

张宇数学教育系列丛书

时代云图
SHI DAI YUN TU

理工社®

2018

张宇 考研数学

题源探析经典 1000题

习题分册·数学一

张宇
主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



张宇 考研数学

题源探析经典 1000题

习题分册·数学一

张宇○主编

张宇数学教育系列丛书编辑委员会（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈常伟 陈静静 崔巧莲 高昆轮 郭二芳 胡金德 黄文义 贾建厂 兰杰
李海鹏 廖家斌 刘露 柳青 田宝玉 万金平 王娜 王秀军 王玉东 吴萍 徐兵
严守权 亦一（笔名） 于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张婷婷 张心琦 张亚楠 张宇 赵乐
赵修坤 朱杰

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 习题分册. 数学一 / 张宇主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2017. 4

ISBN 978-7-5682-3937-0

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 075963 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 7.5

字 数 / 188 千字

版 次 / 2017 年 4 月第 1 版 2017 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 56.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

Foreword 前言

与考生说几句体己话

这本书,首先是题源,说白了,就是命题的源泉.建设好这个源泉,是这本书的指导思想.源头建设是极其不容易的,绝不是东拼西凑几个题目那样简单,众多命题专家和教学专家多年的经验和无私的奉献,才成就了这本书的高质量.很欣慰地看到,上一个考研年,本书不仅对 2017 的考研数学试题做出了精准的预测,而且还对考生参加全国、各省市大学生数学竞赛,校内的期中、期末考试,都起到了积极的作用,甚至还有原题出现在各种形式的考试试卷上.

这本书,又是习题集.考研数学复习,必须要辅以足量的习题训练,这是本书的目标与任务.

这本书,还是畅销书.全国有众多考生选择这本习题集,让本书作者倍感责任重大.这一版,仍然做了认真修改:增加、替换了一些要紧的题目,以适应新一年的命题趋势;吸收了各方面传递给作者的好的建议;订正、修改了一些关键的内容,以进一步提高本书的质量和可读性.

在 2018 版中,我们不仅增加了一些新颖的,反映考试命题趋势的新题,还将题目按照难易程度不同分为 A 组, B 组, C 组, 其中 A 组题较容易, B 组题难度中等, C 组题较难, 供读者参考. 在基础复习时, 可先集中力量做完 A, B 组题, 在强化复习与综合总结时, 再做 C 组题. 当然, A, B, C 的分法也可能因人而异, 有个别题目, 不同的读者可能认为其难度所放置的组别不合适, 这很正常, 读者也可有自己的归类, 但作者期望你们把所有题目都认真完成.

在这里, 要感谢不少高校教师选择本书作为他们辅导学生、提升大学数学学习能力的习题课教材, 感谢全国各大考研辅导机构选择本书作为学员的复习资料, 感谢各位考生对本书提出的宝贵意见和建议.

新的一个考研年, 我作为主编, 代表各位作者, 继续欢迎各位读者朋友们勇于攀登, 攻克难关, 用好这本书, 提高数学解题能力.

张宇

2017 年 4 月

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题.	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备 与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性.	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组组长参与.	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇考研数学题源探析 经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解.原命题组组长参与.	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路.原命题组组长参与.	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.出版日期见封四.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 <http://weibo.com/yuntubook/>
张宇新浪微博:@宇哥考研 <http://weibo.com/zhangyumaths/>

Contents 目录

第一篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续 (3)

A 组	(3)
一、选择题	(3)
二、填空题	(4)
三、解答题	(4)
B 组	(5)
一、选择题	(5)
二、填空题	(6)
三、解答题	(6)
C 组	(7)
一、选择题	(7)
二、填空题	(8)
三、解答题	(8)

第 2 章 一元函数微分学 (9)

A 组	(9)
一、选择题	(9)
二、填空题	(11)
三、解答题	(11)
B 组	(12)
一、选择题	(12)
二、填空题	(13)
三、解答题	(14)
C 组	(17)
一、选择题	(17)
二、填空题	(18)
三、解答题	(18)



