北大燕园

2018年 李正元·范培华

考研数学 1

数学

数学三

复习全书习题全解

主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

上架建议：考试·考研数学
ISBN 978-7-5620-7239-3
定价：67.80元
中国政法大学出版社

2018年李正元·范培华考研数学①

数学

数学三

复习全书习题全解

主编 北 京 大 学 范培华
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 李正元

中国政法大学出版社
2017·北京

目　　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

附：全书题型训练试题解答

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　微积分

▶ 第一章　函数、极限、连续

一、选择题

1. 在函数

①$f(x)=\dfrac{\sqrt{x\sin x}}{x}$，　　②$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，

③$f(x)=\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin\frac{1}{x}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$，　　④$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$

中当 $x\to 0$ 时极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在的是

(A) ①.　(B) ②.　(C) ③.　(D) ①②③④.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(A) 等于 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.　(B) 等于 $\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.　(C) 等于 e^{-6}.　(D) 不存在.

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\ln(1-2x)}{x^2}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=$

(A) 2.　(B) 4.　(C) 6.　(D) 8.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 间断，又 $f(a)\neq 0$，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 在 $x=a$ 处间断.　(B) $f[\varphi(x)]$ 在 $x=a$ 处间断.

(C) $[\varphi(x)]^2$ 在 $x=a$ 处间断.　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断.

5. “$f(x)$ 在点 a 连续”是 $|f(x)|$ 在点 a 处连续的(　　)条件.

(A) 必要非充分　(B) 充分非必要　(C) 充分必要　(D) 既非充分又非必要

6. 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散.　(B) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.　(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

7. $f(x)=x\sin x$

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.　(B) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　(D) 当 $x\to\infty$ 时有极限.

8. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,3)$

9. 若当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=o\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则 a,b,c 的值一定为

(A) $a=0,b=1,c$ 为任意常数.　(B) $a=0,b=1,c=1$.

(C) $a\neq 0,b,c$ 为任意常数.　(D) $a=1,b=1,c=0$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$,则下列结论错误的是

(A) $x=1,x=0,x=-1$ 为间断点. (B) $x=0$ 为可去间断点.

(C) $x=-1$ 为无穷间断点. (D) $x=0$ 为跳跃间断点.

11. 把当 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\tan x-x,\beta=\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$, $\gamma=\left(\dfrac{2-x^3}{2}\right)^x-1$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ. (B) γ,β,α. (C) β,α,γ. (D) γ,α,β.

12. 在 ① $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$, ② $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$, ③ $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$, ④ $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x^3}}$ 中,无穷大量是

(A) ①②. (B) ③④. (C) ②④. (D) ②.

二、填空题

1. 设 K,L,δ 为正的常数,则 $\lim\limits_{x\to0}[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}=$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0,\\ \dfrac{\sin(bx)}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续,则常数 a 与 b 满足的关系是________.

3. $1+x^2-\mathrm{e}^{x^2}$ 当 $x\to0$ 时是 x 的________阶无穷小(填数字).

4. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}=$ ________.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a^n+2}-\sqrt{a^n+1})(a>0)=$ ________.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}=$ ________.

7. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x^3)+xf(x)}{x^6}=3$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2x^2}{x^5}=$ ________.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

11. 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\sin\dfrac{3}{t}\mathrm{d}t=$ ________.

12. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t=4$,则 $a=$ ______, $b=$ ______.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin3x}{x}, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ 3+x\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\end{cases}$ 的连续区间是________.

三、计算题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}$,$t$ 为常数;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{(1+x)}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$；　　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax^2}\cos^{2a}x-1}{x^2}(a\neq0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$（$a,b,c$ 为正的常数）；　　(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{2}{x}}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos2t}{t^2}dt$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　　(14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{3+2\cos x}{5}\right)^x-1\right]$；

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$；　　(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x(a_1>0,a_2>0)$；

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$.

2. 设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0,f'(0)=6$，求 $w=\lim\limits_{x\to0}\left\{\displaystyle\int_0^{x^3}f(t)dt\Big/\left[\int_0^x f(t)dt\right]^3\right\}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$，求常数 A 与 k 使得当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 与 Ax^k 是等价无穷小量.

