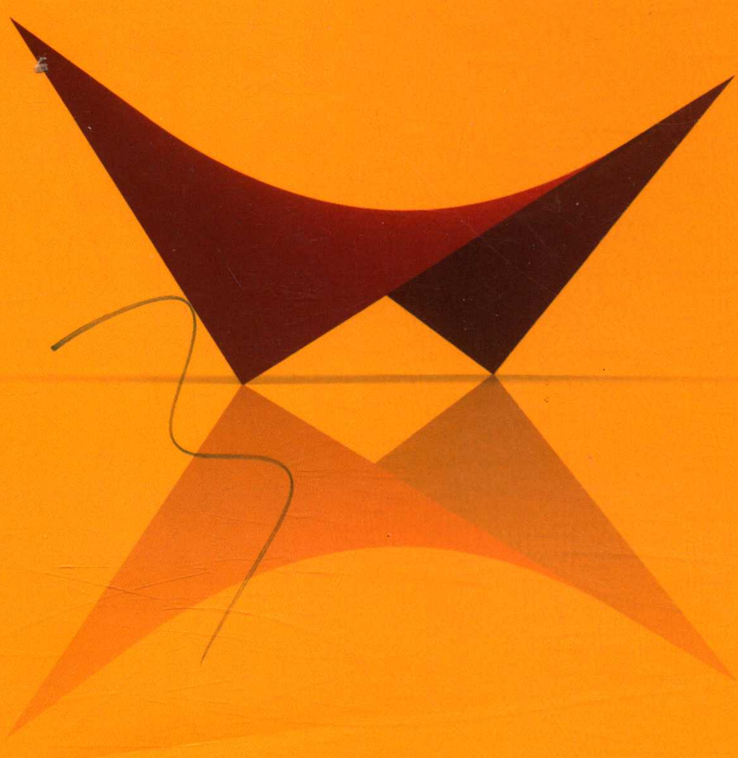
数学建模实例与优化算法

严坤妹 编著

SHUXUE JIANMO SHILI YU
YOUHUA SUANFA



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

数学建模实例与
优化算法

严坤妹　编著

SHUXUE JIANMO SHILI YU
YOUHUA SUANFA

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

数学建模实例与优化算法/严坤妹编著.—厦门:厦门大学出版社,2017.7

ISBN 978-7-5615-6566-7

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①严…　Ⅲ.①数学模型-研究　Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第140816号

出 版 人 蒋东明

责任编辑 郑 丹

封面设计 李嘉彬

技术编辑 许克华

出版发行 厦门大学出版社

社　　址 厦门市软件园二期望海路39号

邮政编码 361008

总 编 办 0592-2182177　0592-2181406(传真)

营销中心 0592-2184458　0592-2181365

网　　址 http://www.xmupress.com

邮　　箱 xmupress@126.com

印　　刷 泉州刺桐印务有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 14.5

字数 336千字

版次 2017年7月第1版

印次 2017年7月第1次印刷

定价 39.00元

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

前　言

现代信息技术的飞速发展，极大地推动了应用数学的发展，使得数学几乎渗透到每一个科学领域及人们生活的方方面面。用数学眼光看待生活、认识世界，并综合运用数学知识和数学方法解决实际问题，将成为每个公民应具备的基本素养。而数学建模能力是21世纪科技人才应具备的数学素养之一。

在平时教学中，教师应注重将数学建模的方法和思想渗透到数学课堂上。如何把数学模型与专业课程结合起来，为专业服务，为学生服务，如何通过数学建模教学培养和提高学生应用数学的意识和能力，是一项重要的课题。

本书源自学校进行课程教学改革积累起来的素材，是笔者在数学建模选修课使用讲义的基础上，结合笔者对优化算法的科学研究成果形成的。本书在编著过程中力求通俗易懂，既注重基础性、可读性，又注重趣味性和应用性。首先，对于数学基础不同的学生，书中的实例模型都是学生能学会的。其次，对于财经类学生，则选取一些经济管理类的数学模型，为专业服务。不同层次、不同专业学生可根据实际需要与自身能力灵活选择内容。最后，为便于读者学习掌握建模方法，书中的每个实例都来源于生活实际，解决问题的过程又按照数学建模的基本步骤顺序进行编写。

本书由福建商学院公共基础部副教授严坤妹编著，全书共分9章。根据培养应用型人才的要求，除第8章外，在其余各章节都设计了“思考与训练”环节。这个环节要求学生以小组的形式，通过搜集资料、市场调查和讨论来完成。其目的是锻炼学生的团队协作、市场调研、资料收集的能力，培养学生的数学建模能力。