第 3 章 一元函数积分学 (19)

A 组	(19)
一、选择题	(19)
二、填空题	(20)
三、解答题	(20)
B 组	(21)
一、选择题	(21)
二、填空题	(22)
三、解答题	(23)
C 组	(27)
一、选择题	(27)
二、填空题	(28)
三、解答题	(28)

第 4 章 向量代数与空间解析几何 (30)

A 组	(30)
一、选择题	(30)
二、填空题	(31)
三、解答题	(31)
B 组	(32)
一、选择题	(32)
二、填空题	(33)
三、解答题	(34)
C 组	(34)
一、选择题	(34)
二、填空题	(35)
三、解答题	(35)

第 5 章 多元函数微分学 (36)

A 组	(36)
一、选择题	(36)
二、填空题	(37)
三、解答题	(37)
B 组	(37)
一、选择题	(37)
二、填空题	(38)
三、解答题	(38)



C 组	(40)
一、选择题	(40)
二、填空题	(40)
三、解答题	(41)

第 6 章 多元函数积分学

(42)

A 组	(42)
一、选择题	(42)
二、填空题	(43)
三、解答题	(43)
B 组	(44)
一、选择题	(44)
二、填空题	(46)
三、解答题	(47)
C 组	(51)
一、选择题	(51)
二、填空题	(51)
三、解答题	(52)

第 7 章 无穷级数

(54)

A 组	(54)
一、选择题	(54)
二、填空题	(55)
三、解答题	(55)
B 组	(56)
一、选择题	(56)
二、填空题	(57)
三、解答题	(57)
C 组	(59)
一、选择题	(59)
二、填空题	(59)
三、解答题	(59)

第 8 章 常微分方程

(61)

A 组	(61)
一、选择题	(61)
二、填空题	(61)
三、解答题	(62)



B 组	(62)
一、选择题	(62)
二、填空题	(63)
三、解答题	(63)
C 组	(65)
一、选择题	(65)
二、填空题	(65)
三、解答题	(65)

第二篇 线性代数

A 组	(69)
一、选择题	(69)
二、填空题	(73)
三、解答题	(74)
B 组	(77)
一、选择题	(77)
二、填空题	(81)
三、解答题	(82)
C 组	(89)
一、选择题	(89)
二、填空题	(90)
三、解答题	(90)

第三篇 概率论与数理统计

A 组	(95)
一、选择题	(95)
二、填空题	(97)
三、解答题	(99)
B 组	(102)
一、选择题	(102)
二、填空题	(104)
三、解答题	(106)
C 组	(110)
一、解答题	(110)

01

高等数学

GAO DENG SHU XUE

高等数学是硕士研究生招生考试的内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决问题的能力。在数学一试卷中占56%，即84分。

第1章 函数、极限、连续

A组

一、选择题(在目前的考研中,选择题4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$,则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{y_n\}$ 必为无穷小的充分条件是 ()

(A) $\{x_n\}$ 是无穷小

(B) $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小

(C) $\{x_n\}$ 有界

(D) $\{x_n\}$ 单调递减

1.2. 设 $f(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中是奇函数的是 ()

(A) $f[\varphi(x)]$

(B) $f[f(x)]$

(C) $\varphi[f(x)]$

(D) $\varphi[\varphi(x)]$

1.3. 设 $f(x) = \sin(\cos x)$, $\varphi(x) = \cos(\sin x)$,则在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内 ()

(A) $f(x)$ 是增函数, $\varphi(x)$ 是减函数

(B) $f(x)$, $\varphi(x)$ 都是减函数

(C) $f(x)$ 是减函数, $\varphi(x)$ 是增函数

(D) $f(x)$, $\varphi(x)$ 都是增函数

1.4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(-x) =$ ()

