21世纪大学公共数学系列教材

概率论与数理统计（第二版）学习指导

姚孟臣　编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

概率论与数理统计（第二版）学习指导

姚孟臣 编著

Math

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（第二版）学习指导/姚孟臣编著. —2 版. —北京：中国人民大学出版社，2016.12

21 世纪大学公共数学系列教材

ISBN 978-7-300-23686-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①姚… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 282725 号

21 世纪大学公共数学系列教材

概率论与数理统计（第二版）学习指导

姚孟臣　编著

Gailülun yu Shuli Tongji (Di-erban) Xuexi Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司	**版　　次**	2006 年 12 月第 1 版
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本		2016 年 12 月第 2 版
印　　张	17.5 插页 1	**印　　次**	2016 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	426 000	**定　　价**	32.00 元

前　言

本书是与21世纪大学公共数学系列教材《概率论与数理统计（第二版）》（姚孟臣编著）配套的学习辅导书。

本书作为该教材的配套辅导书，紧扣教材编写大纲，围绕各章节的基本概念、基本定理和方法，精心组织典型例题和习题，力求在帮助读者同步学习的过程中发挥总结、答疑、解惑、提高的辅助功能。对于计划报考研究生的读者来说，本书将为其构筑从搞好基础学习到增强数学能力，进而实现考研梦想的桥梁。全书包括五个部分：

1. **知识结构与内容提要**　归纳总结各章知识点的相互关联和各章逻辑结构。

2. **难点重点**　说明各章应注意的难点、重点，明确学习要求。

3. **典型例题解析**　按照各章知识点和问题类型的自然顺序，通过各种典型例题解析，巩固和加深对基本概念的理解，扩展解题思路，提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力。

例题选择将本着"助学"和"提高"的原则，采取从易到难、循序渐进、点面结合的方法来处理，其中既有对教材基本知识进行解读的基础题，又有历届研究生入学考试中具有典型性和代表性的考研题。例题形式有填空题、选择题、解答题三种。每一道例题的讲解过程一般都要包含解题思路分析、例题解答、例题的举一反三，即基于例题的需要思考和注意的问题。

4. **综合练习题及其解答**　为了学生有更多解题能力的训练，也是为了弥补教材中习题数量以及广度和难度上的不足，本书每章都选编了一定数量的与例题搭配的习题，其中大多数习题与研究生入学考试考研数学题型接轨，这既能满足数学基础较好的学生期望学习更多概率论与数理统计知识的需要，也能满足计划报考研究生的学生备考的需要。各章最后一部分将给出习题参考答案，其中难题将提供必要的解题思路或提示。

此外，我们将配套教材中的习题全部作了解答，以帮助读者解决课程学习中遇到的困难。

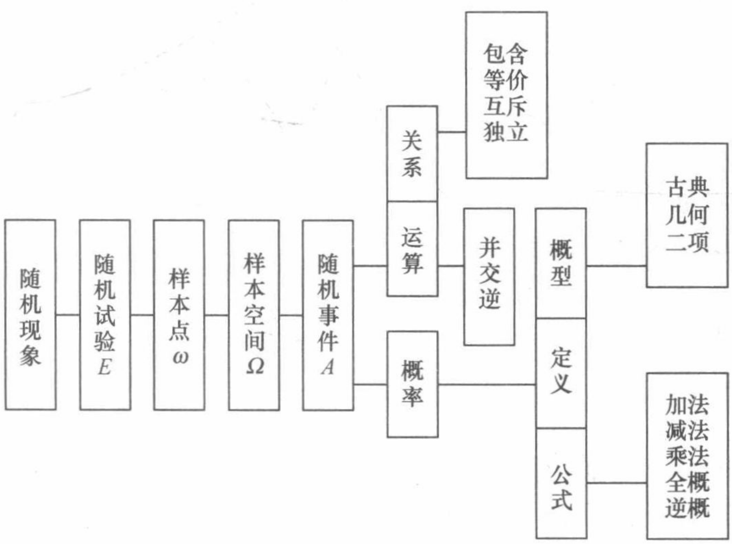
无论是从内容还是结构而言，本书都称得上是一本学习概率论与数理统计课程的理想的助学参考书；同时，对于计划报考硕士研究生的读者而言，本书也是一本理想的有助于全面复习概率论与数理统计知识以达到备考目的的复习辅导书。

目　录

第1章

随机事件及其概率

一、知识结构与内容提要



(一) 样本空间与随机事件

具有下列三个特征的试验称为**随机试验 E**:

(1) 在相同的条件下,试验可以重复地进行;

(2) 试验的结果不止一种,而且事先可以确知试验的所有结果;

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果.

