第一章　三角函数等式证明的方法

三角函数等式的证明,包括三角函数恒等式及三角函数条件等式的证明.

所谓的三角函数恒等式,是指由三角函数构成的复合函数等式.

$W(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)=U(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)$,

如果对于该等式左端和右端同时可取的所有 x 值,该等式都能成立,那么我们就称它为“三角函数恒等式”.

证明 $W=U$ 成立,就是要证明 W 和 U 中 x 允许值的交集是一个非空集合 M,在 M 内的一切 x 值都使得等式的两端的值相等.

三角函数式的恒等变换,指的是用一个与三角函数恒等式的式子来代换该式,叫作该式的恒等变换. 在作恒等变换时,自变量 x 的可取值的集合有可能改变.

所谓三角函数条件等式,就是在给定条件所包含的一切情况下,都成立的三角函数等式.

三角函数条件等式的证明,必须要证明该三角函数等式在所给出的条件的全部情况下均成立,不能遗漏了某些情况,那样证明将是不完整的.

三角函数恒等式及条件等式的证明,首先要熟悉代数式的各种恒等变形的公式和方法、一般的逻辑证明方法;其次要切实弄清三角学中的重要公式的来源、特点、适用范围,明确三角恒等变形的目的、思路、常用方法和技巧,并能灵活地加以运用.

下面我们来逐一介绍这些方法和技巧.

§1.1　归义法

三角函数的本意,是以欧氏几何学中的几何原理来定义的. 三角

函数的定义可以表述为彼此等价的不同形式，一般有坐标解释、锐角三角函数解释、单位圆中三角线解释，以及向量解释.

在证明三角函数等式中，我们归结于应用以上四种定义来证明的方法，我们把它称为“归义法”.

例 1 设 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是 $x^2+px+q=0$ 的两个根，证明：

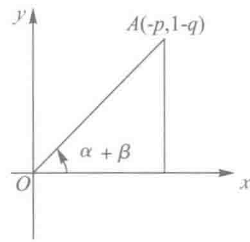
$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q.$

证明 利用三角函数定义的坐标解释来证明：

由已知及韦达定理，得到

$\tan\alpha+\tan\beta=-p,\tan\alpha\cdot\tan\beta=q,$

所以 $\tan(\alpha+\beta)=-p/(1-q).$



在直角坐标系中，按正切的定义，如图作出$(\alpha+\beta)$的角，在其终边上取一点 $A(-p,1-q)$，则有

$$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{p}{\sqrt{p^2+(1-q)^2}},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-q}{\sqrt{p^2+(1+q)^2}},$$

所以，等式左边$=\left[\frac{-p}{\sqrt{p^2+(1+q)^2}}\right]^2+p\left[\frac{-p}{\sqrt{p^2+(1-q)^2}}\right]\cdot$

$$\left[\frac{1-q}{\sqrt{p^2+(1-q)^2}}\right]+q\left[\frac{1-q}{\sqrt{p^2+(1-q)^2}}\right]^2=q.$$

例 2 求证：

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)-\tan\frac{\beta+\gamma}{2}(\cos\beta+\cos\gamma)=$$

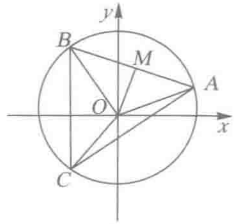
$$\sin\alpha-\sin\gamma.$$

证明 用三角函数定义中的单位圆中三角线解释来证明.

如图在单位圆 O 上取三点：$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$C(\cos\gamma,\sin\gamma)$.

若 M 为 AB 的中点，由单位圆中三角线的定义得到 M 点的坐标为

$$M\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right).$$



又$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\beta-\alpha}{2}$，

$\angle xOM=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

点 M 在 OM 上，故而

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\div\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},$$

所以 $\sin\alpha+\sin\beta=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$.

同样的道理，就有

$$\sin\beta+\sin\gamma=\tan\frac{\beta+\gamma}{2}(\cos\beta+\cos\gamma).$$

所以 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)-\tan\frac{\beta+\gamma}{2}(\cos\beta+\cos\gamma)$

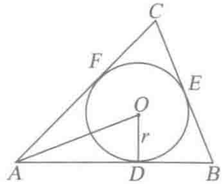
$=(\sin\alpha+\sin\beta)-(\sin\beta+\sin\gamma)$

$=\sin\alpha+\sin\gamma$.

