虽然下一个问题在历史上不是很出名，但它确实是一个实际问题，其向我们展示了图如何用于分析我们所遇到的问题．

## 求职者问题

一个高校的辅导员联系了许多企业的主管，希望能够为6个勤奋学习的学生哈利（Harry），杰克（Jack），肯（Ken），琳娜（Linda），莫林（Maureen），南希（Nancy）找到一份暑假兼职工作．她找到6家企业，每个企业都愿意提供一个职位给对企业有兴趣并且业务合格的学生．这6家企业涉足的领域有建筑艺术、银行、建设、设计、电子、金融，这6位学生申请的企业职位如下：

哈利（Harry）：建筑艺术、银行、金融
杰克（Jack）：设计、电子、金融
肯（Ken）：建筑艺术、银行、建设、设计
琳娜（Linda）：建筑艺术、银行、建设
莫林（Maureen）：设计、电子、金融
南希（Nancy）：建筑艺术、银行、建设

(a) 这些情形如何用一个图来表示？

(b) 每一个学生都能够找到他们申请的一个工作吗？

解决方案

(a) 我们建立一个 12 个点的图 $G$，其中的 6 个点代表 6 个学生，我们将这 6 个点记作 $H$，$J$，$K$，$L$，$M$，$N$（也就是他们名字的首字母），另外的 6 个点代表 6 个职位记作 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$，分别代表建筑艺术、银行、建设、设计、电子、金融. 如果两个点分别代表学生和他们所喜爱的职业，就将这两个点用线连结起来（见图 1.8）.

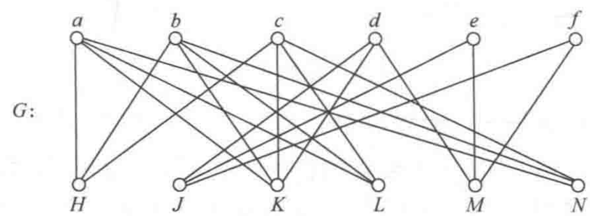


**图 1.8　通过图建立工作申请模型**

(b) 能. 图 $G$ 中 $Ha$，$Je$，$Kd$，$Lb$，$Mf$，$Nc$ 的连线表明这是可以实现的（见图 1.9）. 在这种情况下，肯将得到的暑假工作是设计，如果该企业不想聘用肯，那么这 6 个学生仍然能够找到一份自己喜欢的暑假工作吗？◆

在第七章，我们还将看到更多的这种匹配问题.

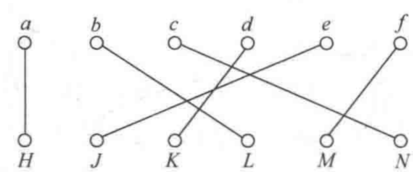


**图 1.9　工作的分配情况**

## 四个著名的问题

现在，我们来看四个问题. 这些问题不仅仅是在图论史上十分重要，同时也为图论领域的发展注入了新的活力，在本书的后面我们会加以详细介绍.

1736 年，哥尼斯堡（Konigsberg）坐落在普鲁士（欧洲），普莱格尔（Pregel）河流经该城市，将该城市分为四块陆地，在这条河上建

立起了七座桥，分布在城市的不同位置. 图 1.10 描述了哥尼斯堡四个地区 $A$，$B$，$C$，$D$ 和七座桥 $a$，$b$，…，$g$ 的情况.