试验的结果称为**基本事件**或**样本点**,用 ω 表示;由全体基本事件构成的集合称为**基本事**

件空间或**样本空间**，记为 Ω.

在随机试验中，把一次试验中可能出现也可能不出现，而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**（简称**事件**）. 所谓一个随机事件 A 发生，当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生.

通常把**必然事件**（记为 Ω）和**不可能事件**（记为 $\varnothing$）看做特殊的随机事件.

（二）事件的关系与运算

1. 随机事件之间的关系及运算

（1）**包含** 如果事件 A 发生则事件 B 一定发生，即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B \supset A$.

（2）**相等** 如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生或不发生，则称事件 A，B **相等**，记为 $A=B$.

（3）**互不相容** 如果事件 A 和 B 不能同时发生，即它们的积事件是不可能事件，则称事件 A 与 B **互不相容**（**或互斥**），记为 $AB=\varnothing$.

（4）**互逆** 如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生，反之亦然，则称事件 A 和 B **互逆**（**或互余**），此时称 B 是 A 的**逆事件**，记为 $B=\overline{A}$.

（5）**事件的和** "事件 A 与 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**（**或并事件**），记为 $A\cup B$（或 $A+B$）. 它可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

（6）**事件的积** "事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**（**或交事件**），记为 $A\cap B$（或 AB）. 它可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

（7）**事件的差** "事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$（或 $A\overline{B}$）.

2. 事件运算满足的规则

（1）$A+B=B+A$（加法交换律）；

（2）$A+(B+C)=(A+B)+C$（加法结合律）；

（3）$A+A=A$； （4）$A+\overline{A}=\Omega$；

（5）$AB=BA$（乘法交换律）； （6）$(AB)C=A(BC)$（乘法结合律）；

（7）$AA=A$； （8）$A\overline{A}=\varnothing$；

（9）$A(B+C)=AB+AC$（分配律一）；

（10）$A+BC=(A+B)(A+C)$（分配律二）；

（11）$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ （德·摩根律一）；

（12）$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ （德·摩根律二）.

（三）概率和条件概率的定义

1. 概率的古典定义

（1）试验结果的总数是有限的，（2）每个试验结果出现的可能性是相同的，具备这两个

特点的随机试验称为**古典型试验**.

定义 在古典型试验中,随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

其中,n 为 Ω 中包含的基本事件总数,m 为事件 A 中包含的基本事件数. 由关系式(1.1)计算事件概率的数学模型称为**古典概型**.

2. 概率的几何定义

(1) 试验的结果是无限的且不可数,(2) 每个试验结果出现的可能性是均匀的,我们把具备这两个特点的随机试验称为**几何型试验**.

定义 在几何概型随机试验中,如果 Ω 中的所有基本事件都可以用一个有界闭区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,那么随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1.2}$$

其中,$L(\Omega)$和 $L(A)$分别为 Ω 和 A 的几何测度,由关系式(1.2)计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

3. 概率的统计定义

独立地重复进行 n 次随机试验,设随机事件 A 发生的次数为 m,称 $f_n=\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

定义 在 n 次重复独立试验中,事件 A 发生的频率具有稳定性,即它在某一数 p 附近摆动,而且,一般来说,当 n 越大时,摆动幅度越小,则定义数值 p 为事件 A 发生的概率,即$P(A)=p$.

4. 概率的公理化定义

定义 设 E 是一个随机试验,Ω 为它的样本空间,以 E 中所有随机事件组成的集合 $\mathscr{F}$ 为定义域,对于任一随机事件 A,规定一个实值函数 $P(A)$,$A\in\mathscr{F}$. 如果 $P(A)$满足下列三个公理:

(1) (非负性)$P(A)\geqslant 0$,

(2) (规范性)$P(\Omega)=1$,

(3) (可列可加性)如果事件 $A_1,A_2,\cdots$互不相容,那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$是事件 A 的概率.

5. 条件概率的定义

设 A 与 B 是两个随机事件,其中 $P(B)>0$,规定

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

在同一条件下,条件概率具有概率的一切性质.

(四) 概率的计算公式

利用概率的公理化定义可推出下列概率的计算公式.

1. 加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC);$$

一般地

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sum P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\sum\sum P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n).$$

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\quad(\text{有限可加性}).$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B);$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

当 A,B,C 相互独立时,$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

3. 求逆公式

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

4. 求差公式

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地,当 $B\subset A$ 时,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

关于条件概率有相同的计算公式,如

$$P(\overline{A}|D)=1-P(A|D);$$
$$P((A-B)|D)=P(A|D)-P(AB|D);$$
$$P((A+B+C)|D)=P(A|D)+P(B|D)+P(C|D)-P(AB|D)-P(AC|D)-P(BC|D)+P(ABC|D).$$

(五) 全概率公式和贝叶斯公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,

(2) $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,

则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成了 Ω 的一个划分.