例 3 设 a,b,c 分别是$\triangle ABC$ 中$\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边，求证：

$$(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0.$$

证明 用锐角三角函数定义的解释，来证明.



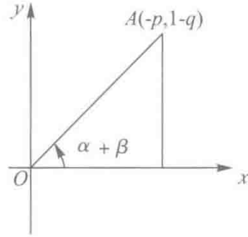
设 O 为三角形 ABC 内切圆的圆心，r 为内切圆的半径，切点分别为 D,E,F，s 为三角形 ABC 周长的一半.

故 $AD=s-(BE+CF)$

所以 $\cot\frac{A}{2}=\frac{s-a}{r}$，$\cot\frac{B}{2}=\frac{s-b}{r}$，$\cot\frac{C}{2}=\frac{s-c}{r}$.

因此便得到

$$
\begin{aligned}
&(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}\\
=&(a-b)\frac{s-c}{\gamma}+(b-c)\frac{s-a}{\gamma}+(c-a)\frac{s-b}{\gamma}\\
=&0.
\end{aligned}
$$



设 α 是一个任意角，将其放置于直角坐标系 xOy 中，α 的顶点与 O 重合，起始边与 Ox 轴重合，终边为 OP，终边 OP 上有任意一点 $P(x,y)$，$|OP|=r$，r 称之为"动径". 我们这样给出三角函数的坐标解释：

α 的正弦：$\sin\alpha=y/r$； α 的余弦：$\cos\alpha=x/r$；

α 的正切：$\tan\alpha=y/x$； α 的余切：$\cot\alpha=x/y$.

好多三角函数的基本关系式，都可以由此坐标解释的三角函数的定义推理出来.

例 4 求证：

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(2) $\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$；

(3) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$；

(4) $\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$；

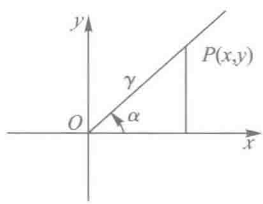
(5) $\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha$；

(6) $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$；

(7) $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.

证明 (1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=\frac{y^2+x^2}{r^2}\\
&=\frac{r^2}{r^2}=1.
\end{aligned}
$$



(2) $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{r}\div\dfrac{x}{r}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(3)因为 $\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{x}{r}\div\frac{y}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

所以 $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$.

(4)因为 $\sec\alpha=r/x$,

所以 $\tan^2\alpha+1$

$$=\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}$$

$$=\sec^2\alpha.$$

(5)因为 $\csc\alpha=r/y$,

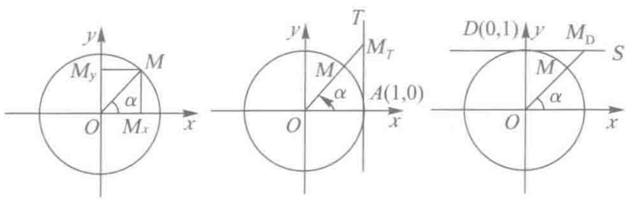
所以 $\cot^2\alpha+1$

$$=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{r^2}{y^2}$$

$$=\csc^2\alpha.$$

(6)$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1$.

(7)$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1$.



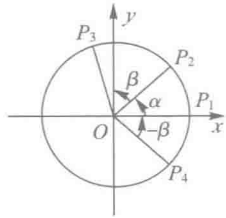
在直角坐标系上取圆心的原点 O 的半径为 1 的单位圆,任意角 α 的顶点与原点 O 重合,α 的始边与 Ox 轴的正方向重合,α 的终边与单位圆相交于 $M(x,y)$,$|OM|=1$. 单位圆在点 $A(1,0)$ 处的切线 AT,我们称之为“正切轴”;单位圆在点 $D(0,1)$ 处的切线 DS,我们称之为“余切轴”;动径 OM 在 Ox 轴上的射影 OM_x(余弦线)$=\cos\alpha$;动径 OM 在 OY 轴上的射影 OM_y(正弦线)$=\sin\alpha$;动径 OM 延长线与正切轴 AT 的交点为 M_T,则 AM_R(正切线)$=\tan\alpha$,OM_T(正割线)$=\sec\alpha$;动径 OM 与余切轴 DS 的交点为 M_D,则 DM_D(余切线)$=\cot\alpha$,OM_D(余割线)$=\csc\alpha$.