4. 讨论下列函数的连续性并判断间断点的类型：

(Ⅰ) $y=(1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(Ⅱ) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}-x\right)$；

(Ⅲ) $y=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$

(Ⅳ) $y=f[g(x)]$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$

5. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，求常数 $a>0$ 和 b 的值.

6. 设 $\lim\limits_{x\to0}(x^{-3}\sin3x+ax^{-2}+b)=0$，试确定常数 a,b 的值.

7. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\sin2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=a\neq0$，求 n 及 a 的值.

四、证明题

1. 证明：方程 $x=a\sin x+b$（$a>0,b>0$ 为常数）至少有一个正根不超过 $a+b$.

2. 求证：$e^x+e^{-x}+2\cos x=5$ 恰有两个根.

3. 设常数 $a<b<c$，求证：方程 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ 在区间 (a,b) 与 (b,c) 内各有且仅有一个实根.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$. 求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$，其中 $p>0,q>0$ 为任意常数.

5. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_0=25,x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求其极限.

6. 设数列$\{x_n\}$由递推公式$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)(n=1,2,\cdots)$确定，其中$a>0$为常数，$x_0$是任意正数，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

▶ 第二章　一元函数微分学

一、选择题

1. 设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内有定义，在$x=x_0$的某去心邻域内可导，则下列说法正确的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$，则$f'(x_0)$存在且等于$A$.

(B) 若$f'(x_0)$存在且等于A，则$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$.

(C) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\infty$，则$f'(x_0)$不存在.

(D) 若$f'(x_0)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\infty$.

2. 在命题

① 若$f(x)$在$x=a$处连续，且$|f(x)|$在$x=a$处可导，则$f(x)$在$x=a$处必可导，

② 若$\varphi(x)$在$x=a$处连续，则$f(x)=(x-a)\varphi(x)$在$x=a$处必可导，

③ 若$\varphi(x)$在$x=a$处连续，则$f(x)=(x-a)|\varphi(x)|$在$x=a$处必不可导，

④ 若$f(x)$在$x=a$处连续，且$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$存在，则$f(x)$在$x=a$处必可导

中正确的是

(A) ①②.　(B) ①③.　(C) ①②③.　(D) ②④.

3. 设$f(x)$在任意点$x_0\in(-2,+\infty)$有定义，且$f(-1)=1$，a为常数，若对任意$x,x_0\in(-2,+\infty)$满足$f(x)-f(x_0)=\frac{x_0-x}{2+x_0}+a(x-x_0)^2$，则函数$f(x)$在$(-2,+\infty)$内

(A) 连续，但不一定可微.　(B) 可微，且$f'(x)=\frac{x-x_0}{2+x_0}$.

(C) 可微，且$f'(x)=\frac{x_0-x}{2+x_0}$.　(D) 可微，且$f(x)=\ln\frac{\mathrm{e}}{2+x}$.

4. 若极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h^2)-f(a+h^2)}{\mathrm{e}^{h^2}-1}=A$，则函数$f(x)$在$x=a$处

(A) 不一定可导.　(B) 不一定可导，但$f'_+(a)=A$.

(C) 不一定可导，但$f'_-(a)=A$.　(D) 可导，且$f'(a)=A$.

5. 设有多项式$P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，又设$x=x_0$是它的最大实根，则$P'(x_0)$满足

(A) $P'(x_0)>0$.　(B) $P'(x_0)<0$.　(C) $P'(x_0)\leqslant 0$.　(D) $P'(x_0)\geqslant 0$.

6. 设$f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数$n=$

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

7. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域连续且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则$f(x)$在$x=0$处

(A) 不可导.　(B) 可导且$f'(0)\neq 0$.

(C) 有极大值.　(D) 有极小值.

8. 若$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$且$f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则

(A) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值.

