肖　峰　编

国防科技大学出版社

球面天文学与天体力学基础

球面天文学与天体力学基础

肖峰 编

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书共分上下两篇，上篇为球面天文学，主要内容有：(1)天球坐标和天体的视运动；(2)蒙气差、视差和光行差的原理及其计算方法；(3)岁差、章动、极移和恒星自行对天体位置的影响；(4)时间及测时系统；(5)天体视位置的归算方法。下篇为天体力学基础，主要内容有：(1)天体力学的基本定律与一般定理；(2)二体运动与三体运动；(3)轨道摄动理论；(4)轨道计算方法；(5)轨道改进与轨道参数估计。

本书主要作为高等工科院校航天动力学、航天测控、航天工程、航天控制等有关航天专业之本科生的专业基础课教材，也可供从事航天动力学、卫星轨道设计、轨道测量与计算、卫星导航和卫星测地等方面的科技工作者参考。

球面天文学与天体力学基础
肖 峰 编
责任编辑 王金荣
封面设计 侯 云
*
国防科技大学出版社出版发行
国防科技大学印刷厂印装
*
开本：787×1092 1/16 印张：$14^{12}/_{16}$ 字数：350千字
1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷 印数：1—1500册
ISBN 7-81024-072-2
V·3 定价：5.80元

前　　言

本书是航天动力学专业大学本科生的专业基础课教材。

自从1957年苏联第一颗人造卫星上天以来，在三十多年中，航天事业已获得飞跃发展，当代空间技术不仅已广泛地应用于军事方面，而且也普遍地应用于国民经济，并产生巨大的经济效益。在1969年7月美国成功地实现人类首次登上月球的壮举，现在苏联也开始准备为人类登上火星而进军，我国至今也已成功地发射了地球同步轨道的实用通信卫星、太阳同步轨道的气象卫星以及返回式科学实验卫星等。可以预言，21世纪将是空间世纪。

为适应航天事业发展的需要，现在已出现许多与航天有关的新学科和新专业，例如：航天动力学、航天测控、航天工程、航天控制、卫星导航、卫星通讯、卫星测地等等。这些非天文专业却十分需要一本能帮助全面了解球面天文学和航天飞行器在外层空间运动基本规律的教材或参考书，本书正是为满足这一要求而编写的。

实际上，航天飞行器包括人造卫星、航天飞机、飞向月球之宇宙飞船和行星际飞行器。它们作为一种人造天体，在外层空间运动也是完全遵循天体力学的基本定律。故早在本世纪50年代，就已成为天体力学的重要研究对象，并发展成为天体力学的一个重要分支——航天动力学，本课程就是航天动力学的理论基础。

根据教学计划的安排，本课程是在学生学完高等数学，理论力学和滤波理论的基础上进行的，它的后续课还有人造卫星轨道力学和航天飞行器姿态动力学两门专业课，专门讨论卫星轨道设计、轨道机动、变轨和交会，以及航天飞行器的姿态及其控制等问题。所以本书除系统阐述球面天文学和天体力学的基本定律、定理和定义外，还重点讨论了人造卫星的轨道摄动（其中包括地球扁率摄动、大气阻力摄动、日月摄动和太阳光压摄动等），轨道计算和轨道改进。

由于新的测轨手段的运用，对卫星轨道计算无论在方法上还是在计算精度上都不断地提出新的要求，为此在本书还介绍了建立在现代观测技术上的新的轨道计算方法和卡尔曼滤波技术在轨道改进中的应用。特别是由于数据中继跟踪卫星的出现，以及卫星在交会和对接中的需要，本书又专门讨论了在卫星跟踪卫星的测量系统中应用广义卡尔曼滤波进行轨道参数估计，使学生在掌握卫星运动的基础理论外，还能了解到关于卫星轨道计算和轨道改进方面的新发展。