以上就是三角函数定义的三角线的解释. 有不少三角函数等式的证明都可用此定义来推理.

例 5 求证:

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.



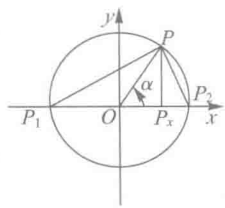
证明 用单位圆的三角线定义来证明. 在直角坐标系 xOy 内作单位圆 O, 作角 α, β 与 $-\beta$, 使 α 的始边与 Ox 的正方向重合, 且交 $\odot O$ 于 $P_1(1,0)$, α 的终边交 $\odot O$ 于 $P_2(\cos\alpha,\sin\alpha)$, β 的始边为 OP_2, β 的终边交 $\odot O$ 于 $P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$, $-\beta$ 的始边为 OP_1, $-\beta$ 终边交 $\odot O$ 于 $P_4(\cos(-\beta),\sin(-\beta))$.

由于 $\triangle P_1OP_3\cong\triangle P_4OP_2$, 因此 $|P_1P_3|=|P_2P_4|$, 由两点间的距离公式, 得到

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2,$$

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

例 6 圆心为 O 的单位圆 $\odot O$, 交坐标轴 Ox 于点 P_1, P_2, P 是 $\odot O$ 上方一点, $\angle POP_2=\alpha$, $|PP_1|=a$, $|PP_2|=b$, 求证: $ab=2\sin\alpha$.



证明 作 $PP_x\perp Ox$, 由三角函数定义的三角线解释, 我们得知

$$\sin\alpha=P_xP,\ \cos\alpha=OP_x.$$

又因为 $\angle P_1PP_2=90^\circ$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1PP_x$ 及 $\mathrm{Rt}\triangle PP_xP_2$ 中, 由勾股定理得到

$$a^2=\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2=2+2\cos\alpha,$$
$$b^2=\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2=2-2\cos\alpha,$$

所以 $ab=\sqrt{4-4\cos^2\alpha}=\sqrt{4\sin^2\alpha}=2\sin\alpha$.

以上的例题涉及的三角函数, 它们的自变量 x 的定义域, 分别如下:

(1) $y=\sin x$, $y=\cos x$: $x\in\mathbf{R}$;

(2) $y=\tan x$: $x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$;

(3) $y=\cot x$: $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$;

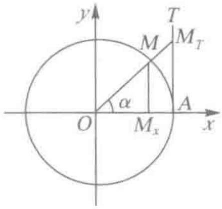
(4) $y=\sec x, y=\csc x$: $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant 1$.

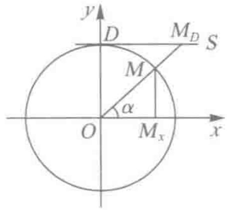
例 7 求证：

(1) $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$;

(2) $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$.

证明 用三角函数定义的三角线解释，来证明.





(1) 在定义的三角线图形中(左图)，

α 余弦线 $OM_x=\cos\alpha$，α 正割线 $OM_T=\sec\alpha$，

它们所在的两个三角形相似：

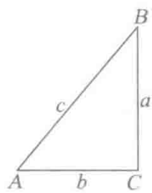
$\triangle OMM_x\backsim\triangle OM_TA$，故有 $OM_x/OM=OA/OM_T$，

$OM_x/OM=\cos\alpha$，$OM_T/OA=\sec\alpha$，

所以 $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=(OM_x/OM)\cdot(OM_T/OA)$

$$=(OA/OM_T)\cdot(OM_T/OA)$$

$$=1.$$



(2) 在定义三角线图形中(右图)，仿照(1)可证明出(2).

