万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

最新版

考研系列图书

考研数学真题大解析

<珍藏版>

（数学二）

分类详解分册

主编：丁勇　副主编：周晓燕　吴娜

★ 历年考点分学科分章节归纳

★ 命题规律及趋势一目了然

★ 题目解析简单明了直击得分点

★ 附加分套装订真题，研读演练两不误

名师点题，答疑

中国政法大学出版社

万学教育 UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

最新版

考研数学真题大解析 <珍藏版>（数学二）

分类详解分册

主编：丁勇　副主编：周晓燕　吴娜

中国政法大学出版社

2017·北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学真题大解析. 数学二：珍藏版/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-5620-7409-0

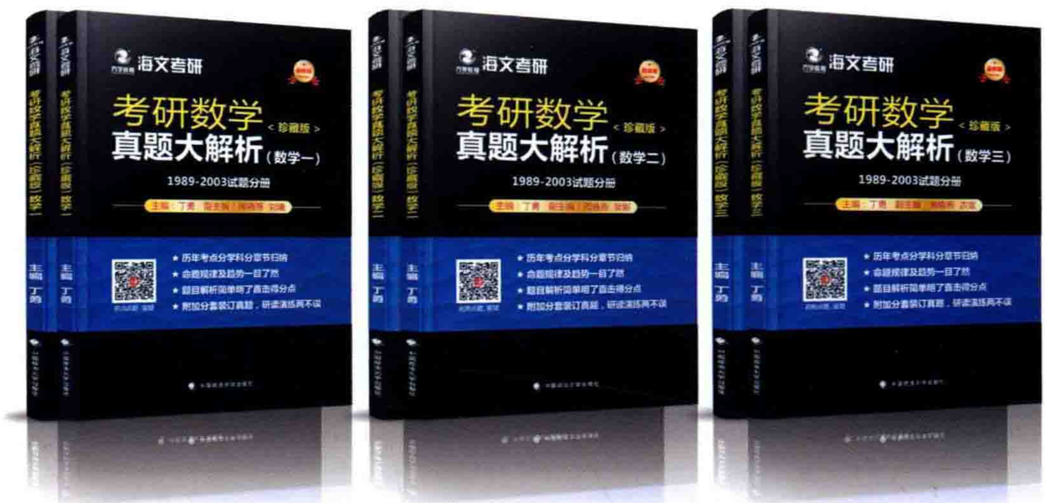
Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 062537 号

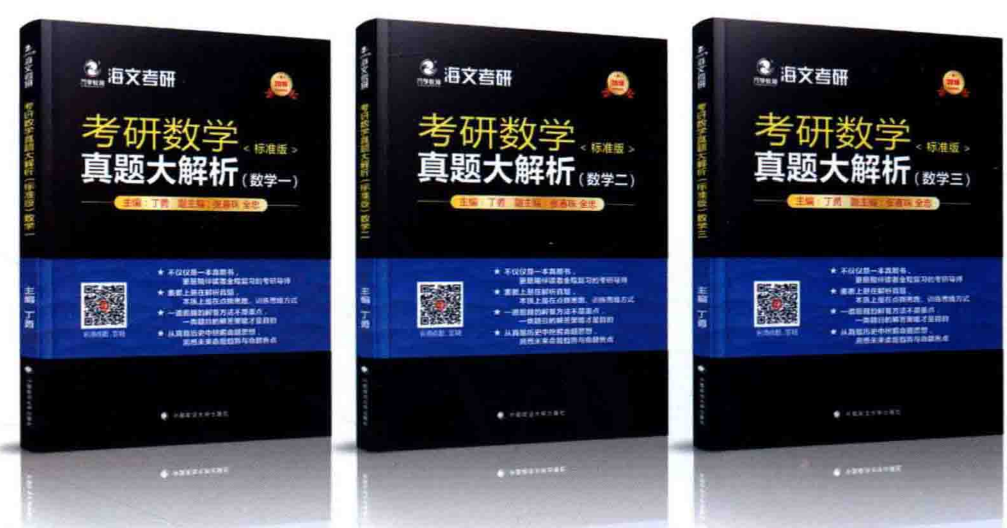
出 版 者　中国政法大学出版社
地　　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　　印　北京朝阳印刷厂有限责任公司
开　　本　787mm × 1092mm　1/16
印　　张　12.75
字　　数　360 千字
版　　次　2017 年 3 月第 1 版
印　　次　2017 年 3 月第 1 次印刷
定　　价　36.80 元