(A) $\begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

1.5. 两个无穷小比较的结果是 ()

(A) 同阶

(B) 高阶

(C) 低阶

(D) 不确定

1.6. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()

(A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

(C) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在

1.7. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A \neq 0$ 的充要条件是 ()

(A) $a > 1$

(B) $a \neq 1$

(C) $a > 0$

(D) 与 a 无关

1.8. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大,则下述结论正确的是 ()

(A) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 是无穷小,则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 不是无穷小,则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界,则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界,则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必不是无穷大



1.9. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则在点 x_0 处必定间断的函数为 ()

- (A) $f(x) \sin x$ (B) $f(x) + \sin x$ (C) $f^2(x)$ (D) $|f(x)|$

1.10. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内间断点的类型只能是 ()

- (A) 第一类间断点 (B) 第二类间断点
(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点 (D) 结论不确定

二、填空题 (在目前的考研中, 填空题 4 分 / 题, 请将答案填在题中的横线上.)

1.11. 对充分大的一切 x , 给出以下 5 个函数: 100^x , $\log_{10} x^{100}$, e^{10x} , $x^{10^{10}}$, $e^{\frac{1}{100}x^2}$, 则其中最大的是_____.

1.12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.

1.13. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

1.14. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\ln \frac{1-ax^2}{1+ax^2} \sim \frac{1}{10\,000}x^4 + \sin^2(\sqrt{6}x)$, 则 $a =$ _____.

三、解答题 (在目前的考研中, 解答题包括计算题、应用题和证明题, 平均 10 分 / 题.)

1.15. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.16. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\tan x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n \left(a \neq \frac{1}{2} \right)$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x \sin^2 x}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n^2}}$;

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$;

(10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1+\cos x) \ln(1+x)}$;

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] (a \neq 0)$;

(12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{x}{1+\ln x}}$;

(14) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x}$;

(15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x}$;

(16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1-\cos x)}$;

(17) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}$;

(18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$;

(19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$;

(21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$;

(22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}$.



1.17. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 证明: $|f(1)|, |f(3)|, |f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.18. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$.

1.19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

1.20. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})}$.

1.21. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1.22. 判断“分段函数一定不是初等函数”是否正确, 若正确, 试证之; 若不正确, 试说明它们之间的关系?

1.23. 试讨论函数 $g(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

1.24. 设函数 $f(x)$ 连续可导, 且 $f(0) = 0$, $F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.25. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x < 0. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点的类型, 如是可去间断点, 则补充或改变定义使它连续.

1.26. 设 $f(x; t) = \left(\frac{x-1}{t-1} \right)^{\frac{1}{x-t}} ((x-1)(t-1) > 0, x \neq t)$, 函数 $f(x)$ 由下列表达式确定,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(x; t),$$

求出 $f(x)$ 的连续区间和间断点, 并研究 $f(x)$ 在间断点处的左右极限.

1.27. 设 $a \geq 5$ 且为常数, k 为何值时极限

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^a + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在, 并求此极限值.

B 组

一、选择题(在目前的考研中, 选择题 4 分 / 题, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 以下三个命题,

- ① 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A , 则其任意子数列 $\{u_{n_i}\}$ 必定收敛于 A ;
- ② 若单调数列 $\{x_n\}$ 的某一子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A , 则该数列必定收敛于 A ;
- ③ 若数列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛于 A , 则数列 $\{x_n\}$ 必定收敛于 A .