本书引用了国内外有关的新成果，特别是张金槐教授、朱龙根副教授和胡小平讲师的有关著作，在此表示感谢。

在本书的编写过程中，得到任萱教授的热情支持和帮助，谨此深表感谢。

编　者

1988年12月

目　　录

上篇　球面天文学

下篇 天体力学基础

上　　篇

球面天文学

第一章 天球与球面三角形

1.1 引　　言

球面天文学是天文学的一个分支，它的主要任务是研究天体的视位置和视运动，因而也是研究天体（包括人造天体，如人造地球卫星等）实际运动的重要基础。

当我们在万里无云的晴朗日子里，举目瞭望无际的天空时，总会有"天似穹庐，笼盖四野"的感觉。天穹犹如一个巨大的半球高耸在大地上，无论是白天的太阳还是夜晚的繁星和明月，都似乎位于这个巨大圆球的内壁上。不管人们站在地面任何地方，总好象是站在这个圆球的中心。

实际上，这种圆球并不存在，我们所以会产生这种感觉，是由于诸星距离我们是如此之遥远，致使人们的眼睛不能给出众星与我们之间距离的任何信息，从而造成一切天体都与我们等距离的错觉。特别是天体与观测者间的距离与观测者在地球上移动的距离相比要大得多，因之不论我们在地球上任何地方观测，似乎总是在天穹的中心。

虽然现在已经知道各个天体并不在同一球面上，而且与地球上观测者之间的距离彼此相差很大，但由于在球面上作一些假想的点和弧段以后，利用它们来确定天体的视位置比在空间处理视线方向间的角度要简便得多，为此在天文学中仍保留这个假想的圆球，并引入天球的概念：即以空间任一点为中心，以任意长为半径（或把半径看作数学上的无穷大）作成的圆球称为天球。天体在天球上的投影，即天球中心和天体的连线与天球相交之点，称为"天体在天球上的位置"，或叫做天体的视位置，例如在图 1.1 中，天体 A_1, A_2, B 和 C 在天球上的位置分别为 a, b 和 c .

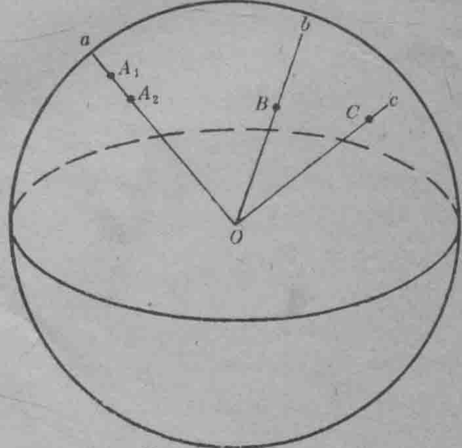

图 1.1　天体在天球上的位置

一般常将天球中心 O 设置在地面观测点上，但有时为了研究问题方便，将天球中心设置在地球中心或太阳中心，则分别称为地心天球或日心天球。

球面天文学的基础是球面几何学，天球具有圆球的一切几何特性，即

(1) 通过球心的任一平面，划分该球为两个半球，并与球表面相截所得之圆称为大圆，大圆半径等于球的半径，而球心就是大圆的圆心。若该平面不通过球心，则与球

表面相截所得之圆称为小圆，显然，小圆之圆心就不可能是球心。

(2) 通过球面上不在同一直径的两点只能作出一个大圆，它的较小之弧段就是球面上所有连接该两点之诸线中的最短线。

(3) 两个大圆必定相交，相交而成的角叫做球面角；而交点是在同一直径的两个端点，称为球面角的顶点；大圆弧本身称为球面角的边。

(4) 对球面上任何一个圆ABC（不论大圆或小圆），通过其圆心O'作一垂直于该圆平面$O'ABC$的垂线，则垂线必经过球心O并与球面交于直径的两端P和P'，P和P'两点称为圆ABC的极，如图1.2所示。极到该圆上任何一点的角距称为极距，显然在圆上任一点的极距都相等。