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 Ω 的一个划分，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

该公式称为**全概率公式**.

定理 如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 Ω 的一个划分，则对任意事件 $B(P(B)>0)$，在事件 B 发生的条件下事件 A_j 发生的条件概率为

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

该公式称为**贝叶斯公式**.

(六) 随机事件的相互独立性

定义 如果随机事件 A,B 满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则我们称**事件 A 和 B 相互独立**.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对任意两个事件 A_i,A_j，满足

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad (i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n),$$

则我们称**事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立**.

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对任意 $k(1<k\leqslant n)$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称**事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立**.

定理 如果 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$)，则事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$(或 $P(A|B)=P(A)$).

定理 事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是下述三者之一：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$；

(2) 当 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$ 时，

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})；$$

(3) 当 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$ 时，

$$P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1.$$

定理 若事件 A 和 B 相互独立，则

(1) 事件 A 与事件 $\overline{B}$ 也相互独立；

(2) 事件 $\overline{A}$ 与事件 B 也相互独立；

(3) 事件 $\overline{A}$ 与事件 $\overline{B}$ 也相互独立.

(七) 随机试验的相互独立性，伯努利概型

定义 对于随机试验 $E_i(i=1,\cdots,n)$，设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件，如果

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称**随机试验** $E_i(i=1,\cdots,n)$是**相互独立**的.

如果在一次随机试验中,仅关心随机事件 A 是否发生,即只考虑 A 和 $\overline{A}$ 两个试验结果,则称这种试验为**伯努利试验**. 如果重复独立进行 n 次伯努利试验,则将它们合在一起称为 **n 重伯努利试验**.

定理 设在一次伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p,则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生(用 μ 表示)k 次的概率为

$$P(\mu=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,\cdots,n).\tag{1.3}$$

由关系式(1.3)计算概率的数学模型称为**二项概型**,二项概型也称为**伯努利概型**或**独立试验序列概型**.

二、难点重点

1. 事件的关系与运算

事件的基本关系为: 包含、等价、互斥、独立四种;事件的基本运算为: 并、交、逆三种. 对其定义应从事件的发生、文氏图、样本点的集合、事件的概率等方面正确理解. 注意区分概率为 0 的事件与不可能事件;概率为 1 的事件与必然事件;事件的互斥与独立等概念. 对于比较复杂的事件能够利用事件的基本关系与运算表示出来是正确计算其概率的前提. 需要指出的是,事件的"差"不是基本运算,建议在解题时,用基本运算来表示,即 $A-B=A\overline{B}$.

2. 三个基本概型

古典概型、几何概型和二项概型给出了直接计算事件概率的公式.

(1) **古典概型** 关键是确定样本空间中样本点总数 n 以及事件 A 包含的样本点数 m. 注意, n 与样本空间的选取有关,在解题时要选取古典型试验的空间. 古典概型是难点,但不是重点.

(2) **几何概型** 它是将等可能性推广到无限(且不可列)样本空间的情形,关键是确定这种场合中的样本空间 Ω 以及适当的测度(即几何度量).

(3) **二项概型** 它是 n 重伯努利试验中的一种情形,关键是确定在一次试验中事件 A 发生的概率 p 以及在 n 次试验中 A 发生的次数 μ.

3. 三大公式

这里所说的三大公式指的是: 加法公式、乘法公式以及全概公式. 掌握在不同情况下使用它们的条件,是事件概率运算的重点. 特别是在应用全概公式时,关键是确定一个完备事件组,找出先验概率和条件概率.

4. 条件概率与贝叶斯公式

条件概率是一个整体概念,确定条件概率值时,常用的有公式法和改变样本空间 Ω 应用其他方法(如古典概型、二项概型). 贝叶斯公式是一个条件概率,也称为后验概率,应用其解题时,关键是确定一个完备事件组,找出先验概率与条件概率.

三、典型例题解析

(一) 样本空间与随机事件

例 1—1 设 E_1 为从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)中任取 3 件,观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品($i=0,1,2$),于是 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 1—2 设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击,直到击中目标为止,观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次($i=1,2,\cdots$),于是 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 1—3 设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过,乘客完全不知道列车通过该站的时间,观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω. 显然有 $\omega\in[0,5)$,即 $\Omega=[0,5)$.