考研数学最权威的研读资料
倾注编者多年教学心血

珍藏版 1989-2003 真题分类详解，解析简单明了，直击得分点



标准版 2004-2017真题按套卷顺序详解+分类纵览，解析面面俱到，侧重方法传授



集齐29年考研数学真题精华
组成一套完整的真题资料

万学教育 海文考研

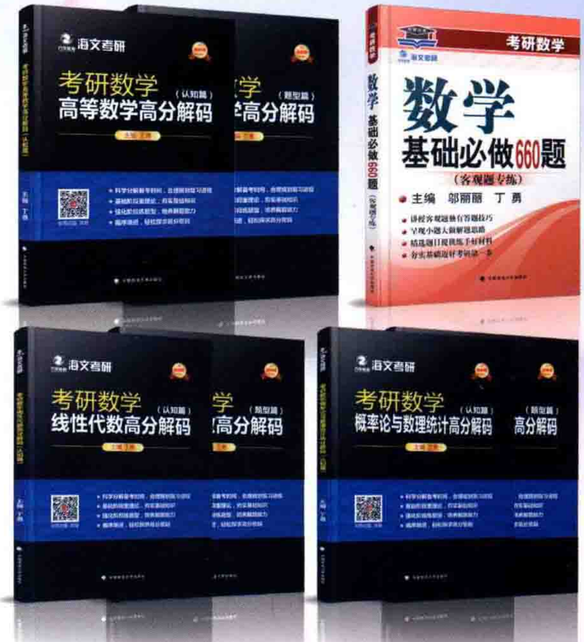
考研数学基础阶段参考用书

《考研数学高等数学高分解码》

《考研数学线性代数高分解码》

《考研数学概率论与数理统计高分解码》

《考研数学基础必做660题》

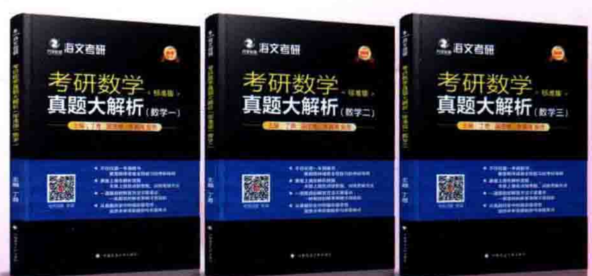


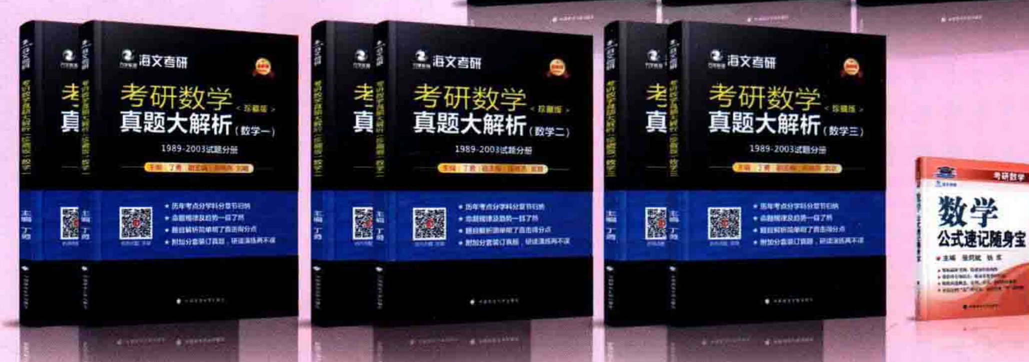
考研数学全程阶段参考用书

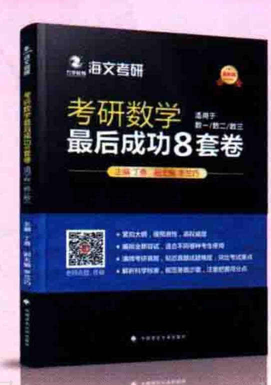
《考研数学真题大解析（标准版）》

《考研数学真题大解析（珍藏版）》

《考研数学公式速记随身宝》







考研数学冲刺阶段参考用书

《考研数学最后成功8套题》

前言

历年考研数学考试试题是命题人对于《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现，是参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是复习考研数学必备的宝贵资料，是成功驾驭数学考试的权威工具。通过研读真题，考生可以快速看清数学考试全貌，熟悉试题形式和特点，把握命题规律和考试重点、难点和题型，检测自身复习效果，增强临场实战感受，切实提高应试能力，为取得优异成绩奠定坚实的基础。

