高等院校数学精品教材

线性代数

主　编　袁明生
副主编　刘　海　唐国平

清华大学出版社

高等院校数学精品教材

线性代数

主　编　袁明生
副主编　刘　海　唐国平

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

作者以基于理论联系实际的课程开发设计模式，编写了这本应用型、应用研究型大学数学教材《线性代数》. 本书内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、MATLAB 软件在线性代数中的简单应用.

本书学习目的明确，实际问题具体，有充足翔实的应用实例可供参考，有相当数量的应用问题可供实践. 本书另有微课同步辅导视频可供参考.

本书可作为应用型、应用研究型大学经管类学生“线性代数”课程教材(适合 32～40 课时) 或参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/袁明生主编. — 北京：清华大学出版社，2017
(高等院校数学精品教材)
ISBN 978-7-302-45774-9

I. ① 线… II. ① 袁… III. ① 线性代数 – 高等学校 – 教材 IV. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016)第 290312 号

责任编辑： 佟丽霞
封面设计： 何凤霞
责任校对： 赵丽敏
责任印制： 李红英

出版发行： 清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 清华大学印刷厂
经　销： 全国新华书店
开　本： 185mm × 260mm　　**印　张：** 15.5　　**字　数：** 434 千字
版　次： 2017 年 8 月第 1 版　　**印　次：** 2017 年 8 月第 1 次印刷
印　数： 1 ～ 1500
定　价： 45.60 元

产品编号：066644-01

前　　言

为了适应应用型和应用研究型大学“线性代数”教学改革的需要，作者经过艰苦的研究和探索，在参考了大量的国内外优秀的线性代数教材、经济数学教材和应用实例的基础上编写了这本《线性代数》教材.

本书突出“应用”特色，注重培养学生的实际应用能力，基础理论内容完整，难易适中.基本应用技能贯穿始终，理论联系实际，以典型应用实例解说理论应用. 文字叙述简明准确，通俗易懂. 书中内容覆盖面广，取材广泛，满足了专业大类对基础理论、应用技能的要求，同时可满足学生深入学习的需要.

本书在编写的过程中，考虑了以下几个方面.

1. 考虑到线性代数课程的逻辑性，以及教与学的连贯性和承接性，本书采用了传统章节的编排顺序.

2. 为了减少对基础理论理解上的困难和有效利用课时，对一些结论采用“以例释理”. 对稍有难度的定理证明，给予“*”标识或略去，教学中可根据情况做取舍.

3. 书中例题极具代表性，例题讲解浅显易懂, 例题后归纳总结，具有启发性，可使学生能举一反三，触类旁通，进而提高学习效率.

4. 为了利于集中课时完成基础知识的教学内容并为应用部分腾出课时，基础知识部分的例题尽量基础且易懂，稍有提高的例题和部分内容单列在每章(第 5 章除外)的最后一节“典型例题”中(其难度总体低于考研难度)，教师和学生可以根据具体情况选用.

5. 书中所选应用题尽量符合时代要求，应用例题紧随基础内容之后，更好地体现线性代数的应用. 作者原创了若干个紧随时代的精彩应用例题和习题，取代了过时的复杂难讲的例题.希望本书在使用中能碰撞出新的火花.

6. 为适应数学的应用发展趋势和培养学生的数学建模意识，部分应用例题采用了数学建模的模式编排，这有利于学生了解数学建模的过程.

7. 第 4 章的应用例题选择主成分分析法和层次分析法在经济中的应用，以便让学生了解线性代数的应用是广泛而深入的，这可以开阔学生的数学视野，有益于增强学生的应用意识.

8. 将通用软件 MATLAB 在线性代数中的简单应用放在第 5 章，并用列表查询的方式编排，这有利于集中学习，可以大大缩短学习时间，提高学习效率.

9. 本书习题采用填空题、选择题、计算题 (包括少量证明题，适合不同情况的教学需求来选用)和应用题，且习题紧随每节之后，便于教学和自学. 填空、选择题注重基本概念和结论的理解. 前 3 章每章之后有复习题，难度比各节之后的习题略有提高.