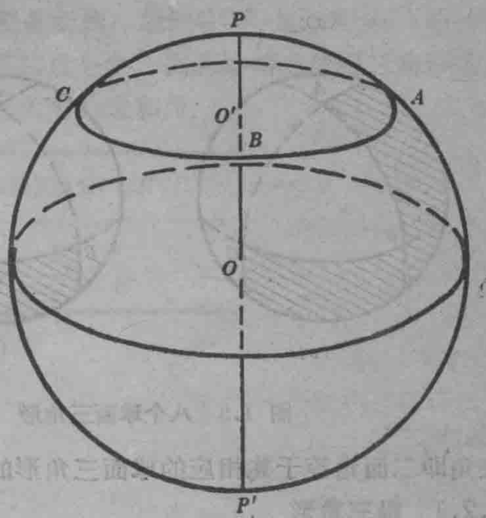

图 1.2　圆及其极

(5) 大圆的极距为一象限(=90°)．反之如果球面上一点至其它两点（不是直径的两端点）的距离都是一象限，则前一点必为通过后两点的大圆之极。

(6) 大圆的极至该大圆任一点之大圆弧必与该大圆正交。

此外，天球还具有另一个重要性质，即所有互相平行的直线向同一方向延伸时，将与天球相交于一点。

球面天文学具体研究的内容包括：(1) 天球坐标系的建立与天体的视运动；(2) 大气折射、视差和光行差的原理及其计算方法；(3) 岁差、章动、极移和恒星自行对天体位置的影响；(4) 以地球自转和公转周期为基础的时间计量系统的建立原理及其力学基础；(5) 天体视位置的归算方法。

1.2　球 面 三 角 形

将球面上的三个点用三个大圆弧联结起来所围成的图形叫做球面三角形，这三个点叫做球面三角形的顶点。由于连接两个顶点的大圆弧有两个不同的弧段，为了使定义完备起见，应区别我们所选的弧是那一段，还应指明三角形在所选之弧的那一边。

将球面上A,B,C三个点用三段大圆弧联结起来围成之图形的方式一般有八种，如图1.3中阴影部分或无阴影部分。因此在一般情况下，由三个点规定的球面三角形共有八个，其中一个，它的三个边都小于半圆周，将这样的球面三角形称为简单球面三角形，如图1.3(a)中的阴影部分所示。简单球面三角形是我们以后经常用到的球面三角形。

组成简单球面三角形的三个大圆弧之所在平面构成一个三面角，其顶点为球心O，而其棱是由球心到球面三角形三个顶点(A,B,C)的球半径。由图1.4可以看出：三面角$O\text{-}ABC$的每一个平面角都可用其相对的球面三角形的边来度量，而两个平面之间的