例 1—4 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子点数之和;

(2) 10 件产品中有 3 件是次品,每次从中取 1 件,取出后不再放回,直到 3 件次品全部取出为止,记录抽取的次数;

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品,记录生产产品的总件数;

(4) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度.

解 (1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$;

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$;

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$;

(4) 设 x,y,z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度,有

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

评注 通过上面的几个例子可以看出,随机试验大体可以分成只有有限个可能结果(如 E_1)、有可列个可能结果(如 E_2)和有不可列个可能结果(如 E_3)这三种情况.

应该说明的是,一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外,一个随机试验的条件有的是人为的,有的是客观存在的. 在后一种情况下,每当试验条件实现时,人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果,但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此,我们所讨论的随机试验有着十分广泛的含义.

(二) 事件的关系与运算

例 1—5 设 A,B,C 是三个随机事件,试用 A,B,C 表示下列各事件:

(1) 恰有 A 发生; (2) A 和 B 都发生而 C 不发生;

(3) 所有这三个事件都发生; (4) A,B,C 至少有一个发生;

(5) 至少有两个事件发生; (6) 恰有一个事件发生;

(7) 恰有两个事件发生; (8) 不多于一个事件发生;

(9) 不多于两个事件发生; (10) 三个事件都不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$; (2) $AB\overline{C}$; (3) ABC;

(4) $A+B+C$；　　(5) $AB+BC+CA$；　(6) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(7) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；(8) $\overline{AB+BC+CA}$；　(9) $\overline{ABC}$；

(10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1—6　下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系？

(1) $AB=A$；　(2) $A+B=A$.

解　(1) 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$ 且 $A\subset AB$”是等价的，由 $A\subset AB$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $A\subset B$，因此有 $A\subset B$.

(2) 因为“$A+B=A$”与“$A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$”是等价的，由 $A+B\subset A$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $B\subset A$，因此有 $B\subset A$.

评注　事件间关系与运算法则的知识更多是用在计算概率时，往往将要计算概率的某一事件用另一些事件的运算来表示. 此时，熟悉事件的运算法则对于分析事件的结构会有很大帮助. 因此读者一定要熟练掌握事件间的关系与运算.

例 1—7　如果事件 A,B,C 两两互不相容，$A+B+C=\Omega$，则 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 与 Ω 的关系为________；$\overline{A}\overline{B}$ 与 $\varnothing$ 的关系为________.

答案是： 相等，包含.

分析　$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}=\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}$. 由于 $A+B+C=\Omega$，因此，$A+B\subset\Omega$，$\overline{A+B}=\Omega-(A+B)\supset\varnothing$，即 $A+B+C$ 与 Ω 是相等关系，$\overline{A}\overline{B}$ 与 $\varnothing$ 是包含关系. 也就是说 $\overline{A}\overline{B}$ 不一定是不可能事件 $\varnothing$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不一定互不相容，对于 $\overline{A}$ 与 $\overline{C}$，$\overline{B}$ 与 $\overline{C}$ 也是同样.

评注　两个对立事件 A 与 B 的对立事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定也是对立事件. 但是两个以上事件 $A_1,\cdots,A_n(n>2)$ 构成的完备组的对立事件 $\overline{A}_1,\cdots,\overline{A}_n$ 一般不是一个完备组.

例 1—8　随机事件 A 与 B 互不相容，且 $A=B$，则 $P(A)=$________.

答案是： 0.

分析　由于 $A=B$，于是，有 $AB=A=B$，又由于 A 与 B 互不相容，因此 $AB=\varnothing$，即 $A=B=\varnothing$. 所以 $P(A)=0$.

评注　从此例我们得出的结论是：两个互不相容的事件如果相等，则它们一定都是不可能事件.

例 1—9　假设 A,B 是两个随机事件，且 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则 $A+B=$________，$AB=$________.

答案是： Ω，$\varnothing$.

分析　由于 $A+B$ 与 $\overline{A+B}$ 互不相容，于是，$A+B$ 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互不相容，但是 $A+B\supset AB$，因此有 AB 与 $\overline{A}\overline{B}$ 互不相容. 又因 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，从上例可知 $AB=\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，因此 $A+B=\Omega$，即 A 与 B 为对立事件.

例 1—10　下列事件中与 A 互不相容的事件是(　　).

(A) $\overline{ABC}$；　　(B) $\overline{A+B+C}+\overline{B+C}$；

(C) $\overline{A(B+C)}$；　　(D) $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})$.

答案是： (D).