10. 紧随现代教学的发展前沿，精心录制了同步微课辅导视频，能使学生更深入和更好地学习本课程. 微课视频同时可作为翻转课堂的准备视频.

参加本教材编写的有袁明生，刘海和唐国平, 由袁明生任主编并统稿. 教材中的微课视频由刘海录制(刘海老师在 2015 年“首届全国高校数学微课程教学设计竞赛”中荣获华东赛区一等奖).

本书配有电子教案，可到清华大学出版社网站下载或向作者发电子邮件索取.

本书可作为应用型和应用研究型大学经管类相关专业“线性代数”课程的教材或参考书.

在此感谢很多老师提供的丰富素材，如果没有这些素材的支撑，本书很难有如此充实丰富的内容.

本书是“线性代数”课程教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验. 希望广大师生和同仁在使用过程中能给作者以指教.

袁明生
msyuan2005@sohu.com
2016 年 6 月

目 录

第 1 章 **行 列 式** 1
1.1 二阶、三阶行列式 1
1.1.1 二阶行列式 1
1.1.2 三阶行列式 2
习题 1.1 3
1.2 n 阶行列式的定义 4
1.2.1 排列与逆序 5
1.2.2 排列的对换 6
1.2.3 n 阶行列式的定义 6
习题 1.2 10
1.3 行列式的性质 12
习题 1.3 21
1.4 行列式按行(列)展开 24
习题 1.4 30
1.5 克莱姆法则 34
习题 1.5 38
1.6 典型例题 40
复习题 1 46

第 2 章 **矩 阵** 54
2.1 矩阵的概念 54
2.1.1 矩阵概念的引入 54
2.1.2 几种特殊的矩阵 55
习题 2.1 57
2.2 矩阵的运算 57
2.2.1 矩阵的加法与数乘运算 58
2.2.2 矩阵的乘法 60
2.2.3 线性方程组的矩阵表示 63
2.2.4 矩阵的转置 65

2.2.5 方阵的幂 67
2.2.6 方阵的行列式 69
习题 2.2 70
2.3 可逆矩阵 73
2.3.1 可逆矩阵的概念 73
2.3.2 伴随矩阵, 非奇异矩阵 74
2.3.3 利用逆矩阵解矩阵方程 (线性方程组) 76
习题 2.3 78
2.4 矩阵的分块 80
2.4.1 分块矩阵的概念 80
2.4.2 分块矩阵的运算 81
习题 2.4 86
2.5 矩阵的初等变换 87
2.5.1 矩阵的初等变换 87
2.5.2 初等矩阵 90
2.5.3 用初等变换求逆矩阵 92
2.5.4 用初等变换解矩阵方程 93
习题 2.5 96
2.6 矩阵的秩 99
习题 2.6 102
2.7 典型例题 104
复习题 2 110

第 3 章 **线性方程组** 115
3.1 线性方程组解的存在定理 115
习题 3.1 125
3.2 向量及向量组的线性组合 128
3.2.1 n 维向量 128
3.2.2 向量组的线性组合 131
3.2.3 向量组之间的线性表示 133
习题 3.2 136
3.3 向量组的线性相关性 138
3.3.1 向量组的线性相关性 138
3.3.2 利用矩阵的秩判断线性相关性 139
3.3.3 线性组合与线性相关性 141

习题 3.3 144
3.4 向量组的秩 146
3.4.1 向量组的极大无关组 146
3.4.2 向量组的秩 147
3.4.3 极大无关组的求法 148
3.4.4 秩的比较定理 149
习题 3.4 151
3.5 线性方程组解的结构 153
3.5.1 齐次线性方程组解的结构 153
3.5.2 非齐次线性方程组解的结构 158
习题 3.5 161
3.6 线性方程组的经济应用 164
3.6.1 投入产出数学模型 164
3.6.2 线性规划数学模型 167
3.6.3 最小二乘法 169
习题 3.6 171
3.7 典型例题 173
复习题 3 176