编者从事考研数学辅导十多年，积累了丰富的经验，与全国各地考生有大量的基础和交流，充分知晓广大考生在数学复习中普遍存在的问题和真切的需求，特编写本书切实解决考生复习中存在的问题和帮助考生迅速提高数学能力。

本书汇集了 1989 年到 2003 年的数学真题，按照如下方式编写：

一、1989－2003 年真题汇编

在这一部分考生可以按照套卷进行全真模拟，同时每一套试题都给出答案速查表，方便考生核对答案，同时指出本题在后面章节分类解析中的具体页码，方便考生查看详细解答过程。

二、分章节详细解析

将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试的重要性是不言而喻的。

每章按知识点分节，每道题目解析按以下内容编写：

首先给出每一个试题的【考查点】，让考生对每一个题目考查的知识点了然于胸，从中可以归纳出哪些考点是重点，从而把握复习的侧重点。

其次给出每一个试题的【破冰点】，让考生了解如何从已知条件和结论分析本题的解题思路和解题方法，培养分析问题、解决问题的能力。

最后给出每一个试题的【解析】，对所有大纲内的试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有巧妙、独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。

另外，由于试题时间久远，存在一些超出最新大纲要求的题目。我们在试题部分尽力还原考研

试题原貌，但在解析部分不再给出解析。有兴趣的同学可以咨询编者，关注微博@万学丁勇或者微信公众号“勇哥考研数学”即可。

编者建议考生在使用本书之前可以先认真阅读相关教材和参考书（推荐考生认真阅读《考研数学高分解码》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），之后再来看本书的试题，以检验自己复习的效果。最后，可以通过《考研数学真题大解析（标准版）》（该书汇集 2004—2017 年考研数学真题）来巩固所学知识和解题方法。考生将以上两本真题书研习 2～3 遍，达到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度，取得考研数学高分则水到渠成。

限于编写时间和编者水平，不足与不当之处在所难免，恳请同行专家及考生批评指正。

编者

2017 年 2 月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限和连续性

第一节　函　数

[1990,一(5),3分] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ ______.

【考查点】 分段函数，复合函数.

【破冰点】 对于分段函数的复合函数求解必须取遍内层函数的值域，不能遗漏，求出复合后函数的所有可能的解析式.

【解析】 当 $|x|\leqslant 1$ 时，有 $f(x)=1$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(1)=1$. 于是当 $|x|\leqslant 1$ 时，复合函数 $f[f(x)]\equiv 1$；

当 $|x|>1$ 时，有 $f(x)=0$. 代入 $f[f(x)]$，又 $f(0)=1$，即当 $|x|>1$ 时，也有 $f[f(x)]\equiv 1$.

因此，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f[f(x)]\equiv 1$.

[1992,二(2),3分] 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【考查点】 分段函数，复合函数.

【破冰点】 先将 $f(x)$ 中所有 x 换成 $-x$，再化简.

【解析】 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

所以应选(D).

[1997,二(5),3分] 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【考查点】 分段函数，复合函数.

【破冰点】 本题考查函数的复合问题，分清内层函数的定义域与值域，要注意内层函数的值域是外层函数的定义域的子区间.

【解析】 当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$.

故 $g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 因此应选(D).

[2001,二(1),3分] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A)0.　　(B)1.

(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D)$f(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

【考查点】 分段函数，复合函数.

【破冰点】 本题考查函数的复合问题，分清内层函数的定义域与值域，要注意内层函数的值域是外层函数的定义域的子区间.

【解析】 因为 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 所以 $|f(x)|\leqslant 1$，于是 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$. 故应选(B).

第二节　极　限

[1989,一(1),3分] $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$ ________.

【考查点】 等价无穷小替换，洛必达法则.

【破冰点】 本题属于“$0\cdot\infty$”型未定式，可将其变换成“$\dfrac{0}{0}$”型，从而利用洛必达法则或等价无穷小替换进行求解.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}x\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\xlongequal[\text{替换}]{\text{等价无穷小}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

[1989,二(3),4分] 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

【考查点】 重要极限公式，洛必达法则.