(C) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

9. 曲线 $y=\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 渐近线的条数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

10. 曲线 $y=f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{3}{2}(x+1)\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}(x-1)\ln|x-1|$ 的拐点有

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

二、填空题

1. 设 $f(x)=\prod\limits_{n=1}^{2014}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4}-n\right)$,则 $f'(1)=$ ________.

2. 设 $f(x)=e^{\sin\pi x}$,则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=$ ________.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数存在,则极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续,则参数 λ 的取值范围为________.

5. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$,则 $f'(t)=$ ________.

6. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^{xy}$ 确定,则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ ________,$y''\big|_{x=0}=$ ________.

7. 设 $y=\sin x^2$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)}=$ ________.

8. 设 $y=\cos^3\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

9. 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$ ________.

10. 设 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x)=f^3(x)$,则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

11. 设 $y=\arctan x$,则 $y^{(4)}(0)=$ ________.

12. $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的极大值点是 $x=$ ______,极小值点是 $x=$ ______.

13. 设 $f(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$ ________处取极小值________.

14. 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为________.

15. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线方程为________.

16. 曲线 $(x-1)^3=y^2$ 上点 $(5,8)$ 处的切线方程是______.

17. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

18. 设某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=aP^b$,其中 a 和 b 是常数,且 $a>0$,则该商品需求对价格的弹性 $\dfrac{EQ}{EP}=$ ________.

19. 设某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=100-5P$. 若商品的需求弹性的绝对值大于 1,则该商品价格 P 的取值范围是________.

三、计算题与证明题

1. 计算下列各题：

(Ⅰ)$y = e^{\sin^2 x} + \sqrt{\cos x}\, 2^{\sqrt{\cos x}}$，求$\frac{dy}{dx}$． (Ⅱ)$y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$，求$\frac{dy}{dx}$． (Ⅲ)$y = e^{x\sin x}$，求 dy．

(Ⅳ)$y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$，求 y'，其中 $a > b > 0$．

2. 计算下列各题：

(Ⅰ) 由方程 $x^y = y^x$ 确定 $x = x(y)$，求$\frac{dx}{dy}$． (Ⅱ) 方程 $y^{-x}e^y = 1$ 确定 $y = y(x)$，求 y''．

(Ⅲ) 设 $2x - \tan(x-y) = \int_0^{x-y}\sec^2 t\,dt\,(x \neq y)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$．

3. 设函数 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$，且 $f(a) = 3, f'(a) = 1, f''(a) = 2$，求 $g''(3)$．

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的某邻域内可导，且当 $x \neq 0$ 时 $f(x) \neq 0$，已知 $f(0) = 0, f'(0) = \frac{3}{2}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1-f(x)]^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$．

5. 设 $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & x \leqslant 0, \\ \ln(1+x), & x > 0, \end{cases}$ 求 a,b,c 的值，使 $f''(0)$ 存在．

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0, \\ 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 试确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)$ 在$x = 0$ 处可导．

7. 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a．试求切线方程和这个图形的面积．当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

8. 求函数 $y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的单调区间，极值点及其图形的凹凸区间与拐点．

9. 已知 $f(x) = ax^3 + x^2 + 2$ 在 $x = 0$ 和 $x = -1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间、极值点和拐点．

10. 设 $f(x)$ 的定义域为$[1, +\infty)$，$f(x)$ 在$[1, +\infty)$ 可积，并且满足方程

$$f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

讨论 $f(x)$ 的单调性．

11. 求 a 的范围，使函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 - ax - 1$ 既无极大值又无极小值．

12. 设 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ x+2, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值．

13. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(Ⅰ) 求 $f'(x)$； (Ⅱ) 证明：$x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

(Ⅲ) 令 $x_n = \frac{1}{n\pi}$，考察 $f'(x_n)$ 是正的还是负的，n 为非零整数；

(Ⅳ) 证明：对 $\forall \delta > 0$，$f(x)$ 在$(-\delta, 0]$ 上不单调上升，在$[0,\delta]$ 上不单调下降．

14. 设 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt[x]{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 的连续性，并求其单调区间、极值与渐近线．

15. 求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x > 0)$ 的渐近线．

16. 求函数 $F(x)=\int_0^1(1-t)\,|x-t|\,\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的凹凸区间.