本书在编写过程中参阅并引用了国内外很多学者的研究成果，在此谨向有关作者表示衷心的感谢。本书的出版得到了福建商学院、厦门大学出版社的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。由于笔者水平有限，书中案例的选取及分析方法难免有遗漏和不当之处，恳请同行专家及其他读者批评指正，提出宝贵意见，以便进一步改进。

编者

2017年3月

目 录

第1章　数学建模概述

要培养高素质的创新人才，大学教育是关键，而大学的数学教育在人才的培养中起着重要的奠基作用。数学是无处不在的，各行各业和各学科领域都在运用数学。在实际生活和各科学领域中都有一些需要解决的实际问题，而这些实际问题不是简单地套用某个数学公式，或只用单一学科的知识就能解决，这需要工作者具有较高的数学素质，具有敏锐的观察力、团结协作的能力、创造性思维的能力，善于抓住问题的主要矛盾，能用数学的知识和方法以及相关的知识去解决实际问题。数学建模是培养创新能力的一个重要途径。通过数学建模的教学和数学建模竞赛相关的活动，让学生亲自参与综合利用数学技术和计算机技术解决实际问题的过程中，能扩大学生的知识面，培养和提高学生综合运用所学的知识解决实际问题的能力，即"数学建模的能力"。

1.1　什么是数学模型

1.1.1 模型

模型是指对所研究的系统、过程、事物或概念的一种表达形式，也可指根据实验、图样放大或缩小而制作的样品，一般用于展览或实验或铸造机器零件等用的模子。如展览会里的飞机模型，按照实物的形状和结构按比例制成的物体等等。

模型的分类众多，可按用途、表现形式、产品属性等分类。按照模型的表现形式可以分为物理模型、数学模型、结构模型和仿真模型。

1.物理模型

物理模型也称实体模型，又可分为实物模型和类比模型。

(1)实物模型：根据相似性理论制造的按原系统比例缩小（也可以是放大或与原系统尺寸一样）的实物，例如风洞实验中的飞机模型、水力系统实验模型、建筑模型、船舶模型等。

(2)类比模型：在不同的物理学领域（力学、电学、热学、流体力学等）的系统中各自的变量有时服从相同的规律，根据这个共同规律可以制出物理意义完全不同的比拟和类推的模型。例如在一定条件下由节流阀和气容构成的气动系统的压力响应与一个由电阻和电容所构成的电路的输出电压特性具有相似的规律，因此可以用比较容易进行实验的电路来模拟气动系统。

2.结构模型

主要反映系统的结构特点和因果关系的模型。结构模型中的一类重要模型是图模型。此外,生物系统分析中常用的房室模型等也属于结构模型。结构模型是研究复杂系统的有效手段。

3.仿真模型

通过数字计算机、模拟计算机或混合计算机上运行的程序表达的模型。采用适当的仿真语言或程序,物理模型、数学模型和结构模型一般能转变为仿真模型。关于不同控制策略或设计变量对系统的影响,或是系统受到某些扰动后可能产生的影响,最好是在原系统中进行实验,但这并非永远可行。原因是多方面的,例如:实验费用可能是昂贵的;系统可能是不稳定的,实验可能会破坏系统的平衡,造成危险;系统的时间常数很大,实验需要很长时间;待设计的系统尚不存在等。在这样的情况下,建立系统的仿真模型是有效的。例如,生物的甲烷化过程是一个绝氧发酵过程,由于细菌的分解作用而产生甲烷。根据生物化学的知识可以建立过程的仿真模型,通过计算机寻求过程的最优稳态值并且可以研究各种启动方法。这些研究几乎不可能在系统自身上完成,因为从技术上很难保持过程处于稳态,而且生物甲烷化反应的启动过程很慢,需要几周的时间。但如果利用(仿真)模型在计算机上仿真,则甲烷化反应的启动过程只需要几分钟的时间。

数字模型又称数字沙盘、多媒体沙盘、数字沙盘系统等,它是以三维的手法进行建模,模拟出一个三维的建筑、场景、效果,可以在数字场景中任意游走、飞行、缩放,从整体到局部,再从局部到整体,无所限制。用三维数字技术搭建的三维数字城市、虚拟样板间,交通桥梁仿真、园林规划三维可视化、古建三维仿真、机械工业设备仿真演示等借助计算机、显示系统等起到展示、解说、指挥、讲解等作用。多媒体沙盘是利用投影设备结合物理规划模型,通过精确对位,制作动态平面动画,并投射到物理沙盘,从而产生动态变化的新的物理模型表现形式。

