张宇数学教育系列丛书

2018

张宇考研数学题源探析经典1000题

解析分册·数学三

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇考研数学题源探析经典1000题

解析分册·数学三

张宇○主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学三 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社,2017.4

ISBN 978－7－5682－3939－4

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第075938号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 17.5
字　　数 / 437千字
版　　次 / 2017年4月第1版　2017年4月第1次印刷
定　　价 / 56.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

Contents 目录

第一篇 微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　微积分

第 1 章　函数、极限、连续

A 组

一、选择题

1.1. (B) 【解析】若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$，故(B)正确.

若取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=1$，则满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，且 $\{x_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时是无穷小量、有界量、单调递减，但 $\{y_n\}$ 不是无穷小量，排除(A)，(C)，(D).

1.2. (D) 【解析】对于命题①，由数列收敛的定义可知，若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|u_n-A|<\varepsilon,$$

则当 $n_i>N$ 时，恒有

$$|u_{n_i}-A|<\varepsilon,$$

因此数列 $\{u_{n_i}\}$ 也收敛于 A，可知命题正确.

对于命题②，不妨设数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的，即

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

其中某一给定子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n_i>N$ 时，恒有

$$|x_{n_i}-A|<\varepsilon.$$

由于数列 $\{x_n\}$ 为单调增加的数列，对于任意的 $n>N$，必定存在 $n_i\leqslant n\leqslant n_{i+1}$，有

$$-\varepsilon<x_{n_i}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{i+1}}-A<\varepsilon,$$

从而

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

可知数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 因此命题正确.

对于命题③，因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$，由极限的定义可知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，必定存在自然数 N_1，N_2：

当 $2n>N_1$ 时，恒有

$$|x_{2n}-A|<\varepsilon;$$

当 $2n+1>N_2$ 时，恒有

$$|x_{2n+1}-A|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，总有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

【注】本题命题③为 2015 年考研实考题，提醒读者注意基本功训练.

1.3. (D) **【解析】**令 $g(x)=\varphi[\varphi(x)]$，注意 $\varphi(x)$ 是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x),$$

因此 $\varphi[\varphi(x)]$ 为奇函数. 同理可得 $f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 均为偶函数. 答案选(D).

1.4. (B) **【解析】**注意在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内，$\sin x$ 是增函数，$\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，有 $\cos x_1>\cos x_2$，所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即 $f(x)$ 是减函数；由于 $\sin x_1<\sin x_2$，所以 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【注】复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 是增函数，而 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是减函数.

1.5. (C) **【解析】**因为 $f(x+2k)=\dfrac{1}{f(x+k)}=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数.

1.6. (D) **【解析】**$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.7. (C) **【解析】**令 $u(x)=\dfrac{2}{x}$，$v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x)=v(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x)=\dfrac{1}{x}$，$v(x)=-\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(D).

1.8. (D) **【解析】**如 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小量. 但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低.

1.9. (A) **【解析】**对于任意给定的正数 M，总存在着点 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使 $|f(x_n)|=\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(C) 错，因为对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x\left(只要\ |n|>\dfrac{x}{2\pi}\right)$，使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.10. (B) **【解析】方法一**　若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$ 在点 x_0 处也连续，与已知矛盾.

方法二　排除法. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，$f(x)\sin x$ 在 $x=0$ 处连续. 若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $f^2(x)=1$，$|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续. 故可排除(A)，(C)，(D).

二、填空题

1.11. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ **【解析】**当 x 充分大时，有重要关系：$e^{\alpha x}\gg x^{\beta}\gg\ln^{\gamma}x$，其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$，故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.12. $\frac{1}{2}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$.

1.13. 0 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

1.14. e^6 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{\sin x}\right\}=e^6$.

1.15. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

1.16. $-\frac{1}{6}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2(-x)}=-\frac{1}{6}$.

1.17. e^6 **【解析】**$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}\right\}=e^6$.