三角函数定义的锐角函数解释，在不少几何问题中时有应用. 锐角函数解释的定义是这样来表述的：

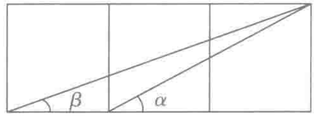
在任意的 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，角 A 所对的边为 a，角 B 所对的边为 b，斜边为 c，则定义

$$\sin A=a/c, \cos A=b/c, \tan A=a/b,$$

$$\cot A=b/a, \sec A=c/b, \csc A=c/a.$$

例 8 如图，三个正方形相接，求证：

$$\tan(\alpha+\beta)=1.$$



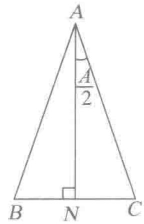
证明 用锐角函数解释来证明.

因为 $\tan\alpha=1/2$，$\tan\beta=1/3$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{5}{6}}{1-\dfrac{1}{6}}=1.$

例 9 已知等腰三角形 ABC 的腰长为底长的两倍，求证：

$$\tan A=\sqrt{15}/7.$$



证明 用锐角函数解释来证明.

因为 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

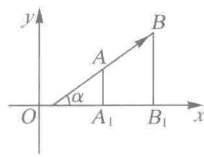
$\sin A=2\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{15}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

$\cos A=\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{7}{8}$，

所以 $\tan A=\sin A/\cos A=\dfrac{\sqrt{15}}{7}.$

三角函数定义的向量解释，在研究各种向量，诸如力、速度、加速度等方面，都有很多的应用. 有时也可以用来证明三角函数等式问题.

三角函数的向量解释是这样定义的：



Ox 与 Oy 是互相垂直的二轴线，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 Ox 轴所成的角为 α，A_1B_1 是 $\overrightarrow{AB}$ 在 Ox 轴上的射影，用 $\Pi\mathrm{p}_{Ox}\overrightarrow{AB}=A_1B_1$ 来表示.

三角函数定义的向量解释为：

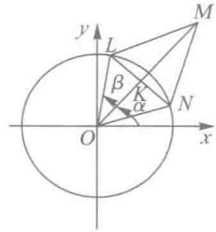
$\cos x=\Pi\mathrm{p}_{Ox}\overrightarrow{AB}/|AB|$，$\sin x=\Pi\mathrm{P}_{oy}\overrightarrow{AB}/|AB|$，

$\tan x=\Pi\mathrm{p}_{Oy}\overrightarrow{AB}/\Pi\mathrm{p}_{Ox}\overrightarrow{AB}$，$\cot x=\Pi\mathrm{p}_{Oy}\overrightarrow{AB}/\Pi\mathrm{p}_{Oy}\overrightarrow{AB}.$

例 10 求证：

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

证明　用向量解释的定义来证明.



如图，作一个菱形，设 α 是任意角，β 为锐角，L，N 在单位圆上，

$\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OL}+\Pi p_{Ox}\overrightarrow{LM}=\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OM}$，$\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OL}=\cos(\alpha+\beta)$，

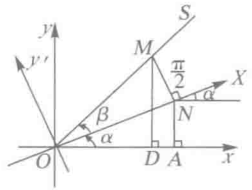
$\Pi p_{Ox}\overrightarrow{LM}=\pi p_{Ox}\overrightarrow{ON}\cos(\alpha-\beta)$，

$\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OM}=2OK\cdot\cos\alpha$，$OK=\cos\beta$，

所以 $\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OM}=2\cos\alpha\cos\beta$.

例 11　用三角函数的向量解释，来证明：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.



证明　将直角坐标系 xOy 的坐标轴，以原点 O 为中心，逆时针旋转一个 α 角度，使之到达 $x'Oy'$ 的位置。再以 Oy' 为始边作 $\angle x'OS=\beta$.

作 $MN\perp Ox'$，$NA\perp Ox$，$MD\perp Ox$.

取 $|OM|=1$，$\angle xOS=\alpha+\beta$，

故而　$\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OM}=\cos(\alpha+\beta)$.

又　$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM}=\cos(\alpha+\beta)=\Pi p_{Ox}\overrightarrow{ON}+\Pi p_{Ox}\overrightarrow{NM}$，(＊)

而　$ON=\Pi p_{Ox}\overrightarrow{OM}=\cos\beta$，$NM=\Pi p_{Oy}{}'\overrightarrow{OM}=\sin\beta$，

所以　$OA=\Pi p_{Ox}\overrightarrow{ON}=ON\cdot\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\alpha$，

$DA=\Pi p_{Ox}\overrightarrow{NM}=NM\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta\cdot\sin\alpha$，

将以上两式代入(＊)，便得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

§1.2　变角法

在三角函数等式证明中，有时利用改变三角函数中的角度，来达到证明的目的，我们把它称为“变角法”. 具体说来有以下一些变角方法：

(1)引用三角公式

也就是用三角函数的和、差、倍、分、余、补等公式，对复角和单角进行互化，或者是化不同的角度为同一角度，或者是将复角化为单角，或者是引入辅助角，来达到证明的目的.