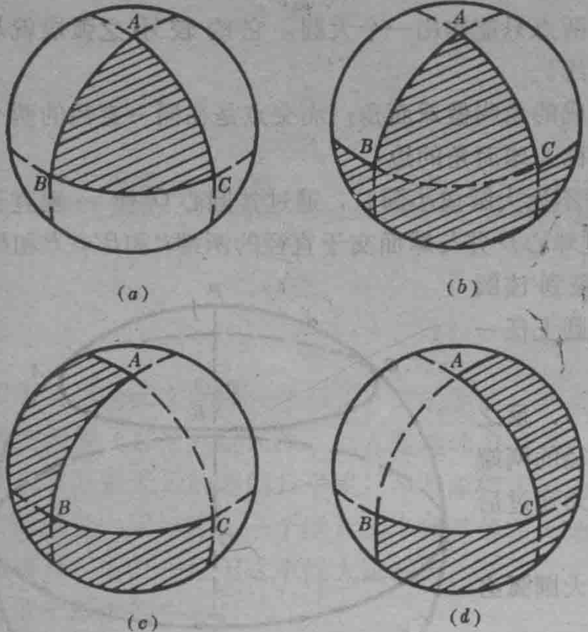

图 1.3 八个球面三角形

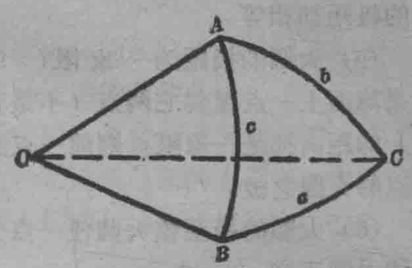

图 1.4 三面角

夹角即二面角等于其相应的球面三角形的球面角。

1.2.1 极三角形

设ABC为一简单球面三角形（见图1.5），P 为BC大圆的极点，其位置与A点同在该大圆的一边，因而$\angle POA$是锐角。同样，可以规定与B点同在一边的大圆AC的极点Q以及与C点同在一边的大圆AB的极点R，连接PQR所构成的简单球面三角形叫做原三角形ABC的极三角形。

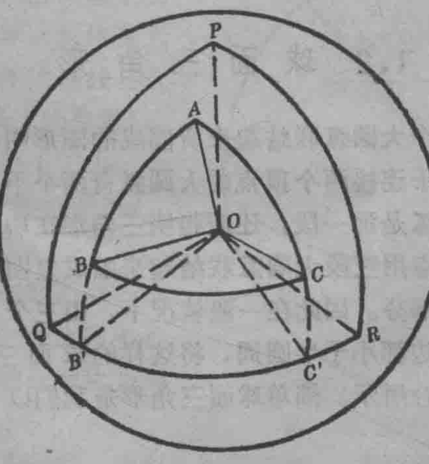

图 1.5 极三角形

下面我们来证明：ABC也是PQR的极三角形。

由图1.5可知，OA与OQ和OR两直线正交，故A是QR大圆的一个极点，又因$\angle POA$是锐角，故A是PQR的极三角形的一个顶点。同样可以证明B和C是PQR的极三角形的另外两个顶点，所以ABC也是PQR的极三角形。

这两个球面三角形的边角之间有一个重要的定理，即：极三角形的边是原三角形之对应角的补角，而极三角形的角是原三角形之对应边的补角。

现在来证明这一重要定理：将$\widehat{AB}$和$\widehat{AC}$两边（如果需要）延长与QR大圆相交于B'和C'，并作以OA为棱的二面角$\angle B'OC'$，因OB'与OR正交，OC'与OQ正交；又根据极三角形的作图法，$\angle C'OR$与$\angle B'OQ$都必须是锐角；故$\angle QOR$是$\angle B'OC'$的补角。这样就证明了这定理的前一半，同时也证明了其后一半，因为这两个球面三角形是互为极三角形，现采用以下字母表示这两个球面三角形的边和角

	球面三角形ABC			球面三角形PQR		
边	a	b	c	p	q	r
角	A	B	C	P	Q	R

因而有

$$\begin{cases} p=\pi-A, & P=\pi-a \\ q=\pi-B, & Q=\pi-b \\ r=\pi-C, & R=\pi-c \end{cases} \tag{1.1}$$