1.18. $\frac{1}{3}$;1 **【解析】**当 $x\to -1$ 时,

$$\sqrt[3]{x}+1\xlongequal{t=x+1}\sqrt[3]{t-1}+1=-(\sqrt[3]{1-t}-1)\sim-\left(-\frac{1}{3}t\right)=\frac{x+1}{3}.$$

故$A=\frac{1}{3},k=1$.

三、解答题

1.19.【解】由 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<g(x)<1,\\ g(x), & 1\leqslant g(x)<e\end{cases}$ 得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ e^x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

【注】在求 $f[g(x)]$ 时,既要将解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$,同时也要把表示自变量变化范围处的 x 换为 $g(x)$,并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

1.20.【解】(1) 当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x$,$(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\sin x\sim\frac{x}{n}$,故原极限 $=\frac{1}{n}$.

(2) 当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)\sim 2x$,故原极限 $=2$.

(3) 当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x^4)\sim x^4$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$1-\cos\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}x^2$,故原极限 $=\frac{1}{16}$.

(4) 这是"1^∞"型未定式极限,可用公式$\lim\limits_{x\to 0}u^v=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}v(u-1)\right\}$来计算,事实上 $\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1(u\to 1)$. 故原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^x=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}\right\}=e^{-2}$.

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cos^2 x}{\sin^2 x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{x}{1+\ln x}} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1+\ln x}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+} x\left(1-\frac{1}{1+\ln x}\right)\right\} = e^0 = 1.$

(8) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^4} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{\frac{4}{3}x^3} = \dfrac{3}{2}.$

1.21.【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2} = e\cdot\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2}\right) = \dfrac{3}{2}e.$

1.22.【解】 因为 $x\to0$ 时，$\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1 = \exp\left\{x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}\right\} - 1 \sim x\ln\dfrac{2+\cos x}{3}$，而

$$\ln\frac{2+\cos x}{3} = \ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right) \sim \frac{\cos x-1}{3} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3} = -\frac{1}{6}x^2,$$

故原极限 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\dfrac{1}{6}.$

1.23.【解】 为了在使用洛必达法则时求导变得简单，先做变量代换，令 $t=\dfrac{1}{x}$，从而

$$原式 = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{1+e^t}{e^t} = 2.$$

1.24.【解】 此题为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，若用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

连续使用完两次法则，又回到了起点，法则失效，正确的做法是先对式子恒等变形.

分子分母同乘 e^{-x}，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$

1.25.【解】 原极限 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$

1.26.【解】 设函数 $y=\sin t$，在 $[\sqrt{x},\sqrt{x+1}]$ 上连续，在 $(\sqrt{x},\sqrt{x+1})$ 内可导，满足拉格朗日中值定理的条件. 故

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cos\zeta\ (\sqrt{x}<\zeta<\sqrt{x+1}).$$

$$原极限 = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cos\zeta = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\zeta}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$$

1.27.【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}e^x-a=0$，故 $a=1$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x-b\sin x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-b\cos x}{e^x} = 1-b=5,$

所以 $b=-4$.

1.28.【解】 $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，于是

$$\ln(1-2x+3x^2) = -2x+3x^2-\frac{1}{2}(-2x+3x^2)^2+o(x^2) = -2x+x^2+o(x^2),$$

代入即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(a-2)x+(b+1)x^2}{x^2}=4,$$

即$\begin{cases}a-2=0,\\b+1=4\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$

1.29.【解】 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，故由夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

1.30.【解】不正确.初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合步骤所得到的，并用一个式子表示的函数.分段函数虽用几个表达式表示，但并不能说肯定不能用一个表达式表示，因此，分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数，如$\varphi(x)=|x|$，通常写成分段函数的形式$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0,\end{cases}$但也可以写成一个表达式$\varphi(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，所以函数$\varphi(x)=|x|$是分段函数也是初等函数.而$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0,\end{cases}$则不是初等函数.

【注】虽然有些分段函数是初等函数，但把它写成一个表达式时，无助于我们讨论它的性质，相反，常会给我们增加麻烦.因此对于分段函数，除特殊需要外，通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数.