第 4 章 特征值与特征向量 182
4.1 矩阵的特征值与特征向量 182
4.1.1 特征值与特征向量的概念 182
4.1.2 特征值与特征向量的性质 185
4.1.3 特征值与特征向量在经济管理中的应用 187
习题 4.1 194
4.2 矩阵的相似对角化 195
习题 4.2 202
4.3 典型例题 204

第 5 章 MATLAB 软件在线性代数中的简单应用 207
5.1 MATLAB 软件简介 207
5.1.1 MATLAB 软件简介 207
5.1.2 MATLAB 软件简易入门 207
5.1.3 与线性代数相关的 MATLAB 命令 208

5.2 MATLAB 软件在线性代数中的简单应用 210
5.2.1 矩阵的基本运算 210
5.2.2 行列式与线性方程组的求解 213
5.2.3 在特征值与特征向量中的应用 219

部分习题答案 220

参考文献 238

第 1 章　行　列　式

学习目标与要求

1. 了解行列式的定义.
2. 掌握行列式的性质和行列式按行 (列) 展开的方法.
3. 会计算简单的 n 阶行列式.
4. 掌握克莱姆 (Cramer) 法则.

行列式虽然产生于解线性方程组, 但它的应用却非常广泛.

1.1　二阶、三阶行列式

这一节我们介绍二阶和三阶行列式，为引入一般的 n 阶行列式做准备.

1.1.1　二阶行列式

行列式的概念是在解线性方程组时产生的，这一点在本章第 5 节中可以看到.

定义 1.1　二阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，它表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中, 数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列**元素**, i 称为**行标**，j 称为**列标**. 从左上角到右下角的连线称为**主对角线**, 从右上角到左下角的连线称为**次对角线**(如图 1.1). 由此可见，二阶行列式的值等于主对角线两元素的乘积减去次对角线两元素的乘积, 也可用图 1.1 的方式来表示.

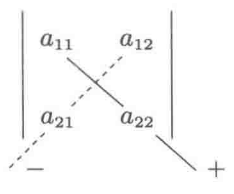

图 1.1　二阶行列式对角线法则

对于三阶和 n 阶行列式，以及矩阵，以上这些记号(行标，列标，主、次对角线等)也都这样称呼.

例 1.1　计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$.

解　由定义知

$$D = 3\times 6 - 2\times 5 = 8.$$

例 1.2 已知 $\lambda = a$ 是方程 $\begin{vmatrix} 2\lambda - 3 & \lambda + 5 \\ \lambda + 2 & \lambda + a \end{vmatrix} = 0$ 的根, 求常数 a 的值.

解 将 $\lambda = a$ 代入方程得 $\begin{vmatrix} 2a - 3 & a + 5 \\ a + 2 & 2a \end{vmatrix} = 0$, 由二阶行列式的定义有

$$D = (2a-3)2a - (a+2)(a+5) = 3a^2 - 13a - 10 = 0,$$

解得 $a = 5$ 或 $a = -\dfrac{2}{3}$.

1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 三阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，它表示数

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.2}$$

我们看到，三阶行列式是 $3! = 6$ 个乘积项的代数和，而每个乘积项都是行列式的不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

事实上，三阶行列式可用对角线法则来记忆(如图 1.2), 即：实线上的三个数的乘积取“+”号，虚线上的三个数的乘积取“−”号，三阶行列式的值等于它们的代数和.