由于有这些关系式，故球面三角形的边、角之间如有一个公式，便可立刻转换为另一个公式。

例如设

$$f(A,B,C,a,b,c)=0 \tag{1.2}$$

则在极三角形便有

$$f(P,Q,R,p,q,r)=0 \tag{1.3}$$

即

$$f(\pi-a,\pi-b,\pi-c,\pi-A,\pi-B,\pi-C)=0$$

式(1.3)叫做式(1.2)的相关式，由相关式的转换，不需新的计算，就能增加球面三角形的公式，有时还方便地提供简单的证明。

1.2.2 简单球面三角形的基本性质

（1）球面三角形的两边之和大于第三边；

（2）在同一球面三角形中，等边所对的角相等，等角所对的边也相等；

（3）在同一球面三角形中，大边对大角，反之，大角也对大边；

（4）球面三角形三个角之和恒大于180°小于540°．差值$\delta=(A+B+C)-180°$称为该球面三角形的球面角超；

（5）球面三角形的三边之和大于0°而小于360°．

以上五点基本性质，读者可以自己证明。

1.3 球面三角形的基本公式

1.3.1 边的余弦公式

令ABC为一球面三角形，边$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，$\overset{\frown}{AB}$分别用a，b，c表示，如图1.6所示。边a可用大圆弧$\overset{\frown}{BC}$所对的球心角BOC来度量，同样，b和c可分别用角AOC和AOB来度量。令AD切大圆$\overset{\frown}{AB}$于A点，AE切大圆$\overset{\frown}{AC}$于A点，则半径OA垂直于AD和AE.

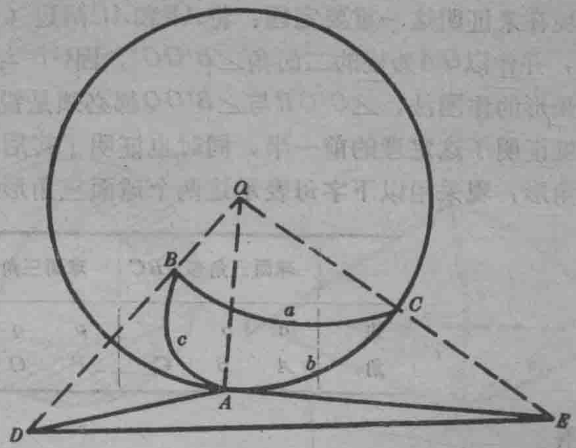

图 1.6

由作图，AD在大圆$\overset{\frown}{AB}$平面内，因此若延长半径OB，它将交切线AD于D，同样，当延长矢径OC，将与切线AE相遇于E．现定义球面角BAC就是切大圆$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$于A点之两条切线之间的夹角，故球面角$BAC=\angle DAE$．现令A表示球面角BAC，则$\angle DAE=A$．

在平面三角形OAD中，$\angle OAD=90°$，再令$\angle AOD=c$，考虑到$\angle AOD$就是$\angle AOB$，则有

$$\begin{cases} AD=(OA)\text{tg}c \\ OD=(OA)\sec c \end{cases} \tag{1.4}$$

同样，从平面三角形OAE中，有

$$\begin{cases} AE=(OA)\text{tg}b \\ OE=(OA)\sec b \end{cases} \tag{1.5}$$

从平面三角形DAE，有

$$(DE)^2=(AD)^2+(AE)^2-2(AD)(AE)\cos A$$

或

$$(DE)^2=(OA)^2(\text{tg}^2c+\text{tg}^2b-2\text{tg}c\text{tg}b\cos A) \tag{1.6}$$

又由平面三角形DOE，考虑到$\angle DOE=\angle BOC=a$，所以有

$$(DE)^2=(OD)^2+(OE)^2-2(OD)(OE)\cos a$$

或

$$(DE)^2=(OA)^2(\sec^2c+\sec^2b-2\sec c\sec b\cos a) \tag{1.7}$$

则由式(1.6)和(1.7)得

$$\sec^2c+\sec^2b-2\sec b\sec c\cos a=\text{tg}^2c+\text{tg}^2b-2\text{tg}b\text{tg}c\cos A \tag{1.8}$$

由平面三角公式

$$\sec^2 c = 1 + \mathrm{tg}^2 c \qquad \sec^2 b = 1 + \mathrm{tg}^2 b$$

代入式(1.8)，经整理后得

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A \tag{1.9}$$

这就是球面三角形的基本公式—— a 边的余弦公式，同样可得其它两边的余弦公式如下：

$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B \tag{1.10}$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C \tag{1.11}$$