分析　由于 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\varnothing$，而不可能事件 $\varnothing$ 与任何一个事件 A 都互不相容，即 $A\varnothing=\varnothing$；而

$$A(\overline{ABC})=A(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})=A\overline{B}+A\overline{C};$$

$$A(\overline{A+B+C}+\overline{B+C})=A(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C})=A\overline{B}\,\overline{C};$$

$$A\,\overline{\overline{A}(B+C)}=A(\overline{\overline{A}}+\overline{B+C})=A(\overline{B+C})=A\overline{B}\overline{C}.$$

综上分析,应选(D).

例 1—11 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则( ).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$;

(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$;

(C) $P(C)=P(AB)$;

(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

答案是: (B).

分析 由于 $AB\subset C$, $1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-P(C)$. 所以 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 应选(B). (A)显然错误,仅由 $AB\subset C$ 不能推出(C)和(D).

例 1—12 已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1\cup A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$,则下列选项成立的是( ).

(A) $P[(A_1\cup A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$;

(B) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$;

(C) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$;

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

答案是: (B).

分析 由于 $P[(A_1\cup A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$,则

$$\frac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}\quad (P(B)\neq 0).$$

所以(B)成立.

由于 A_1 和 A_2 不一定是 Ω 的划分,(D)不成立;由于 $P(A_1\cup A_2)$不一定等于 $P(A_1)+P(A_2)$,(A)不成立;(C)式显然不成立.

(三) 概率和条件概率的定义

例 1—13 假设随机事件 A 与 B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$________.

答案是: $1-p$.

分析 由于 $P(A)$为已知,因此解决此问题应寻求 $P(B)$与 $P(A)$之间的关系.

由于 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$,有

$$P(AB)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)],$$
$$P(A)+P(B)=1,\quad P(B)=1-P(A)=1-p.$$

例 1—14 假设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(A)=P(\overline{B})=a-1$, $P(A+B)=\frac{7}{9}$,则 $a=$________.

答案是: $\frac{4}{3}$或$\frac{5}{3}$.

分析 由于 $P(\bar{B})=a-1$,可知 $P(B)=2-a$, $P(A)P(B)=(a-1)(2-a)$,应用公理化的有关推论,可以建立以 a 为未知数的方程,并解出 a.

由 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$,即

$$\frac{7}{9}=a-1+2-a-(a-1)(2-a),$$

亦即 $a^2-3a+\frac{20}{9}=0$,因此 $a=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$.

评注 将概率的有关性质与事件间的关系和运算法相结合对解决问题是非常有益的,特别应该注意到在事件间具备某种关系时,有关概率公式(如加法公式、乘法公式等)的使用.

例 1—15 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中随意取出一件,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率为______.

答案是: $\frac{2}{3}$.

分析 设抽到 i 等品事件为 A_i ($i=1,2,3$).

$$P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.3,\quad P(A_3)=0.1.$$
$$P(A_1|\bar{A}_3)=P(A_1\bar{A}_3)/P(\bar{A}_3)=P(A_1)/[1-P(A_3)]$$
$$=0.6/(1-0.1)=\frac{2}{3}.$$

其中,由于 A_1,A_3 不相容,$A_1\bar{A}_3=A_1$.

例 1—16 假设 A,B 是两个随机事件,则一定有( ).

(A) $P(\bar{A}+\bar{B})=1$; (B) $P(\bar{A}+\bar{B})=0$;

(C) $0<P(\bar{A}+\bar{B})<1$; (D) $P(\bar{A}+\bar{B})=1-P(AB)$.

答案是: (D).

分析 当 $P(A)+P(B)>1$ 时,$P(\bar{A}+\bar{B})=2-[P(A)+P(B)]-P(\bar{A}\bar{B})<1$;

当 $P(AB)<1$ 时,$P(\bar{A}+\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)>0$;

当 A 与 B 对立时,$P(\bar{A}+\bar{B})=1\not<1$.

综上分析,应选(D).

例 1—17 为了防止意外,在矿内同时设有甲、乙两种报警系统,每种系统单独使用时,其有效的概率,甲系统为 0.92,乙系统为 0.93,在甲系统失灵的条件下,乙系统仍有效的概率为 0.85. 求:

(1) 发生意外时,这两个报警系统至少有一个有效的概率;

(2) 在乙系统失灵的条件下,甲系统仍有效的概率.

解 首先我们将已知条件赋予概率符号. 设事件 A,B 分别表示系统甲、乙单独使用时有效. 依题意,$P(A)=0.92$,$P(B)=0.93$,$P(B|\bar{A})=0.85$.

(1) $P(A+B)=P(A)+P(\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$$=0.92+0.08\times0.85=0.988;$$

(2) $P(A\bar{B})=P(A+B)-P(B)=0.988-0.93=0.058$;

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.058}{0.07}\approx0.83.$$