例 1 求证：

$$\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)=1.$$

证明 引入辅助角 30°，用和角公式化单角为和角，由倍角公式化单角为倍角，再用余角互化，来证明出结果.

$$\text{左边}=\sin 50^\circ\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 10^\circ\right)}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 50^\circ\cdot\frac{\sin(30^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=1.$$

例 2 求证：

$$\cos 25^\circ+\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ=\sin 7^\circ.$$

证明
$$\begin{aligned}\text{左边}&=(\cos 47^\circ-\cos 61^\circ)-(\cos 11^\circ-\cos 25^\circ)\\&=-2\sin 54^\circ\sin(-7^\circ)+2\sin 18^\circ\sin(-7^\circ)\\&=2\sin 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)\\&=4\sin 7^\circ\cos 36^\circ\sin 18^\circ\\&=\frac{4\sin 7^\circ\cos 36^\circ\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}\\&=\frac{2\sin 7^\circ\cos 36^\circ\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}\\&=\frac{\sin 7^\circ\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{\sin 7^\circ\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}\\&=\sin 7^\circ.\end{aligned}$$

例 3 求证：

$$\tan 3\alpha=\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha).$$

证明 应用三倍角公式，再引入辅助角 60° 来证明.

因为 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$$=4\sin\alpha(\sin^2 60^\circ-\sin^2\alpha)$$

$$=4\sin\alpha(\sin 60^\circ+\sin\alpha)(\sin 60^\circ-\sin\alpha)$$

$$=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha),$$

同理，$\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$.

用 $\sin 3\alpha\div\cos 3\alpha$，它们所表达的两式的右边也相除，便得到

$$\tan 3\alpha=\tan\alpha\cdot\tan(60^\circ-\alpha)\cdot\tan(60^\circ+\alpha).$$

例 4 求证：

(1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3/16$；

(2) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=1/16$；

(3) $\sin 5^\circ\sin 55^\circ\sin 65^\circ=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/16$；

(4) $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=3/16$；

(5) $\tan 10^\circ\tan 50^\circ\tan 110^\circ=-\sqrt{3}/3$.

证明 (1)根据例 3 推出的等式，两边同时除以 4，得到

$$\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cdot\sin 3\alpha,$$

以此作为本题变角的根据.

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$$

$$=\sin 20^\circ\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sin(3\times 20^\circ)\cdot\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 60^\circ=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=3/16.$$

(2)仿照本例第(1)题进行角度互变.

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$$

$$=\cos 20^\circ\cos(60^\circ-20^\circ)\cos(60^\circ+20^\circ)\cos 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\cos(3\times 20^\circ)\cdot\cos 60^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$

$$=1/16.$$

(3) 仿照本例第(1)题进行角度互变.

$$\sin5^\circ\sin55^\circ\sin65^\circ$$

$$=\sin5^\circ\sin(60^\circ-5^\circ)\sin(60^\circ+5^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}\sin(3\times5^\circ)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}.$$

(4) 仿照本例第(1)题进行角度互变.

$$\cos10^\circ\cos30^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$$

$$=\cos10^\circ\cos(60^\circ-10^\circ)\cos(60^\circ+10^\circ)\cos30^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cos(3\times10^\circ)\cos30^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cos^2 30^\circ$$

$$=\frac{3}{16}.$$

(5) 仿照本例第(1)题进行角度互变.

$$\tan10^\circ\tan50^\circ\tan110^\circ$$

$$=\tan50^\circ\tan(60^\circ-50^\circ)\tan(60^\circ+50^\circ)$$

$$=\tan(3\times50^\circ)=\tan150^\circ$$

$$=-\tan30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 5 求证：

$$\cot20^\circ\cot40^\circ\cot80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

证明 仿照例 4 第(1)题进行角度互变.

$$\cot20^\circ\cot(60^\circ-20^\circ)\cot(60^\circ+20^\circ)$$

$$=\cot(3\times20^\circ)=\cot60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 6 求证：

(1) $(1-\tan15^\circ)/(1+\cot75^\circ)=\sqrt{3}/3$；

(2) $\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=1/2$.