以上三式合称为边的余弦公式。

1.3.2 角的余弦公式

设PQR为球面三角形ABC的极三角形（见图1.5），则根据式(1.9)，有

$$\cos p = \cos q\cos r + \sin q\sin r\cos P \tag{1.12}$$

再由式(1.1)知，$p=\pi-A$，$q=\pi-B$，$r=\pi-C$，$P=\pi-a$所以(1.12)式可化为

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a \tag{1.13}$$

上式即为A角的余弦公式。同理可得B角和C角的余弦公式如下：

$$\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos b \tag{1.14}$$

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c \tag{1.15}$$

以上三式合称为角的余弦公式。

1.3.3 正弦公式

设在以O为球心之球面上取三角形ABC，则O与各顶点相连得球心三面角$O-ABC$，如图1.7所示。在OC上任取一点P，作PQ垂直于OA，PR垂直于OB. 在OAB平面内，作QS垂直于OA，RS垂直于OB，这两垂线相遇于S，再连结PS和OS. 若我们在A点作二切线分别切大圆$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$，根据定义这两切线夹球面角A，因而分别平行于QS和QP，所以$\angle PQS=A$，同理可证明$\angle PRS=B$.

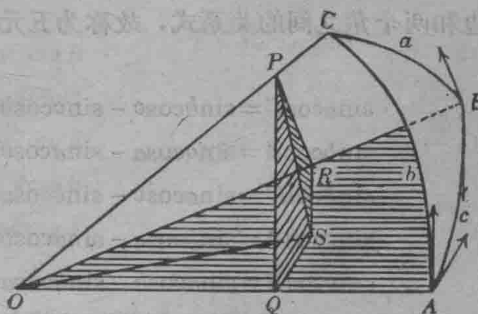

图 1.7

由以上作图可知，OQ既垂直于PQ又垂直于QS. 因此OQ是垂直于平面PQS，所以OQ也垂直于PS. 同理可以证明OR也垂直于PS，因而PS是垂直于平面OAB.

考虑到$\angle COB=a$，$\angle COA=b$，$\angle AOB=c$. 因此从直角三角形OQP与ORP，有

$$PQ=(OP)\sin b,\quad PR=(OP)\sin a \tag{1.16}$$

又从直角三角形PQS和PRS，有

$$PS=(PQ)\sin A,\quad PS=(PR)\sin B \tag{1.17}$$

将式(1.16)代入上式得

$$(OP)\sin b\sin A=(OP)\sin a\sin B$$

或

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B} \tag{1.18}$$

同理可得类似公式如下：

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{1.19}$$

于是有

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{1.20}$$

上式称为正弦公式，它给出球面三角形中任何两个边与它们所对应的两个角之间的关系。

1.3.4 五元素公式

将式(1.10)写成以下形式

$$\sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c\cos a$$

再将式(1.9)代入上式得

$$\sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c(\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A)$$

或

$$\sin c\sin a\cos B=\sin^2 c\cos b-\sin b\sin c\cos c\cos A$$

两边各除以 $\sin c$，得

$$\sin a\cos B=\sin c\cos b-\sin b\cos c\cos A \tag{1.21}$$

这是三个边和两个角之间的关系式，故称为五元素公式，同理可得其它五元素公式如下：

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\sin c\cos b\cos A \tag{1.22}$$