一般地，如果$f(x)$在$[a,c]$上是初等函数，$g(x)$在$[c,b]$上是初等函数，且$f(c)=g(c)$，那么分段函数$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\g(x), & c<x\leqslant b\end{cases}$必是初等函数，因为这时$\varphi(x)$可以写成一个表达式：

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+g\left(\frac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-f(c),x\in[a,b].$$

1.31.【解】令$x^n-t^n=u$，则$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{2n}}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{f'(0)}{2n}.$$

1.32.【解】$f(x)$无定义的点是使$1-x=0$和$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$的点，即$x=1$和$x=0$，所以$f(x)$的连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

当$x\to 0$时，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以$x=0$是无穷间断点；

当$x\to 1^-$时，$\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to-\infty$，所以$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$；

当$x\to 1^+$时，$\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 1$，所以$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$.所以$x=1$是跳跃间断点.

1.33.【解】本题考虑夹逼准则.由$f(x)$在$[a,b]$上连续，知$\mathrm{e}^{f(x)}$在$[a,b]$上非负连续，那么存在M,n，使得M,m分别为$\mathrm{e}^{f(x)}$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则有$0<m\leqslant\mathrm{e}^{f(x)}\leqslant M$，于是

$$0<m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}\leqslant M,$$

故
$$\sqrt[n]{m} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{f(x_k)}} \leqslant \sqrt[n]{M},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M} = 1$，根据夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{f(x_k)}} = 1$.

1.34.【证】已知 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_2=0$，则 $f(x_1)=f(x_1)+f(0)$，可得 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，两边取极限得到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$，故函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

1.35.【解】$k\leqslant 0$ 时，$I=-\infty$ 不存在；

$k>0$ 时，$I \xlongequal[\text{令 } x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty} \lim\limits_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t^\alpha}+\frac{8}{t^4}+2\right)^k-\frac{1}{t}\right]$（注意 $\alpha\geqslant 5$）

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}},$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\frac{1}{\alpha}$ 时，极限为“$\frac{0}{0}$”型，否则极限为 ∞，不存在. 故

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)}{t},$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{5}(8t+2t^5)}{t}=\dfrac{8}{5}$，此时 $k=\dfrac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\dfrac{1}{\alpha}$.

B组

一、选择题

1.1. (B) **【解析】**令 $\frac{1}{x}=t$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}=\dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha\neq 1)$.

1.2. (D) **【解析】**设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x)=x$，当 $x\to 0$ 时为无穷小，可排除(A). 设 $x\to 0$ 时，令 $f(x)=x^2, g(x)=\frac{1}{x}$ 可排除(B),(C).

1.3. (A) **【解析】**有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小.

1.4. (C) **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq 0,$$

则 $n=3$ 时，$C=\frac{1}{3}$.

1.5. (A) **【解析】**由泰勒公式 $\sin ax=ax-\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)(x\to 0)$，

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

故
$$a=1,b=-\frac{1}{6}.$$

1.6. (C) **【解析】**由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}$，当$b\neq 0$时，该极限为$\infty$，于是，$b=0$. 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2}{\sin^2 x}=3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}.$$

1.7. (D) **【解析】**若$\lambda>0$，则必存在一个x使得$\lambda-e^{-kx}=0$，即分母为0，矛盾. 故$\lambda\leqslant 0$；又$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$，故$k>0$.

1.8. (A) **【解析】**$x=0$和$x=1$为$f(x)$的间断点，其余点连续.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0}\ln|x|\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则$x=0$为可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x\xlongequal{(*)}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}\sin x=\begin{cases}\sin 1, & x\to 1^+,\\ -\sin 1, & x\to 1^-,\end{cases}$$

(*)处因$x\to 1$时，$\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$，则$x=1$为跳跃间断点. 答案选择(A).