证明

(1)先将单角化成和角,再利用三角函数特殊值进行证明.

$$\frac{1-\tan15^\circ}{1+\cot75^\circ}=\frac{1-\tan15^\circ}{1+\tan15^\circ}=\frac{\tan45^\circ-\tan15^\circ}{1+\tan45^\circ\tan15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)$$

$=\tan30^\circ=\sqrt{3}/3$.

(2) 先将单角化成和角,再利用三角函数特殊值进行证明.

因为 $\sin\frac{7\pi}{18}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\frac{\pi}{9}$,

所以 原式$=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}=1/2$.

例 7 求证:

$$(\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ)(\cos15^\circ+\sin15^\circ)^2=3\sqrt{3}/4.$$

证明 先将单角化为倍角,再利用三角函数特殊值进行证明.

左边$=(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ+2\cos15^\circ\sin15^\circ+\sin^2 15^\circ)$

$=\cos30^\circ(1+\sin30^\circ)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

例 8 已知:$4\cos x\cos y=\sqrt{6}$,$4\sin x\sin y=\sqrt{2}$,求证:

$$(1-\cos4x)(1-\cos4y)=3.$$

证明 将单角、四倍角均化为二倍角来求值证明.

因为 $(4\cos x\cos y)(4\sin x\sin y)=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}$,

即 $\sin2x\sin2y=\sqrt{3}/2$,

所以 $(1-\cos4x)(1-\cos4y)$

$=2\sin^2 2x\cdot 2\sin^2 2y$

$=4(\sin2x\sin2y)^2$

$=3$.

例 9 证明恒等式：

(1) $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)=3/2$；

(2) $\tan2\alpha\tan(30°-\alpha)+\tan2\alpha\tan(60°-\alpha)+$
$\tan(60°-\alpha)\tan(30°-\alpha)=1.$

证明 (1)先将单角化为二倍角，再用和差化积的公式化简证明.

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(1+\cos2\alpha)/2+[1+\cos(2\alpha+240°)]/2+\\&\quad[1+\cos(2\alpha-240°)]/2\\&=3/2+[\cos2\alpha+\cos(120°+2\alpha)+\cos(240°+2\alpha)]/2\\&=3/2+[\cos2\alpha+2\cos(180°+2\alpha)\cos60°]/2\\&=3/2+(\cos2\alpha-\cos2\alpha)/2\\&=3/2.\end{aligned}$$

(2)因为 $$\frac{\tan(30°-\alpha)+\tan(60°-\alpha)}{1-\tan(30°-\alpha)\tan(60°-\alpha)}=\tan(90°-2\alpha)=1/\tan2\alpha,$$

所以 $\tan2\alpha\tan(30°-\alpha)+\tan2\alpha\tan(60°-\alpha)=$
$1-\tan(30°-\alpha)\tan(60°-\alpha)$

故有 $$\tan2\alpha\tan(30°-\alpha)+\tan2\alpha\tan(60°-\alpha)+\tan(30°-\alpha)\tan(60°-\alpha)=1.$$

例 10 求证：

$$\frac{\tan(75°+\alpha)-\tan(30°+\alpha)}{1+\tan(75°+\alpha)\tan(30°+\alpha)}=$$
$$\sin(60°-\alpha)\cos(30°+\alpha)+\cos(60°-\alpha)\sin(30°+\alpha).$$

证明 等式左边利用差角公式，右边利用和角公式，进行角度互化，借助特殊值，来达到证明目的.

因为 左边 $=\tan[(75°+\alpha)-(30°+\alpha)]=\tan45°=1$，

右边 $=\sin[(60°-\alpha)+(30°+\alpha)]=\sin90°=1$，

所以原等式成立.

例 11 已知：$\sin A+\sin3A+\sin5A=a$，

$$\cos A+\cos 3A+\cos 5A=b.$$

求证：(1) 当 $b\neq 0$ 时，$\tan 3A=a/b$；

(2) $(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$.