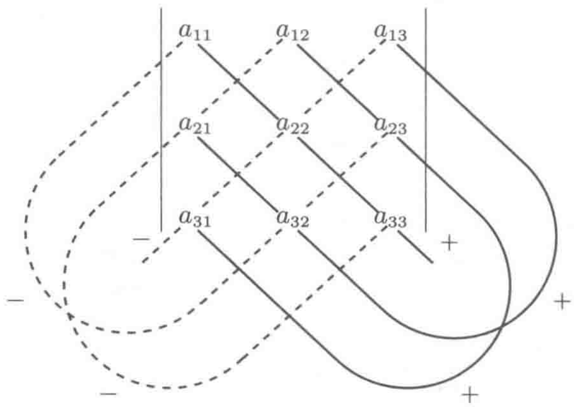

图 1.2 三阶行列式对角线法则

例 1.3 求行列式的值 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则有

$$D = 3\times(-1)\times4 + 2\times(-3)\times6 + 5\times0\times1 - 1\times(-1)\times6 - 2\times5\times4 - (-3)\times0\times3$$
$$= -12 - 36 + 6 - 40 = -82.$$

例 1.4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则有

$$D = a\cdot a_1\cdot b_2 + b\cdot b_1\cdot a_2 + 0\cdot0\cdot0 - 0\cdot a_1\cdot a_2 - b\cdot0\cdot b_2 - a\cdot b_1\cdot 0$$
$$= aa_1b_2 + bb_1a_2.$$

实际问题 1.1 平面上三点共线的条件

已知平面上的互异三点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$ 共线，推导其应满足的条件.

解 过 A,B 两点的直线方程用两点式表示为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

因 C 点在该直线上，所以 C 点坐标满足此方程，代入 (x_3,y_3) 得

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1},$$

化简得
$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2 = 0,$$

写成行列式即为
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

习 题 1.1

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$ ________.

2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1$, 则 $\lambda=$ ________.

3. $\begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-2 \\ (\lambda-3)a & \lambda^2-2\lambda \end{vmatrix} =$ ________.

4. 已知平面直线 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 与 $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 相互平行，则系数满足的关系式可用二阶行列式表示为：________.

5. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.　　6. $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x & x_2 & 0 \\ y & z & x_3 \end{vmatrix} =$ ________.

7. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & x \\ x_3 & y & z \end{vmatrix} =$ ________.　　8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

二、计算题

1．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 64 & 16 \\ 27 & 9 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} \dfrac{t^2}{t^2+t+1} & 1 \\ 1 & \dfrac{t}{t-1} \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & y \\ 3 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ c & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 验证以下等式成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三、应用题

1．若直线 l 经过平面上两个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，用行列式表示直线 l 的方程.

2．设平面直线 $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ 与 $l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 相互垂直，用行列式表示系数应满足的条件.

1.2　n 阶行列式的定义

和二阶、三阶行列式一样，n 阶行列式也是在解线性方程组时引入的，所以它的定义应该和二阶，三阶行列式的定义相一致.

在二、三阶行列式的展开式中，为什么有些项前面取“+”号，有些项前面取“−”号？这要在引入排列与逆序的概念后才能了解清楚，这也是引入 n 阶行列式所必需的概念.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.3 排列

n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的任何一个不重复的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级**排列**.

例如，23541 是一个 5 级排列，4132 是一个 4 级排列.

为方便起见，我们称 $123\cdots n$ 为**自然排列**.

定义 1.4 逆序和逆序数

在 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$，则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**.

排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中的逆序总数，称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如 5 级排列 45312 中，3 前的 4 比它大，则 4 与 3 构成一个逆序，5 与 1 也构成一个逆序，等等.

从这个定义出发，如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的第 j 个数 (元素)i_j 前有 t_j 个数比它大 $(1 \leqslant j \leqslant n)$，则称 t_j 为数 i_j 的逆序数，从而有

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{j=1}^{n} t_j. \tag{1.3}$$

例 1.5 求排列 51324 的逆序数.

解 容易得到，$t_1 = 0$，$t_2 = 1$，$t_3 = 1$，$t_4 = 2$，$t_5 = 1$，所以

$$\tau(51324) = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 = 5.$$

我们也可以通过如下算式简单计算逆序数:

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_j & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

所以 $\tau(51324) = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 = 5$.

显然，自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0.

定义 1.5 奇排列与偶排列

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

显然例 1.5 中的排列为奇排列，又如，因为 $\tau(4132) = 4$，所以排列 4132 为偶排列.