1.9. (A) **【解析】**不妨设$f(x)$单调增加，且$|f(x)|\leqslant M$，对任一点$x_0\in(a,b)$，当$x\to x_0^-$时，$f(x)$随着x增加而增加且有上界，故$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在；当$x\to x_0^+$时，$f(x)$随着$x$减小而减小且有下界，故$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在，故$x_0$只能是第一类间断点.

二、填空题

1.10. na **【解析】**令$x=-1$，则$f(1)=f(-1)+f(2)$，因$f(x)$是奇函数，得到
$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a.$$
再令$x=1$，则$f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$，现用数学归纳法证明$f(n)=na$.

当$n=1,2,3$时，已知或者已证. 假设$n\leqslant k$时，有$f(k)=ka$.

当$n=k+1$时，
$$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a,$$
故对一切正整数n，有$f(n)=na$.

令$x=0$，则$f(2)=f(0)+f(2)$，即$f(0)=0=0\cdot a$，又$f(x)$是奇函数，故对一切负整数n有
$$f(n)=-f(-n)=-(-na)=na.$$
所以对一切整数n，均有$f(n)=na$.

1.11. 2 **【解析】**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}=2.$$

1.12. 5；$\frac{1}{4^5}$ 【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}\cdot x^{5-\alpha}=$ $4^{-\alpha}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0$，所以 $\alpha=5,\beta=\frac{1}{4^5}$.

1.13. -3 【解析】当 $x\to 0$ 时，$\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\dfrac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\dfrac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2$，

$$\frac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim 6x^2,$$

故 $a=-3$.

1.14. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a.\ f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim_{x\to 0^-}f(x)=a.$$

三、解答题

1.15.【解】本题考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先，广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant 0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知，

当 $g(x)\leqslant 0$ 时，即 $\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}$ 或 $\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant-\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant-\ln 2\},$$
$$\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant 1\};$$

当 $g(x)>0$ 时，即 $\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}$ 或 $\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$，而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x>-\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{-\ln 2<x\leqslant 0\},$$
$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1\text{ 或 }x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上，得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, & x\leqslant-\ln 2,\\ \ln(2e^x-1), & -\ln 2<x\leqslant 0,\\ (x^2-1)^2-1, & 0<x\leqslant 1,\\ \ln(x^2-1), & x>1.\end{cases}$

1.16.【解】因为 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$，又 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.17.【解】(1) 这是"$\infty-\infty$"型未定式极限，首先通分变成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

或利用等价无穷小 $e^x-1\sim x$（当 $x\to 0$）代换，则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$ 等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是"1^∞"未定式型极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

根据海涅定理，原式 $=\frac{1}{1-2a}$.

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\frac{1}{6}$. 投命题者所好，当狗 $\to0$ 时，狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$ 狗^3.

(4) 当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x$，$x\sin^2x\sim x^3$，故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\left(当 x\to0 时，\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x - x}{x^3}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\right\} = e^{\frac{1}{3}}.$$

根据海涅定理，取 $x = \dfrac{1}{n}$，则原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

(7) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x + x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x} + x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] \xlongequal{令\frac{1}{x}=t} \lim\limits_{t\to0^+}\left[\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

根据海涅定理，原式 $= \dfrac{1}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x} - \left(\dfrac{1}{x^2} - a^2\right)\ln(1+ax)\right] = \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right] + 0$

$$= \lim_{x\to0}\frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{a - \dfrac{a}{1+ax}}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)} = \frac{a^2}{2}.$$

(10) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x+a}\cdot\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} = \dfrac{e^a\cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}$.

(11) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x} = \exp\{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln(\cot x)\} = \exp\{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(\cot x)\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cot x)}{1/x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin x\cos x}\right\}$$
$$= e^0 = 1.$$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{\dfrac{1}{2}x^3}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,dt}{\dfrac{3}{2}x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x} = \frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

(13) 原式 $= -\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x - 1\right]}{x^3} = -\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}} - 1}{x^3}$

$$= -\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x - x}{x}\right)}{x^2}$$

$= -\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.（注意常用公式：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x = 1$）

(14) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$；$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$；$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^2 2!} + o(x^4)$.