证明 (1)将两式左边的第一、三项，利用和差化积的公式进行角度互换，析因后相除，便得到要证的结果.

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin 3A+\sin 5A\\=&\sin 3A+2\sin 3A\cos 2A\\=&\sin 3A(1+2\cos 2A)=a,\end{aligned}\tag{①}$$

$$\begin{aligned}&\cos A+\cos 3A+\cos 5A\\=&\cos 3A+2\cos 3A\cos 2A\\=&\cos 3A(1+2\cos 2A)=b.\end{aligned}\tag{②}$$

①÷②得到

$$\tan 3A=a/b.$$

(2) 将上面的①与②式平方再相加，得到

$$\sin^2 3A(1+2\cos 2A)^2+\cos^2 3A(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (1+2\cos 2A)^2(\sin^2 3A+\cos^2 3A)=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2.$$

例 12 已知：$A+B+C=\pi$，求证：

$$\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\sin\left(B+\frac{C}{4}\right)+\sin\left(C+\frac{A}{4}\right)+$$

$$\cos\left(A+\frac{B}{4}\right)+\cos\left(B+\frac{C}{4}\right)+\cos\left(C+\frac{A}{4}\right)=$$

$$4\sqrt{2}\sin[(4A+B+\pi)/8]\cdot\sin[(4B+C+\pi)/8]\cdot$$

$$\sin[(4C+A+\pi)/8].$$

证明 利用和差化积及诱导公式，进行角度互化，达到变成积的目的.

因为 $\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\cos\left(A+\frac{B}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-A-\frac{B}{4}\right)$，

$$\sin\left(B+\frac{C}{4}\right)+\cos\left(B+\frac{C}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-B-\frac{C}{4}\right),$$

$$\sin\left(C+\frac{A}{4}\right)+\cos\left(C+\frac{A}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-C-\frac{A}{4}\right),$$

所以原式 $=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-A-\frac{B}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-B-\frac{C}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-C-\frac{A}{4}\right)\right]$

$$=\sqrt{2}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}-\frac{B+C}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+\frac{B-C}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+C+\frac{A}{4}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+\frac{B-C}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{C}{2}+\frac{A}{8}\right)\right]$$

$$=4\sqrt{2}\sin[(4A+B+\pi)]/8\cdot\sin[(4B+C+\pi)/8]\cdot\sin[(4C+A+\pi)/8].$$

例 13 求证：

(1) $\sin\theta\cos^3\theta-\sin^3\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\sin4\theta$；

(2) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$；

(3) $3+\cos4\alpha-4\cos2\alpha=8\sin^4\alpha$；

(4) $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}\right)=1.$

证明 (1)先分解因式，再两次运用二倍角公式进行角度互化来证明.

左边 $=\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$$=\frac{1}{2}\sin2\theta\cos2\theta=\frac{1}{4}\sin4\theta.$$

(2)应用差角及半角公式进行角度互化来加以证明.

左边 $=2+2\cos(\alpha-\beta)=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

(3)应用二倍角公式进行角度互化来证明.

$$\begin{aligned}左边&=3+(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)-4(1-2\sin^2\alpha)\\&=3+(1-2\sin^2\alpha)^2-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2-4+8\sin^2\alpha\\&=4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\&=4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=8\sin^4\alpha.\end{aligned}$$

(4) 应用二倍角公式进行角度互化来证明.

$$\begin{aligned}左边&=\frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}+2\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\\&=\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1.\end{aligned}$$

例 14　求证：

$$\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

证明　利用和角公式进行角度互化来证明.

$$\begin{aligned}因为右边&=\cos\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\\&=\cos\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\cos 3\alpha,\end{aligned}$$

$左边=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 3\alpha,$

所以原等式成立.

例 15　求证：

$$\frac{\tan(60^\circ+\alpha)-\tan(15^\circ+\alpha)}{1+\tan(60^\circ+\alpha)\tan(15^\circ+\alpha)}=\sin(53^\circ-\alpha)\cos(37^\circ+\alpha)+\cos(53^\circ-\alpha)\sin(37^\circ+\alpha).$$

证明　左、右都用和角公式进行变角，利用值相等来证明等式成立.

$左边=\tan[(60^\circ+\alpha)-(15^\circ+\alpha)]=\tan 45^\circ=1,$