例 1.6 求排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 21$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解 列算式求解如下，

$$\begin{array}{ccccccc} \text{排列} & n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ t_j & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{array}$$

所以 $\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 21) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

容易得到，当 $n = 4k$，$n = 4k+1$ 时，为偶排列；当 $n = 4k+2$，$n = 4k+3$ 时，为奇排列.

例 1.7 求 i, j 的值, 使 $645i1j$ 为偶排列，若要使它为奇排列, i, j 又为多少?

解 因为是 6 级排列, 所以 i, j 只能从 2，3 两数中各取一个.

若 $i=2$，$j=3$，则 $\tau(645i1j)=\tau(645213)=12$，此时为偶排列;

若 $i=3$，$j=2$，则 $\tau(645i1j)=\tau(645312)=13$，此时为奇排列.

1.2.2 排列的对换

为了研究行列式的性质，常常需用到对换的概念.

定义 1.6 排列的对换

在一个排列中, 将任何两个数对调, 而其他数位置不变, 这一过程称为**对换**. 将相邻两数对调, 称为**相邻对换**.

例如, 在排列 45231 中, 对换 1 与 2, 得到排列 45132.

定理 1.1 任何排列经一次对换后, 其奇偶性改变.

*证明 **先证明相邻对换情形.**

设 n 级排列 $\cdots ij \cdots$ 对换 i 与 j 后得到排列 $\cdots ji \cdots$. 注意到在对换前后，虚点处各元素的逆序数并不改变，所以只需考虑对换前后元素 i 与 j 的逆序数的变化.

当 $i<j$ 时，对换后，i 的逆序数增大 1，j 的逆序数不会改变，所以对换后排列的逆序数增大 1;

当 $i>j$ 时, 对换后, i 的逆序数不变, j 的逆序数减小 1, 所以对换后排列的逆序数减小 1.

由此，无论 $i<j$ 还是 $i>j$, 经相邻对换后排列的奇偶性改变.

再证一般情形.

设 n 级排列 $\cdots ia_1\cdots a_mj\cdots$ 经过对换 i 与 j 后变为排列 $\cdots ja_1\cdots a_mi\cdots$，我们将这一对换看成是经过若干次相邻对换来实现的. 首先，i 依次与 $a_1,\cdots,a_m,j$ 经 $m+1$ 次相邻对换变为排列 $\cdots a_1\cdots a_mji\cdots$，然后将 j 依次与 $a_m,\cdots,a_1$ 经过 m 次相邻对换变为所需要的排列 $\cdots ja_1\cdots a_mi\cdots$ ，一共经过了 $(m+1)+m=2m+1$ 次相邻对换. 于是排列的奇偶性改变了奇数次，从而排列 $\cdots ia_1\cdots a_mj\cdots$ 与排列 $\cdots ja_1\cdots a_mi\cdots$ 的奇偶性相反. □

1.2.3 n 阶行列式的定义

为了得到 n 阶行列式的定义，需要将二阶、三阶行列式的定义统一起来. 我们先引入下列重要定理.

定理 1.2 n 级排列共有 $n!$ 个 $(n>1)$，其中奇、偶排列各占一半，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

*证明 定理的前半部分由排列组合中的排列数即可得到证明. 下面证明后半部分.

设 $n!$ 个 n 级排列中有 p 个奇排列, q 个偶排列. 将 p 个奇排列中的每个排列的第一、二个数都进行一次对换, 则得 p 个不同的偶排列, 于是知 $p\leqslant q$. 同样, 将 q 个偶排列中的每个排列的第一、二个数都进行一次对换, 得到 q 个不同的奇排列, 于是有 $q\leqslant p$, 从而 $p=q$. □

例如, 2 级排列共有 2!=2 个, 其中偶排列是 12, 奇排列是 21.

又如, 3 级排列共有 3!=6 个, 其中偶排列为 123, 231, 312, 奇排列为 132, 213, 321.