17. 证明:$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x\in(-\infty,+\infty))$.

18. 设 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+k$,讨论 k 的取值对函数零点个数的影响.

19. 设当 $x>0$ 时,方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解,求 k 的取值范围.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,在 $(a,+\infty)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$. 求证:存在 $\xi\in(a,+\infty)$,使 $f'(\xi)=0$.

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$. 求证:如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不恒等于零,则必存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)f'(\xi)>0$.

22. 设 $p(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且为负值. $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内满足 $y'+p(x)y>0$ 且 $y(0)\geqslant 0$,求证:$y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加.

23. 证明:$x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x(\forall x>0)$.

24. 设 $x\in(0,1)$,证明不等式 $x<\ln(1+x)+\arctan x<2x$.

25. 已知以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数,且 $f(0)=0$. 设 $F(x)=(\sin x-1)^2f(x)$,证明存在 $x_0\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 使得 $F''(x_0)=0$.

26. 设 $b>a\geqslant 0$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,$f(a)\neq f(b)$,求证:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

27. 设 $0<x_1<x_2$,$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可导,证明:在 (x_1,x_2) 内至少存在一个 c,使得

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{x_1} & \mathrm{e}^{x_2}\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(c)-f'(c).$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二次可导,且 $f(a)=f(b)=0$,$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. 求证:存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)<0$.

29. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有连续导数,且 $f'(x)>k>0$ 在 $(a,+\infty)$ 上成立,又 $f(a)<0$,其中 k 是一个常数. 求证:方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一个实根.

30. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的一阶导数,且 $f'(0)=0$,$f''(0)$ 存在. 求证:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0).$$

31. 设 $a>0$,试确定方程 $\mathrm{e}^{2x}=ax^2$ 实根的个数及每个根所在的区间.

32. 设生产某产品的固定成本为 c,边际成本 $C'(Q)=2aQ+b$,需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=\dfrac{1}{e}(d-P)$,其中 a,b,c,d,e 都是正的常数,且 $d>b$. 求:(Ⅰ) 产量 Q 为多少时,利润最大?最大利润是多少?(Ⅱ) 这时需求对价格的弹性是多少?(Ⅲ) 需求对价格的弹性的绝对值为 1 时的产量是多少?

33. 设某商品的需求量 Q 是单价 P(单位:元) 的函数 $Q=12000-80P$;商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数 $C=25000+50Q$;每单位商品需要纳税 2 元,试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

34. 求下列函数带皮亚诺余项型至括号内所示阶数的麦克劳林公式:

(Ⅰ)$f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$ (3 阶); (Ⅱ)$f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (3 阶).

35. 求下列函数的带皮亚诺余项的麦克劳林公式:

(Ⅰ)$f(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$;　　　　(Ⅱ)$f(x)=x\ln(1-x^2)$.

36. 确定下列无穷小量当 $x\to 0$ 时关于 x 的阶数:

(Ⅰ)$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x\sin x$;　　　　(Ⅱ)$f(x)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x-1$.

37. 求下列极限:

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;　　　　(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)]^2-e^{x^2}+1}{\arctan x-\sin x}$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

38. 确定常数 a 和 b 的值,使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=6$.

39. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处具有二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$,求 $f(0)$,$f'(0)$ 与 $f''(0)$.

40. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导($n\geqslant 2$),且当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小量.求证:$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 当 $x\to a$ 时是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小量.

41. 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处四阶可导,且 $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$,但 $f^{(4)}(a)\neq 0$.求证:当 $f^{(4)}(a)>0$ 时 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值;当 $f^{(4)}(a)<0$ 时 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

42. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶连续导数.求证:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2.$$

▶ 第三章　一元函数积分学

一、选择题

1. 下列函数 $f(x)$ 中其原函数及定积分 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ 都存在的是

(A) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^3}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \text{任意}, & x=0.\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. 积分 $\int_a^{a+2\pi}\cos x\ln(2+\cos x)\,dx$ 的值

(A) 与 a 有关.　　(B) 是与 a 无关的负数.