1.1.2 数学模型

数学模型是用数学语言描述的一类模型。这种描述可以是一种符号,如常用符号、函数符号等;可以是一个数学式子或方程,如代数方程、微分方程、差分方程、积分方程或统计学方程等,通过这些方程定量地或定性地描述问题中各变量之间的相互关系或因果关系;也可以是一个算法、图形或其他的数学工具(如几何、拓扑、数理逻辑)。

我们在日常的学习中已经接触过数学模型,如:点、线、面是沙粒、绳子、镜面的数学模型;导数是曲线的切线斜率、物体直线运动瞬时速率的数学模型;定积分是曲边梯形面积、做直线运动物体路程的数学模型;$F=ma$ 是牛顿第二运动定律的数学模型,表示物体(系统)受到外力作用时,物体的加速度与所受的外力成正比,与物体的质量成反比;$S=\pi r^2$ 是圆的面积的数学模型,表示圆的面积与圆的半径之间的内在关系;等等。

实际上,数学模型并不是新的事物,要用数学去解决实际问题,就一定要用数学模型去刻画它。

对于一个实际的问题,为了能够用数学知识解决实际问题,常常需要把表征该实际问题的数量关系或图形结构抽象出来,用数学语言进行描述,建立数学模型,把实际问题转

化为数学问题。需要指出的是，数学模型不仅可以表达实际问题的内在规律，也可以表示问题的定义。例如，客观世界的许多现象和事物不仅是运动变化的，而且其运动变化的过程往往是连续不断的，比如飞机在天空飞行、树的生长、河水的流动、气温的变化等都是连续不断的。这种连续不断的变化过程如何用数学语言描述？我们知道客观世界的事物在变化过程中总是相互依存、相互制约的，在研究一种现象时，总会涉及几个变量，这些变量间存在着某种联系，如果只考虑两个变量，且这两个变量间的内在关系可以用数学模型 $y=f(x)$ 来表示，那么问题就转化为去研究函数 $y=f(x)$ 的连续性，式子 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续的数学模型。

1.2　什么是数学建模

数学建模是利用数学方法解决实际问题的一种实践，即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学语言描述，建立起相应的数学模型并进行求解的实践过程。数学建模是用数学语言描述实际问题的过程，是应用知识从实际问题中抽象、提炼出数学模型的过程。数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题的能力的必备手段之一。

1.3　数学建模的基本步骤

对于实际问题，我们应该如何建立数学模型？数学建模一般要经过哪些步骤？我们先来解决一个应用题，从中了解数学建模的过程。

中学的时候，我们就已经在用建立数学模型的方法解决实际问题了，只是我们没有充分注意到它就是数学模型罢了。譬如说下面这类“实际”问题。

[**问题提出**]

设某旅游景区，第一年接待了 4 万人，由于该景点环境优美，广告也做得好，第二年、第三年到此景点旅游参观的人数持续增长，到第三年末，景点共接待了 19 万人，那么后两年的增长率是多少？

这是中学代数中的一道应用题——增长率问题。

[**解**]设平均增长率为 x，则易得 $4+4(1+x)+4(1+x)(1+x)=19$，即 $4x^2+12x-7=0$。求解之即可，然后进行检验，不符合实际的结果舍去。

我们详细地把解题步骤写出来，则建立和求解这个代数应用题的数学模型的基本过程如下：

第一步：问题分析

根据现实对象的背景和要求对问题进行分析，本例中若每年的增长率不同，则问题的解不唯一；若每年的增长率看作相同，则根据题意，可以列出代数方程。

第二步：合理的简化假设

根据问题的分析和目的做出合理的简化假设。本例中，我们设第二年、第三年的增长率都为常数 x。我们说这个假设并不合理，因为实际中的增长率通常不会是常数，但在中学阶段，这个假设是合理的。换句话说，假设的合理性与研究者所使用的工具和研究范围有关。

第三步：建立数学模型

根据问题分析与假设，由相应的规律建立实际问题的数学表达式——建立数学模型。本例的数学模型是代数方程，到第三年末的总产量为

$$4+4(1+x)+4(1+x)(1+x)=19,$$

整理得

$$4x^2+12x-7=0。$$

第四步：模型求解

使用相应的数学方法求解数学模型，即给出现实对象的数学解决——模型求解。本例使用一元二次方程的因式分解法解得

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=-\frac{7}{2}。$$

第五步：模型分析(包括检验、修改、应用和评价等)