【破冰点】 本题属于“1^∞”型未定式极限，利用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

【解析】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to 0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}[1+(2\sin x+\cos x-1)]^{\frac{1}{2\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}},\end{aligned}$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{1}=2,$$

所以
$$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^2.$$

[1990,二(1),3分] 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则(　　)

(A)$a=1,b=1$.　　(B)$a=-1,b=1$.

(C)$a=1,b=-1$.　　(D)$a=-1,b=-1$.

【考查点】 “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式极限.

【破冰点】 本题考查“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式极限，可以先通分.

【解析】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}\right]=0$，

得 $\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-1$.

所以此题应选(C).

[1990,三(1),5分] 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求常数$a$.

【考查点】 重要极限公式.

【破冰点】 本题属于"1^∞"型未定式极限,利用重要极限公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

【解析】 由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2a}{x-a}x}=\mathrm{e}^{2a}=9$,得$2a=\ln 9$,即$a=\ln 3$.

[1991,一(5),3分] $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$________.

【考查点】 "$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式极限.

【破冰点】 本题属于"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,由于出现了倒数,可以考虑倒代换$x=\dfrac{1}{t}$.

【解析】 令$t=\dfrac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^t}{\dfrac{1}{t}+\mathrm{e}^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\dfrac{1}{t\mathrm{e}^t}+1}=-1$.

[1991,三(3),5分] 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}$.

【考查点】 等价无穷小替换,洛必达法则.

【破冰点】 本题属于"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限,可以先利用等价无穷小替换,再利用洛必达法则.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

注:本题分子也可以考虑利用等价无穷小替换$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$.

[1992,一(3),3分] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^x-\cos x}=$________.

【考查点】 等价无穷小替换,洛必达法则.

【破冰点】 本题属于"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限,可以先利用等价无穷小替换,再利用洛必达法则.

【解析】 由$x\to0$时,$1-\sqrt{1-x^2}\sim-\dfrac{1}{2}(-x^2)=\dfrac{1}{2}x^2$,得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\mathrm{e}^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\mathrm{e}^x+\sin x}=0.$$

[1992,二(1),3分] 当$x\to0$时,$x-\sin x$是x^2的(　　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但非等价的无穷小.

【考查点】 等价无穷小替换,洛必达法则.

【破冰点】 本题属于"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限,可以先利用洛必达法则,再利用等价无穷小替换.

【解析】 因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$,故选(B).

[1992,二(3),3分] 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限（　　）

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.　　(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

【考查点】 极限存在的充要条件.

【破冰点】 对于函数在给定点 x_0 的极限是否存在需要判定左极限 $x\to x_0^-$ 和右极限 $x\to x_0^+$ 是否存在且相等，若相等，则函数在点 x_0 的极限是存在的.

【解析】 因为

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$

故当 $x\to 1$ 时函数没有极限，也不是 ∞.

故应选(D).

[1992,三(1),5分] 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【考查点】 重要极限公式.

【破冰点】 本题属于"1^∞"型未定式极限，利用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}-1\right)\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

[1993,一(1),3分] $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$ ________.

【考查点】 "$0\cdot\infty$"型未定式，洛必达法则.

【破冰点】 这是个"$0\cdot\infty$"型未定式，可将其等价变换成"$\dfrac{0}{0}$"型，从而利用洛必达法则进行求解.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$.

[1993,二(1),3分] 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的，但不是无穷小.　　(D) 无界的，但不是无穷大.

【考查点】 无穷小，无穷大，有界性.

【破冰点】 当 $x\to 0$ 时，通过求函数 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限值确定其为无穷大还是无穷小.

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 是振荡函数，所以

若取 $x_1=\dfrac{1}{k\pi}$，则 $\dfrac{1}{x_1^2}\sin\dfrac{1}{x_1}=(k\pi)^2\sin k\pi=0$；

$x_2=\dfrac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$，则 $\dfrac{1}{x_2^2}\sin\dfrac{1}{x_2}=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2,(k=1,2,\cdots)$.

因此，当 $k\to\infty$ 时，有 $x_1\to 0$ 及 $x_2\to 0$，但变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 或等于 0 或趋于 $+\infty$，这表明当 $x\to 0$ 时它是无界的，但不是无穷大量，即选项(D)正确.

[1993,三(2),5分] 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【考查点】 "$0\cdot\infty$"型未定式.