(C) 是与 a 无关的正数.　　(D) 为零.

3. 设 $F'(x)=f(x)$,则

(A) 当 $f(x)$ 为奇函数时,$F(x)$ 一定是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 为偶函数时,$F(x)$ 一定是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数时,$F(x)$ 一定也是以 T 为周期的函数.

(D) 当 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数时,$F(x)$ 一定不是以 T 为周期的函数.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则下列命题正确的是

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx\neq 0$.

(B) 若$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \neq 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

(C) 若$f(x)$为非奇非偶函数，则$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \neq 0$.

(D) 若$f(x)$为以T为周期的周期函数，且是奇函数，则$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$是以$T$为周期的周期函数.

5. 设$f(x) = \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\mathrm{d}t$，则

(A) $f(x) = f(x+\pi)$.

(B) $f(x) > f(x+\pi)$.

(C) $f(x) < f(x+\pi)$.

(D) 当$x>0$时，$f(x) > f(x+\pi)$；当$x<0$时，$f(x) < f(x+\pi)$.

6. 设常数$\alpha > 0$，$I_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^{\alpha}}\mathrm{d}x$，$I_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^{\alpha}}\mathrm{d}x$，则

(A) $I_1 > I_2$.　　(B) $I_1 < I_2$.

(C) $I_1 = I_2$.　　(D) I_1与I_2的大小与α的取值有关.

7. 下列反常积分中发散的是

(A) $\int_{e}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{k}x}(k>1)$.　(B) $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.　(C) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.　(D) $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

8. 设$f(t) = \int_{0}^{1} \ln\sqrt{x^2+t^2}\mathrm{d}x$，则$f(t)$在$t=0$处

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导.　　(D) 可导.

二、填空题

1. $\int \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$ ________.　　2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} =$ ________.

3. $\int \left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x =$ ________.　　4. $\int \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{x}\cos x}(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x =$ ________.

5. 设$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，则$\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]\mathrm{d}x =$ ________.

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^3} =$ ________.　　7. $\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x =$ ________.

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x =$ ________.　　9. $\int_{0}^{a} \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x(a>0) =$ ________.

10. 设$y=f(x)$满足$\Delta y = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x + o(\Delta x)$，且$f(0)=0$，则$\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导，$f(a)=f(b)=0$，且$\int_{a}^{b} f^2(x)\mathrm{d}x = 1$，则$\int_{a}^{b} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x =$ ________.

12. 已知$f(x)$连续，$\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 5$，则$\int_{0}^{1} f(x)\left[\int_{x}^{1} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x =$ ________.

13. 设$f(x)$具有连续导数，且$F(x) = \int_{0}^{x}(x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t$，若当$x\to 0$时$F'(x)$与$x^2$为等价无穷小，则$f'(0) =$ ________.

14. 已知$f(x) = \int_{1}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则$\int_{0}^{1} xf(x)\mathrm{d}x =$ ________.

15. $\int_0^{+\infty} x^7 e^{-x^2} dx =$ ________.　16. $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx =$ ________.　17. $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx =$ ________.

三、计算题

1. 求下列不定积分：

(Ⅰ) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$；　(Ⅱ) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$；

(Ⅲ) $\int \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} dx \quad (x>1)$；　(Ⅳ) $\int e^{2x}(1+\tan x)^2 dx$；

(Ⅴ) $\int \frac{1+x^2+x^4}{x^3(1+x^2)} \ln(1+x^2) dx$；　(Ⅵ) $\int \max\{x^3, x^2, 1\} dx$.

2. 求下列定积分：

(Ⅰ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+\cos 2x}$；　(Ⅱ) $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$；　(Ⅲ) $\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$；

(Ⅳ) $\int_{-1}^1 x\ln(1+e^x) dx$；　(Ⅴ) $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}+1} dx$；　(Ⅵ) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$；

(Ⅶ) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$；　(Ⅷ) $\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$；　(Ⅸ) $\int_0^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} dx$.

3. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x) dx$.

4. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x>0$ 时，满足

$$f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}, \qquad F(x) < 0, \qquad F(0) = -1.$$

求 $f(x)\ (x>0)$.

5. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0<x\leqslant 1, \\ x, & x>1, \end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求函数 $f(x)$ 和 $f(\ln x)$.

6. 设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x) dx$.

7. 求下列积分（其中 $n=1,2,3,\cdots$）：

(Ⅰ) $I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \arctan e^x dx$；　(Ⅱ) $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx$.

8. 设 $a>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数，求极限

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^{a} [f(t+a) - f(t-a)] dt.$$

9. 求 $\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)} [\varphi(x) - t] f(t) dt$，其中 $f(t)$ 为已知的连续函数，$\varphi(x)$ 为已知的可微函数.

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t) dt, & x \neq 0, \\ A, & x = 0, \end{cases}$$

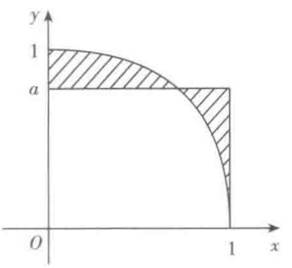
(Ⅰ) 试求 A 的值，使 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续；(Ⅱ) 求 $F'(x)$ 并讨论其连续性.

11. 设 $x\in[0,a]$ 时 $f(x)$ 连续且 $f(x)>0\ (x\in(0,a])$，又满足 $f(x) = \sqrt{\int_0^{x^2} f(\sqrt{t}) dt}$，求 $f(x)$.

12. 求函数 $f(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1} dt$ 在区间 $[e, e^2]$ 上的最大值.

四、应用题

1. 设曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点,且当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$y \geqslant 0$,并与 x 轴所围成的图形的面积为 $\frac{1}{3}$,试确定 a、b、c 的值,使该图形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积最小.
2. 求由直线 $x = 1, x = 3$ 与曲线 $y = x\ln x$ 及过该曲线上一点处的切线围成的平面图形的最小面积.
3. 过原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,设切点为 x_0,且由曲线 $y = \ln x$,直线 $y = 0, x = x_0$ 所围平面图形的面积与由曲线 $y = x^3$,直线 $y = 0, x = a$ 所围平面图形的面积相等,求 a 的值.
4. 设 $P(a,b)$ 是曲线 $y = \sqrt{5-x}$ 上的点,且 $a < 5$.
   (Ⅰ)求 P 点处的切线方程;
   (Ⅱ)由(Ⅰ)中的切线与曲线及 x 轴,y 轴所围成图形绕 x 轴旋转,把所得旋转体的体积表示成 a 的函数,并求其最小值.
5. 求下列平面图形的面积:
   (Ⅰ)$y = x, y = x\ln x$ 及 x 轴所围图形;(Ⅱ)$y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = 2\pi$ 所围图形.



6. 设由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 与直线 $y = a$(其中常数 a 满足 $0 < a < 1$)以及 $x = 0, x = 1$ 围成的平面图形(如右图的阴影部分)绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $V(a)$,求 $V(a)$ 的最小值与最小值点.
7. 设 $f(x)$ 为非负连续函数,且满足 $f(x)\int_0^x f(x-t)\,dt = \sin^4 x$,求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值.

五、证明题

1. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,dx = f(0)$. 证明:在$(0,1)$内至少存在一点 c,使 $f'(c) = 0$.
2. 设 $f(x)$ 为连续函数,证明:
$$\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}dx = \ln 2 \cdot \int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}dx.$$
3. 设 $f(x)$ 在$[A,B]$上连续,$A < a < b < B$,求证:
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = f(b) - f(a).$$
4. 设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上具有连续导数,且 $f'(0) \neq 0$. 令 $F(x) = \int_0^x (2t - x) f(t)\,dt$.
   求证:(Ⅰ)若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)$ 也是奇函数.(Ⅱ)$(0,0)$ 是曲线 $y = F(x)$ 的拐点.
5. 证明:当 $x \geqslant 0$ 且 n 为自然数时 $\int_0^x (t - t^2)\sin^{2n} t\,dt \leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

▶ 第四章　多元函数微积分学

一、选择题

1. 设 $z = f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,则 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处
   (A) 可微.　　(B) 偏导数存在,但不可微.