本例中，$x_2=-\frac{7}{2}$不合实际，舍去，$x_1=\frac{1}{2}$合乎实际，保留它，于是现实问题得到解决。

真正实际问题的数学模型与建立数学模型的过程要比上述复杂，但建立数学模型的基本思想和过程已经包含在建立和求解这个代数应用题的数学模型的过程中了。

综上所述，我们将数学建模的基本步骤归纳为五个步骤，即五步建模法：问题分析—模型假设—模型建立—模型求解—模型的分析、检验与应用。

1.问题分析

这个过程很重要，也不难理解，在中学阶段解决应用题时已经反复用过。首先通过读题，弄清题目的来龙去脉，划分层次，归纳大意，动用想象力、洞察力，通过分析比较、抽象概括和逻辑推理进行量的分析，找出问题所涉及的变量和常量。根据建模目的和要采用的方法的需要，分出主次，把主要的量留下，次要的量舍去，研究已知量和未知量之间的关系。不仅要注意研究那些题目中较为明显的条件和结论，还必须将题目中隐含的条件及变量之间的内在联系、规律和数量关系挖掘出来，明确建模目的，收集掌握必要的数据资料。

要强调的是，进行问题分析时，要注意将建立模型可能涉及的因素尽量用贴近数学的语言给予描述。譬如要解决“椅子能否在地面上放稳”这个实际问题，那么什么叫能放稳？那就是椅子的四条腿同时着地，但这不是数学语言。四条腿同时着地用数学语言怎样描述？那就是四个椅子脚与地面的距离同时为零。这样一来问题就变成了寻找四个距离函数，使之等于零。这就是问题分析的作用。

2.模型假设

这一步骤大家比较陌生。因为中学数学中的所谓实际问题都是老师们编制好了的，

特别是假设都事先给定了。我们知道，在做中学数学应用题时，如果有至少一个给定的条件没有用上，那么你的结果十有八九是错的。但是实际问题绝非如此。举一个很简单的例子：

小学的课本上有这样的一道题："树上有10只鸟，开枪打死一只，还剩几只？"可能大多数人的答案是9只，但是还可以有其他的答案。我们分析如下：假设鸟听到枪声后都飞走了，则树上一只活鸟也没有；假设枪是无声的，打死一只鸟后其他的鸟还在树上，则树上还剩9只活鸟；如果有的鸟是听不见声音的，则答案也不同了。这说明考虑问题的角度不同，就会有不同的结果。

现实问题往往是复杂且杂乱无章的，所涉及的变量非常多，如果不对其进行抽象和简化，则无法准确把握其本质属性，所以必须做合理的假设，将问题理想化。抓住问题的本质和主要因素，把那些反映问题本质属性的量及其关系抽象出来，形成对建模有用的信息和前提条件。

3.模型建立

根据假设，用适当的数学建模方法建立相应的数学模型，尽量采用简单的数学工具。建立一般的函数模型时，要设法找出相应的等量关系。如果需要建立的模型不是我们所熟知的函数模型，则需要学习新的模型和方法。

4.模型求解

模型求解是对所建立的数学模型进行求解，求解需要运用数学知识、计算机知识，掌握常用的算法和数学软件，如 *MATLAB*，*LINGO*，*MATHEMATICA*。

模型建立与模型求解这两个步骤容易理解，但具体操作时又是很难的。

5.模型分析

模型分析是对求解结果进行数学上的分析（如误差分析）或根据结果进行预测。一方面要对模型结果进行检验，看是否符合实际。假如模型结果与实际不符合，就要对问题进行重新分析和假设，然后建立新的模型，再检验直至符合要求。另一方面是把经过验证的模型结果应用于实际，数学模型是实际问题的数学抽象，往往不只是问题本身用得上，还可能应用于其他问题或领域。

在建立数学模型时，我们还要注意到：对同一个实际问题，其数学模型不一定有唯一正确的答案。因为不同的人建立模型的目的不同，采用的模型建立方法也不同，都可能得到不同的数学模型，导致完全不同的结果。只要经过检验是符合实际的，就是正确的模型。