【破冰点】这是“$0\cdot\infty$”型未定式，先通过有理化变换成“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再利用分子分母同除无穷大进行求解.

【解析】先化简.

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+100}+x)\cdot(\sqrt{x^2+100}-x)}{\sqrt{x^2+100}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+100}-1},$$

因为 $x<0$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+100}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1}=\frac{100}{-1-1}=-50.$$

[1994,二(1),3分] 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则(　　)

(A) $a=1,b=-\frac{5}{2}$.　　(B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=0,b=-\frac{5}{2}$.　　(D) $a=1,b=-2$.

【考查点】“$\frac{0}{0}$”型未定式极限.

【破冰点】本题属于函数极限求参数的问题，根据极限存在这一前提，列出等式关系，求出参数.

【解析】**方法1**：由带佩亚诺型余项的泰勒公式将函数展开

$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(ax+bx^2)$$

$$=(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2),$$

由题意知 $\begin{cases}1-a=0,\\-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2,\end{cases}$ 故 $a=1,b=-\frac{5}{2}$，故应选(A).

方法2：分子分母在点0处导数都存在，由洛必达法则得

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x},$$

由分母极限为零知，分子极限也是零，即 $1-a=0$，得 $a=1$.

所以，上式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-(1+2b)x-2bx^2}{2x}=-\frac{1+2b}{2}$，即 $-\frac{1+2b}{2}=2$，得 $b=-\frac{5}{2}$.

故应选(A).

[1994,三(3),5分] 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

【考查点】重要极限公式.

【破冰点】本题属于“1^∞”型未定式极限，利用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}-1\right)\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot n}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}}\xlongequal{令\frac{1}{n}=x}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan 2x}{x}}=e^4.$$

[1995,一(4),3分] $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

【考查点】夹逼准则.

【破冰点】本题属于n项和的数列极限，利用夹逼准则，将每项分母放大到n^2+2n，对$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$进行缩小；将每项分母缩小到$n^2+n$，对$\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$进行放大.

【解析】应用夹逼准则求数列的极限.

令
$$a_n=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n},$$

则
$$a_n>\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2},$$

$$a_n<\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2},$$

即
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2}<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

由夹逼准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

[1995,三(1),5分] 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【考查点】“$\frac{0}{0}$”型未定式.

【破冰点】先对分子进行有理化，再利用等价无穷小计算.

【解析】当$x\to0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，从而

$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

[1996,一(4),3分] $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$________.

【考查点】“$0\cdot\infty$”型未定式极限.

【破冰点】利用极限的四则运算及等价无穷小计算.

【解析】本题满足四则运算的条件，由四则运算得

$$原式 = \lim_{x\to\infty} x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \lim_{x\to\infty} x\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

因为 $x\to\infty$ 时，$\sin\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x}$（$k$ 为非零常数），所以

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{3}{x}\right) - \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = 3-1 = 2.$$

[1996,二(1),3分] 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（　　）

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1.$　　(B) $a=1, b=1.$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=-1.$　　(D) $a=-1, b=1.$

【考查点】高阶无穷小，“$\frac{0}{0}$”型未定式极限.

【破冰点】本题先根据高阶无穷小的定义写出极限形式，进而问题转化成已知极限求参数的问题，根据极限存在这一前提，列出等式关系，求出参数.

【解析】方法1: 由洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2} \xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=0,$$

有
$$\lim_{x\to 0} e^x-2ax-b = 1-b=0,$$
得 $b=1$.

又由
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2ax-b}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2a}{2}=\frac{1-2a}{2}=0,$$
得 $a=\frac{1}{2}$.

应选(A).

方法2: 由带佩亚诺余项的泰勒公式，得

$$e^x-(ax^2+bx+1)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)-(ax^2+bx+1)$$
$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)\xlongequal{\text{令}}o(x^2),$$

可得 $\begin{cases}1-b=0,\\ \frac{1}{2}-a=0,\end{cases}$ 得 $a=\frac{1}{2}, b=1$. 应选(A).

[1997,二(1),3分] 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为（　　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

【考查点】同阶无穷小，“$\frac{0}{0}$”型未定式极限.

【破冰点】本题先根据同阶无穷小的定义写出极限形式，然后采用等价无穷小及洛必达法则计算.

【解析】方法1: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^n}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}x^{3-n},$$