正确的个数为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

1.2. 设 $f(x) = u(x) + v(x)$, $g(x) = u(x) - v(x)$, 并设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ 都不存在, 下列论

断正确的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在
- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在

1.3. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x) (\beta(x) \neq 0)$ 都是无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 下列表达式中不一定为无穷小的是 ()

- (A) $\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$ (B) $\alpha^2(x) + \beta^3(x) \cdot \cos \frac{1}{x}$
(C) $\ln[1 + \alpha(x) \cdot \beta^2(x)]$ (D) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

1.4. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1.5. 若 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\lambda - e^{-kx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 ()

- (A) $\lambda < 0, k < 0$ (B) $\lambda < 0, k > 0$
(C) $\lambda \geq 0, k < 0$ (D) $\lambda \leq 0, k > 0$

二、填空题(在目前的考研中, 填空题 4 分 / 题, 请将答案填在题中的横线上.)

1.6. 设 $f(x)$ 是奇函数, 且对一切 x 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 又 $f(1) = a, a$ 为常数, n 为整数, 则 $f(n) =$ _____.

1.7. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^a} = \beta > 0$, 则 α, β 的值为 _____.

1.8. 当 $x \rightarrow \pi$ 时, 若有 $\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 \sim A(x - \pi)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.9. 若 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x > 0, \\ 2x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____.

三、解答题(在目前的考研中, 解答题包括计算题、应用题和证明题, 平均 10 分 / 题.)

1.10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & x \leq 0, \\ x^2 - 1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

1.12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

1.13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, \text{ 且 } a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots, n, n \geq 2$.

1.15. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right]}{a^x - 1} = A (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

1.16. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \frac{x - \arctan(x-1) - 1}{(x-1)^3} + 2x^2 e^{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 求 $f(x)$.

1.17. 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且有 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x - 4a} = 1 (a \neq 0)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x - 3a}$.

1.18. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 10$, 试求 α, β 的值.

1.19. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有 $f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$, 并求常数 A, B .



1.20. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.21. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6} \right]$.

1.22. 数列 $\{x_n\}$ 通项 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.23. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \cdots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求其极限值.

1.24. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.25. 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$.

(1) 证明 $S_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right]$.

1.26. 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right), n = 1, 2, \cdots$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.27. 求函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x^2-1}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点, 并判断它们的类型.

1.28. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{nx}}$, 求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

1.29. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是 $[a, b]$ 上一个点列, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}$.

1.30. 设 $f(x)$ 对一切 x_1, x_2 满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 并且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 证明: 函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

C 组

一、选择题(在目前的考研中, 选择题 4 分/题, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_2(x) = f_1[f_1(x)], f_{k+1}(x) = f_1[f_k(x)], k = 1, 2, \cdots$, 则当 $n > 1$ 时, $f_n(x) =$ ()

(A) $\frac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$

(B) $\frac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$

(C) $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

(D) $\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

1.2. 设 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

(A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点



1.3. 设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

()

(A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点

(B) 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点

(C) 2 个可去间断点

(D) 2 个无穷间断点

二、填空题(在目前的考研中, 填空题 4 分/题, 请将答案填在题中的横线上.)

1.4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若有 $\ln\left(\cos \frac{2x}{3}\right) \sim Ax^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.5. 已知数列 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} =$ _____.

三、解答题(在目前的考研中, 解答题包括计算题、应用题和证明题, 平均 10 分/题.)

1.6. (1) 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}}$, $x \geq 0$ 的表达式;

(2) 讨论 $f(x)$ 的连续性.

1.7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$, $a > 0$.

1.8. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 那么 $\{x_n y_n\}$ 是否一定发散? 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散, 那么 $\{x_n y_n\}$ 的敛散性又将如何?

1.9. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$.

1.10. 利用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{k(k+1)}{2}$.

1.11. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + x^2 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$. 试求 $f(0)$, $f'(0)$,

$f''(0)$ 以及极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

1.12. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + (x^2 - 1) \sin ax}{x^n + x^2 - 1}$, 为了使 $f(x)$ 对一切 x 都连续, 求常数 a 的最小正值.

1.13. 设 $0 < x \leq 1$ 时函数 $f(x) = x^{\sin x}$, 其他的 x 满足关系式 $f(x) + k = 2f(x+1)$, 试求常数 k 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.