$$\sin b\cos A=\sin c\cos a-\sin a\cos c\cos B \tag{1.23}$$

$$\sin b\cos C=\sin a\cos c-\sin c\cos a\cos B \tag{1.24}$$

$$\sin c\cos A=\sin b\cos a-\sin a\cos b\cos C \tag{1.25}$$

$$\sin c\cos B=\sin a\cos b-\sin b\cos a\cos C \tag{1.26}$$

上列公式是球面三角形一边之正弦与其邻角之余弦的乘积表达式，若利用极三角形与原三角形的关系，就可得到一角之正弦与其邻边之余弦的乘积表达式如下：

$$\sin A\cos b=\sin C\cos B+\sin B\cos C\cos a \tag{1.27}$$

$$\sin A\cos c=\sin B\cos C+\sin C\cos B\cos a \tag{1.28}$$

$$\sin B\cos a=\sin C\cos A+\sin A\cos C\cos b \tag{1.29}$$

$$\sin B\cos c=\sin A\cos C+\sin C\cos A\cos b \tag{1.30}$$

$$\sin C\cos a=\sin B\cos A+\sin A\cos B\cos c \tag{1.31}$$

$$\sin C\cos b=\sin A\cos B+\sin B\cos A\cos c \tag{1.32}$$

以上是二个边和三个角之间的关系式，故是五元素公式另一种表达形式。

1.3.5 相邻四元素公式

相邻四元素公式又称余切公式，就是在球面三角形中相邻四元素（边和角）之间的

关系式。例如在球面三角形ABC中，考虑四个顺序元素c，B，a，C，如图1.8所示，其中角B被两个边c与a所夹，故称“内角”，而边a被B与C两角之侧翼所包围，则叫“内边”。

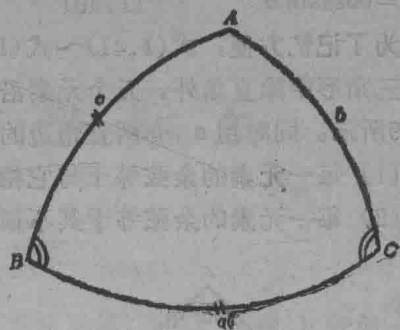

图 1.8

现借助于边的余弦公式，将(1.10)表达式代入式(1.11)的右端，得

$$\cos c=\cos a(\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B)+\sin a\sin b\cos C$$

或

$$\cos c\sin^2 a=\sin c\sin a\cos a\cos B+\sin a\sin b\cos C \tag{1.33}$$

将上式遍除以$\sin a\sin c$，则得

$$\mathrm{ctg}\, c\sin a=\cos a\cos B+\frac{\sin b}{\sin c}\cos C \tag{1.34}$$

由正弦公式(1.19)，有

$$\frac{\sin b}{\sin c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

将上式代入式(1.34)，得

$$\cos a\cos B=\sin a\,\mathrm{ctg}\, c-\sin B\,\mathrm{ctg}\, C \tag{1.35}$$

同理可得

$$\cos a\cos C=\sin a\,\mathrm{ctg}\, b-\sin C\,\mathrm{ctg}\, B \tag{1.36}$$

$$\cos b\cos A=\sin b\,\mathrm{ctg}\, c-\sin A\,\mathrm{ctg}\, C \tag{1.37}$$

$$\cos b\cos C=\sin b\,\mathrm{ctg}\, a-\sin C\,\mathrm{ctg}\, A \tag{1.38}$$

$$\cos c\cos A=\sin c\,\mathrm{ctg}\, b-\sin A\,\mathrm{ctg}\, B \tag{1.39}$$

$$\cos c\cos B=\sin c\,\mathrm{ctg}\, a-\sin B\,\mathrm{ctg}\, A \tag{1.40}$$

1.4 几种特殊的球面三角形

1.4.1 直角球面三角形

设球面三角形ABC中有一个角是直角，例如$\angle C=90°$，这样的球面三角形称为直角球面三角形，利用前面所建立的球面三角形基本公式，很容易导出直角球面三角形的基本关系式如下：

$$\sin a=\sin c\sin A \tag{1.41}$$

$$\sin b=\sin c\sin B \tag{1.42}$$

$$\mathrm{tg}\, a=\sin b\,\mathrm{tg}\, A \tag{1.43}$$

$$\mathrm{tg}\, b=\sin a\,\mathrm{tg}\, B \tag{1.44}$$

$$\cos c=\cos a\cos b \tag{1.45}$$

$$\mathrm{tg}\, a=\mathrm{tg}\, c\cos B \tag{1.46}$$

$\mathrm{tg}b=\mathrm{tg}c\cos A$ (1.47) $\cos B=\cos b\sin A$ (1.48)