(C) 连续，但偏导数不存在.　　(D) 偏导数存在，但不连续.

2. 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处

(A) 偏导数存在且连续.　　(B) 偏导数不存在，但连续.

(C) 偏导数存在，可微.　　(D) 偏导数存在，但不可微.

3. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续且 $\varphi(0,0)=0$，则 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处

(A) 连续，但偏导数不存在.　　(B) 不连续，但偏导数存在.

(C) 可微.　　(D) 不可微.

4. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则常数

(A) $a=-2,b=2$.　　(B) $a=2,b=-2$.

(C) $a=-3,b=3$.　　(D) $a=3,b=-3$.

5. 设 $z=x^2+y^2-2\ln|x|-2\ln|y|\ (x\neq 0,y\neq 0)$，则下列结论正确的是

(A) 函数 z 有四个驻点，且均为极小值点.

(B) 函数 z 有四个驻点，且均为极大值点.

(C) 函数 z 有四个驻点，其中两个为极大值点，两个为极小值点.

(D) 函数 z 有二个驻点，其中一个为极大值点，一个为极小值点.

6. 设平面区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，则必有

(A) $\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}\sigma$.　　(B) $\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_3}x\mathrm{d}\sigma$.

(C) $\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}\sigma\neq 2\iint\limits_{D_2}y\mathrm{d}\sigma$.　　(D) $\iint\limits_{D_2}y\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_3}y\mathrm{d}\sigma$.

7. 设平面区域 $D_1=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$D_3=\{(x,y)\mid \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\leqslant 1\}$，且 $I_1=\iint\limits_{D_1}|xy|\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_2}|xy|\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D_3}|xy|\mathrm{d}\sigma$，则

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_1<I_3<I_2$.　(C) $I_3<I_1<I_2$.　(D) $I_3<I_2<I_1$.

二、填空题

1. 已知函数 $z=f(x,y)$ 在$(1,1)$处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$. 设 $\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$，则 $\iint\limits_{D}f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

3. 设 $D=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2,0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ________.

4. 交换积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ________.

5. 累次积分 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\theta}{2}}^{\pi}(\theta^2-1)\mathrm{e}^{\rho^2}\mathrm{d}\rho=$ ________.

三、计算题与应用题

1. 计算下列函数指定的偏导数：

（Ⅰ）设 $u=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 f 具有二阶连续导数，g 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

（Ⅱ）设 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\,\mathrm{d}t$ 确定，其中 φ 可微，P 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+P(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}$；

（Ⅲ）设 $z^3-2xz+y=0$ 确定 $z=z(x,y)$，求 z 的三个二阶偏导数．

2. 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，其中 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

3. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，$g(y)$ 可导，且 $F(x,y)=f[x+g(y)]$，求证：$\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$．

4. 设函数 $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$，且 g 有二阶导数，求证：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=g''(r)+\frac{1}{r}g'(r)，其中\ r=\sqrt{x^2+y^2}，且\ r>0.$$

5. 已知函数 $f(x,y,z)=x^3y^2z$ 及方程

$$x+y+z-3+\mathrm{e}^{-3}=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}, \qquad (*)$$

（Ⅰ）如果 $x=x(y,z)$ 是由方程（$*$）确定的隐函数满足 $x(1,1)=1$，又 $u=f(x(y,z),y,z)$，求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$；

（Ⅱ）如果 $z=z(x,y)$ 是由方程（$*$）确定的隐函数满足 $z(1,1)=1$，又 $w=f(x,y,z(x,y))$，求 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$.