现在我们来考察二阶、三阶行列式的共同特征. 注意到 $(-1)^{2k}=1$，$(-1)^{2k+1}=-1(k\in\mathbb{N})$，所以符号取决于指数的奇偶性. 我们得到二阶、三阶行列式的展开式有以下几个特点:

(1) 二阶行列式有 2!=2 项，三阶行列式有 3!=6 项；

(2) 行列式的每一项都是不同行，不同列的元素的乘积，再加上一个正、负号. 当行标按自然顺序排列时，如果列标排列是偶排列，则这一项前取“+”号, 如果列标排列是奇排列，则这一项前取“−”号(参考以下等式)；

(3) 行列式展开式中有一半项前面取“+”号，另一半项前面取“−”号.

所以我们可以将二阶、三阶行列式统一用求和符号“$\sum$”表示如下(其中每项上面括号内标出列标排列的逆序数, 这是为了便于理解)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\overset{(0)}{a_{22}} - a_{12}\overset{(1)}{a_{21}} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\overset{(0)}{a_{22}}a_{33} + a_{12}\overset{(2)}{a_{23}}a_{31} + a_{13}\overset{(2)}{a_{21}}a_{32} - a_{13}\overset{(3)}{a_{22}}a_{31} - a_{12}\overset{(1)}{a_{21}}a_{33} - a_{11}\overset{(1)}{a_{23}}a_{32} \\ &= \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.\end{aligned}$$

其中 $\sum$ 是分别对列标排列 j_1j_2 和 $j_1j_2j_3$ 求和.

这样，二阶、三阶行列式的定义就统一起来了. 其实 n 阶行列式也是这样定义的.

定义 1.7 n 阶行列式

n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.4}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

n 阶行列式简记为 $D=|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$. 注意它和绝对值记号是有区别的.

关于 n 阶行列式的定义，需要注意以下几点：

(1) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项的代数和；

(2) 每一项都是不同行，不同列的 n 个元素的乘积，再加上一个正、负号. 当行标按自然顺序排列时，如果列标构成的排列是偶排列，则这一项前取“+”号；如果列标构成的排列是奇排列，则这一项前取“−”号 (参考以上二、三阶行列式的等式)；

(3) n 阶行列式的展开式中有一半项前面取“+”号，另一半项前面取“−”号.

注意，这里说的“+”、“−”号，不包括各元素本身的符号.

因为行列式的任何一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 都必须在每一行和每一列中各取一个元素，所以得到：

> 如果行列式有一行 (列)为零，则行列式的值为零.

如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

以下介绍几类特殊行列式的计算，其结果可作为公式使用.

例 1.8　求上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$ 的值.

解　按行列式的定义有

$$D = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

我们知道，如果 a_{1j_1}，a_{2j_2}，a_{3j_3}，a_{4j_4} 中有一个元素为 0, 则这一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 即为 0，这种项不需要计算，所以我们只需寻找 a_{1j_1}，a_{2j_2}，a_{3j_3}，a_{4j_4} 都是字母的项.

根据该行列式的特点，从第 4 行起考虑. 易知，必须 $j_4 = 4$，即乘积项中必须有 $a_{4j_4} = a_{44}$ 这个元素，划去 a_{44} 所在的第 4 行与第 4 列，在剩下部分考虑，考察第 3 行知，乘积项中必须有 $a_{3j_3} = a_{33}$ 这个元素，再划去 a_{33} 所在的行与列知，乘积项中必须有 $a_{2j_2} = a_{22}$ 这个元素，划去 a_{22} 所在的第 2 行与第 2 列知，必须有 $a_{1j_1} = a_{11}$ 这个元素. 所以有 $j_4 = 4, j_3 = 3, j_2 = 2, j_1 = 1$，即

$$D = (-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

以上结果可推广到 n 阶上三角行列式的情形, 即

n **阶上三角行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{1.5}$$

类似地，可得

n **阶下三角行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{1.6}$$