数学建模的一般方法有：

（1）机理分析方法：根据对现实问题进行推理分析，找出反映内部机理的规律，用已知数据确定模型的相关参数，所建立的模型常有明确的物理或现实意义。

（2）数学分析方法：用"现成"的数学方法建立模型。如图论、微分方程、概率统计方法等。

（3）数值分析方法：对已知数据进行数值拟合，得到变量之间的关系。

（4）构造分析方法：先用机理分析方法建立模型的结构，再利用已知的信息确定模型的参数。

数学建模通常用理想化方法处理问题，但某些时候也使用类比的方法。类比的方法经常会帮助我们通过比较熟悉的学科来领悟未知的学科，可以展现出一对事物间的关系，可以帮助我们直观地思考问题。类比的方法可能有其局限性，但它在数学科学中是公认的方法。例如：卢瑟福给出的氢原子和太阳系之间的类比；动脉中的血流和管道中的水流的类比；城市中的交通网（如铁路线、公路、公共汽车路线）虽然不能被布置成精确的几何网格，但用几何网格来建立简单的模型是有价值的。

1.4 数学建模竞赛的发展

数学建模竞赛（The Mathematical Contest in Modeling，MCM）最早始于美国，1985 年由美国政府部门资助，由美国数学及其应用联合会（The Consortium for Mathematics and Its Application，COMAP）主办，由美国工业与应用数学学会（Society for Industrial and Applied Mathematics，SIAM）、运筹学和管理科学协会（The Institute for Operations Research and Management Sciences，INFORMS）及数学学会（Mathematical Association of America，MAA）协办。第一届数学建模竞赛只有来自 70 所高校的 90 个参赛队参加，后来它的影响力逐步扩大，现已成为有十几个国家和地区参加的国际型竞赛活动。

中国最早从 1989 年有北京地区的清华大学、北京大学、北京理工大学等学校派队参赛，近几年来，中国的参赛队伍几乎占了参赛队伍总数的 1/3 以上，而且每年都能取得最高奖。

中国的全国大学生数学建模竞赛（China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling，CUMCM）始于 1992 年，首先由中国工业与应用数学学会（China Society for Industrial and Applied Mathematics，CSIAM）举办了非官方的“全国大学生数学建模竞赛”，到 1994 年成为由原国家教委高教司直接领导组织，由工业与应用数学学会具体承办的一项大规模的竞赛活动。

数学建模竞赛不同于其他各种单个学科的竞赛，如数学竞赛、物理竞赛等，因为单个学科的竞赛只涉及一门学科，甚至一门课程的知识，而数学建模竞赛涉及数学学科、计算机学科及其他许多学科，仅数学学科就涉及高等数学、线性代数、概率统计、计算方法、运筹学、图论、数学软件等方面的知识。数学建模的竞赛题来源于生活实际问题，但远非只是一个数学题目，有些题初看起来与数学没有任何关系。实际问题涉及的知识面很广，需要学生具有多方面的知识及对所学知识的综合运用能力。学生除了具有数学知识外，还要有较好的计算机编程能力，网上查阅资料的能力以及论文写作能力。数学建模竞赛可以培养团队精神，可以培养学生综合运用知识解决实际问题的能力，对提高学生的素质很有帮助。

我国从 1992 年起，每年秋季都举行一次全国大学生数学建模竞赛，参赛时间长度为 3 昼夜，以学校为单位报名参加，参加数学建模竞赛的同学每 3 人组成一个参赛队，所有在校的各年级大学生都可以报名参赛。

1.5　数学的简单应用问题

如何用数学模型来模拟并解决生活中的数学应用问题，请看以下几个例子。

［问题 1］　估计种子的数目。

某家有一块空地想用草皮覆盖，但后来决定买草种自己种，草种是用袋子包装好的，请估计一个袋子中的种子数目，假如这块空地的面积是 $M\ \mathrm{m}^2$，需要多少袋这样的种子？

假设装草种的袋子（袋子是满的）是一个长方体，它的长、宽、高分别为 a、b、c、m，体积为 $V\ \mathrm{m}^3$，又假设一粒种子是一个小的长方体，体积为 $P\ \mathrm{m}^3$，则袋子中的种子数目是 $N=\dfrac{V}{P}$，假设草地每平方米播种 n 粒种子（自己估计播种密度），则需要草种的袋数为$\dfrac{MnP}{V}$。