$\cos A=\cos a\sin B$ (1.49) $\cos c=\mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B$ (1.50)

为了记忆方便，式(1.41)～式(1.50)可以从纳比尔(Napier)法则导出，如果把直角球面三角形中除直角外，五个元素沿着圆周排列，使它们的顺序与球面三角形一样，如图1.9所示。同时用a，b两直角边的余角（补成90°）来代替这两直角边，则

(1) 每一元素的余弦等于与它相邻的两元素的余切的乘积。

(2) 每一元素的余弦等于其不相邻两元素的正弦之乘积。

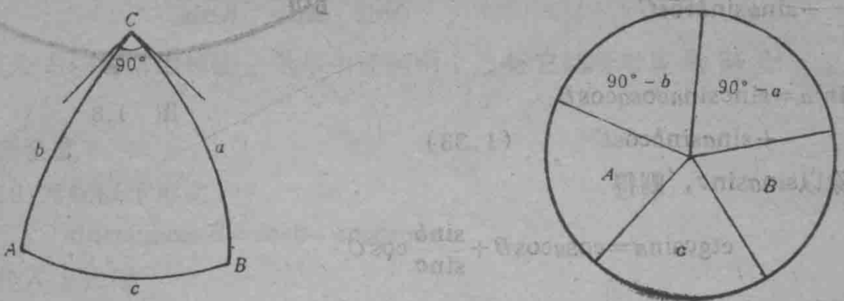

图 1.9

例如

$$\cos A=\mathrm{ctg}(90^\circ-b)\,\mathrm{ctg}c \quad 或 \quad \cos A=\mathrm{tg}b\,\mathrm{ctg}c$$

$$\cos(90^\circ-a)=\sin c\sin A \quad 或 \quad \sin a=\sin c\sin A$$

1.4.2 象限球面三角形

球面三角形ABC中若有一个边等于90°，则称为象限球面三角形。现设边$a=90°$，则利用上述球面三角形的基本公式，容易导出象限球面三角形的基本关系式如下：

$\cos A=-\mathrm{ctg}b\,\mathrm{ctg}c$ (1.51) $\cos b=\sin c\cos B$ (1.52)

$\cos c=\sin b\cos C$ (1.53) $\sin B=\sin b\sin A$ (1.54)

$\sin C=\sin c\sin A$ (1.55) $\mathrm{ctg}b=\mathrm{ctg}B\sin C$ (1.56)

$\mathrm{ctg}c=\sin B\,\mathrm{ctg}C$ (1.57) $\mathrm{ctg}A=-\mathrm{ctg}B\cos c$ (1.58)

$\mathrm{ctg}A=-\mathrm{ctg}C\cos b$ (1.59) $\cos A=-\cos B\cos C$ (1.60)

上述基本关系式仍可应用纳比尔法则帮助记忆，只是除直角边外，五个元素顺序写为180°－A，b，90°－C，90°－B与c，如图1.10所示。其中任一元素的余弦仍然等于(1) 两相邻元素的余切之积；(2) 不相邻之两元素的正弦之积。

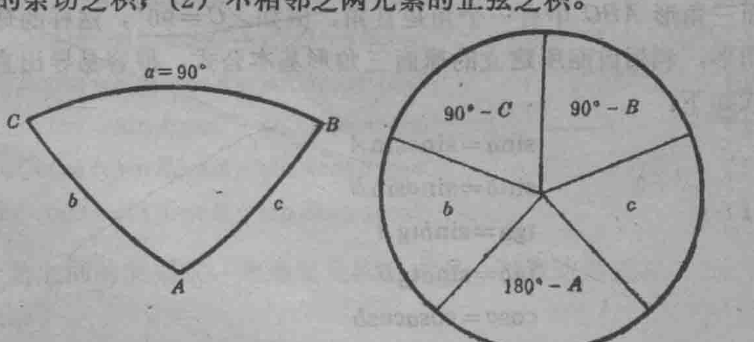

图 1.10