6. 设 $z=f(x,y,u)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，$u(x,y)$ 由方程 $u^3-5xy+5u=1$ 确定．求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$ 确定了函数 $u=u(x)$，其中 f,φ 都有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

8. 设 $y=f(x,t)$，且方程 $F(x,y,t)=0$ 确定了函数 $t=t(x,y)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(y)$ 连续可导，且 $g(y)$ 在 $y=1$ 处取得极值 $g(1)=2$. 求复合函数 $z=f(xg(y),x+y)$ 的二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,1)$ 处的值.

10. 设 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域具有二阶连续偏导数，且 $f'_y(a,b)\neq 0$，证明由方程 $f(x,y)=0$ 在 $x=a$ 的某邻域所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处取得极值 $b=\varphi(a)$ 的必要条件是：

$$f(a,b)=0,\quad f'_x(a,b)=0,$$

且当 $r(a,b)>0$ 时，$b=\varphi(a)$ 是极大值；当 $r(a,b)<0$ 时，$b=\varphi(a)$ 是极小值，其中

$$r(a,b)=\frac{f''_{xx}(a,b)}{f'_y(a,b)}.$$

11. 求使得不等式 $\dfrac{B}{xy}\leqslant\ln(x^2+y^2)\leqslant A(x^2+y^2)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 内成立的最小正数 A 与最大负数 B.

12. 试求多项式 $p(x)=x^2+ax+b$，使积分 $\int_{-1}^{1}p^2(x)\,\mathrm{d}x$ 取最小值.

13. 某工厂生产甲、乙两种产品，当这两种产品的产量分别为 x 和 y（单位：吨）时的总收益函数为 $R(x,y)$

$=42x+27y-4x^2-2xy-y^2$,总成本函数为 $C(x,y)=36+8x+12y$(单位:万元).除此之外,生产甲、乙两种产品每吨还需分别支付排污费2万元,1万元.

(Ⅰ)在不限制排污费用支出的情况下,这两种产品的产量各为多少吨时总利润最大?总利润是多少?

(Ⅱ)当限制排污费用支出总额为8万元的条件下,甲、乙两种产品的产量各为多少时总利润最大?最大总利润是多少?

14. 生产某种产品需要投甲、乙两种原料,x_1 和 x_2(单位:吨)分别是它们各自的投入量,则该产品的产出量为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$(单位:吨),其中常数 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta=1$.如果两种原料的价格分别为 p_1 与 p_2(单位:万元/吨).试问,当投入两种原料的总费用为 P(单位:万元)时,两种原料各投入多少可使该产品的产出量最大?

15. 已知三角形的周长为 $2p$,将它绕其一边旋转而构成一立体,求使立体体积最大的那个三角形.

16. 证明不等式:$\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx<\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right)^2<\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx$.

17. 将下列累次积分交换积分次序:

(Ⅰ)$\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$;

(Ⅱ)$\displaystyle\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$.

18. 计算累次积分 $I=\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\,dy$.

19. 计算 $I=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^0 dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy+\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$.

20. 设区域 D 是由直线 $y=x$ 与曲线 $y=a-\sqrt{a^2-x^2}$ 围成的平面区域,求 $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$.

21. 求 $I=\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dx\,dy$,其中 $D=\left\{(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2,1\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

22. 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2}\,dy\int_0^{y} e^{-x^2}\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} e^{-y^2}\,dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}\,dx$.

23. 计算 $I=\displaystyle\iint_D \frac{e^{xy}}{y^y-1}\,dx\,dy$,其中 D 由 $y=e^x,y=2$ 和 $x=0$ 围成的平面区域.

24. 设 $f(x,y)=\begin{cases} ye^x, & 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

25. 设 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,将如下直角坐标系中的累次积分化为极坐标系中的累次积分.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{1-x}^{x} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

26. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$,其中积分区域 D 由直线 $y=-x,y=x,x=-1$ 以及 $x=1$ 围成.

27. 交换下列累次积分的积分顺序:

(Ⅰ)$I_1=\displaystyle\int_0^1 dx\int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy$;

(Ⅱ)$I_2=\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$.

28. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D y\,d\sigma$,其中 D 是两个圆:$x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $(x-2)^2+y^2\leqslant 4$ 的公共部分.