［问题 2］　估计动物的体重。

动物的体重与动物的身长有一定的关系，如何根据四足动物的躯干长估计它的体量？

假设四足动物的躯干（不含头、尾）可看作一个圆柱体，如图 1-1 所示，它是一根支撑在四肢上的弹性梁。

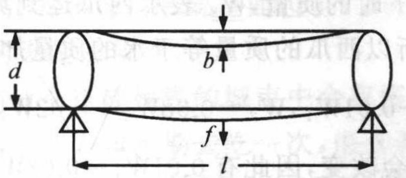


图 1-1　假设四足动物躯干为圆柱体

用 L 表示躯干长度，d 表示躯干直径，s 表示横断面积，f 表示躯干质量（梁重），动物在自身体重 f 的作用下，躯干的最大下垂度为 b，即梁的最大弯曲程度是 b。利用弹性力学的研究结果：

$$b\propto\frac{fL^3}{s\,d^2}\text{。}$$

又因为 $f\propto sL$，故$\dfrac{b}{L}\propto\dfrac{L^3}{d^2}$，从生物学角度可以假定，经过长期进化，对每种动物而言，$\dfrac{b}{L}$应为一个常数，即$L^3\propto d^2$，又由于$d^2\propto s$，$f\propto sL$，故 $f\propto L^4$，即体重与躯干长度的 4 次方成正比。

注：类比法是建模中常用的技巧，充分发挥想象力，把问题转化为已经有确切研究成果的问题去解决。

［问题 3］　估计一棵月桂树有多少片树叶。

假设：将月桂树近似看作半径为 r 的球体，则表面积为 $4\pi r^2$。又假设树叶连续地覆盖在树冠的外表面（尽管树叶不是“连续地”覆盖在表面，但是，树叶不仅仅只是在“树冠”的

表面，也遍布在树木中，所以可假设树叶连续地覆盖在树冠的外表面），并假设一片树叶的面积为 s，且树叶的面积一样，则月桂树上树叶的总数为 $N=\frac{4\pi r^2}{s}$。例如，当半径 $r=0.5$ m 时，树冠的表面积大约是 $s=3\ \mathrm{m}^2$。如果一片树叶的面积是 1 cm^2，则树叶总数 $N=3\times10^4$ 片。

[问题 4]　一个特殊物种鼻涕虫，它的体重的 80%都是水。假设由于蒸发，它失去了身体中 1/4 的水。问脱水后体重中水的百分比是多少？

假设鼻涕虫在水分蒸发前与蒸发后的体重分别为 W_1、W_2。可以认为体重都是由水和剩余的物质组成的，即

$$W_1=0.8W_1+0.2W_1,$$

所以

$$W_2=0.75\times(0.8W_1)+0.2W_1=0.6W_1+0.2W_1=0.8W_1。$$

因此脱水后水的百分比是 $\frac{0.6W_1}{W_2}=\frac{0.6W_1}{0.8W_1}=75\%$。

[问题 5]　一个农民收获了 10 t 西瓜，并且将它们通过卡车运送到 200 km 外的城镇，由于夏日炎热，到达目的地时，西瓜有点干了，事实上西瓜的水分已经下降了 1%，水的含量从 99%降到了 98%，问：当到达城镇时，西瓜的总质量是多少？

假设 W_1 表示西瓜刚摘下时的质量，W_2 表示西瓜运到城镇后的质量。西瓜可以看成是由水和剩余物质组成的，所以西瓜的质量等于水的质量加上剩余物质的质量，即

$$W_1=0.99W_1+0.01W_1,W_2=0.98W_2+0.02W_2。$$

但是剩余物质的质量不会改变，因此有 $0.01W_1=0.02W_2$，所以 $W_1=2W_2$，即西瓜运到城镇后质量只有原来的一半，即到达城镇时，西瓜的质量只有 5 t。

[问题 6]　很多人都爱吃水果，比如香蕉、苹果、桃子、橘子等，这些水果中有的果皮较厚，有的核较大，我们估算下选择哪种水果较划算。

如果买香蕉，假设香蕉是一个圆柱体，它的长度为 L，底面半径为 r，L 比 r 大，假设香蕉皮的厚度为 h（不妨看成原来香蕉半径的 10%），则圆柱体香蕉的体积为 $V_1=\pi r^2L$，当剥去皮之后它的体积为 $V_2=\pi(r-h)^2L$，则体积比原来减少了

$$\frac{V_1-V_2}{V_1}=\frac{2\pi rhL-\pi h^2L}{\pi r^2L}=\frac{2rh-h^2}{r^2}。$$

把 $h=0.1r$ 代入，则 $\frac{V_1-V_2}{V_1}=0.19=19\%$。

如果买橘子，假设橘子是一个规则的球体，半径为 r，橘子皮的厚度 h 是半径的 10%。则橘子的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，剥去皮之后的体积比原来减少了

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi(r-h)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=1-(1-0.1)^3=27.1\%。$$