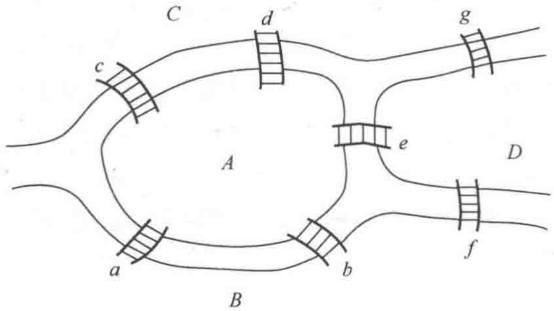


**图 1.10 著名的哥尼斯堡七桥问题**

## 哥尼斯堡七桥问题

走完哥尼斯堡的七座桥，每座桥只走一次，这是可能的吗？

哥尼斯堡七桥问题可以表示为一个图 $G$，或者说不完全是一个图. 有四个顶点在 $G$ 中，每个顶点代表一块陆地，连结两个顶点的边数等于连结它们所表示两块陆地的桥数. 这里我们得到一个多重图（multigraph），多重图的定义是连结同一对顶点的边数多于一条的图. 图 1.11 展示了多重图 $G$. 就这个多重图而言，解决哥尼斯堡七桥问题的关键是能否确定每条边只走一次而走完图 $G$. 实际上这里有两个问题，一个是是否存在一种走法使得它的起点和终点相同；另一个是是否存在一种走法使得它的起点和终点不同. 这两个问题将在第五章解决.

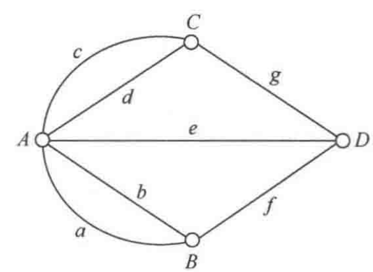


**图 1.11 代表哥尼斯堡七桥问题的多重图**

1852 年，在观察英格兰的地图时发现了一个这样的问题：用四种颜色给它的城市着色，并且有公共边界的两个城市被涂成的颜色是不同的. 这产生了一个更一般化的问题.

## 四色问题

在一张包含更多区域的地图上，在保证有公共边界的两个地区被染上不同颜色的前提下将这些地区用四种或少于四种的颜色染色，这能做到吗？

图 1.12 为 10 个地图上的地区. 这些地区被着上四种颜色，颜色用 1，2，3，4 来表示. 然而事实证明这张地图的区域不能以三种

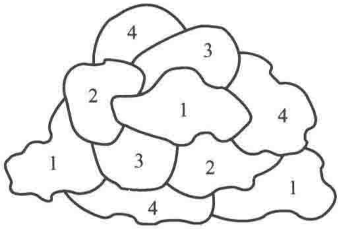


图 1.12　地图上的区域可以用四种颜色着色

颜色着色来使每两个地区共享一个公共边界时颜色不同.

这个例子和一般的四色问题一样可以用图论的语言加以描述. 类似于五个王子的问题，我们用一个点来表示一个地区，如果两个区域有共同的边界，就把两个点连结起来. 这种方式创建的每一个图都能够用任何两条边都不相交的图加以描绘. 为了取代给区域着色的办法，我们可以给图中的顶点着色，使得被同一条边连结的两个顶点颜色不同.

这样图 1.12 就能表示成图 1.13. 四色问题将在第十一章更详细地讨论.

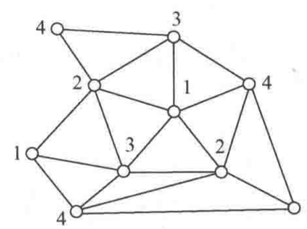


图 1.13　图 1.12 中地图对应的顶点染色图

在立体几何中，多面体（polyhedron，复数是 polyhedra）的定义是每个面的边界都是一个多边形的一个三维立体图形，它的每个面的边界就是一个多边形. 图 1.14 给出了两个多面体：立方体和八面体. 通常用 $V$ 代表多面体顶点数量，用 $E$ 代表棱的数量，用 $F$ 代表面的数量. 立方体和八面体的这些参数在图 1.14 中已给出. 在这两种情况下，$V-E+F=2$.

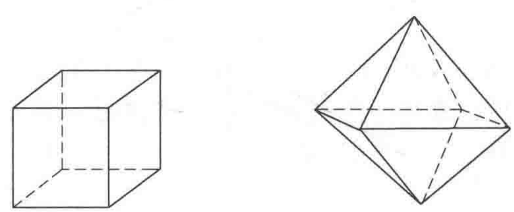


图 1.14　立方体和八面体

1750 年应运而生了一个这样的问题，即是否 $V-E+F=2$ 这个公式对于每一个多面体都成立.