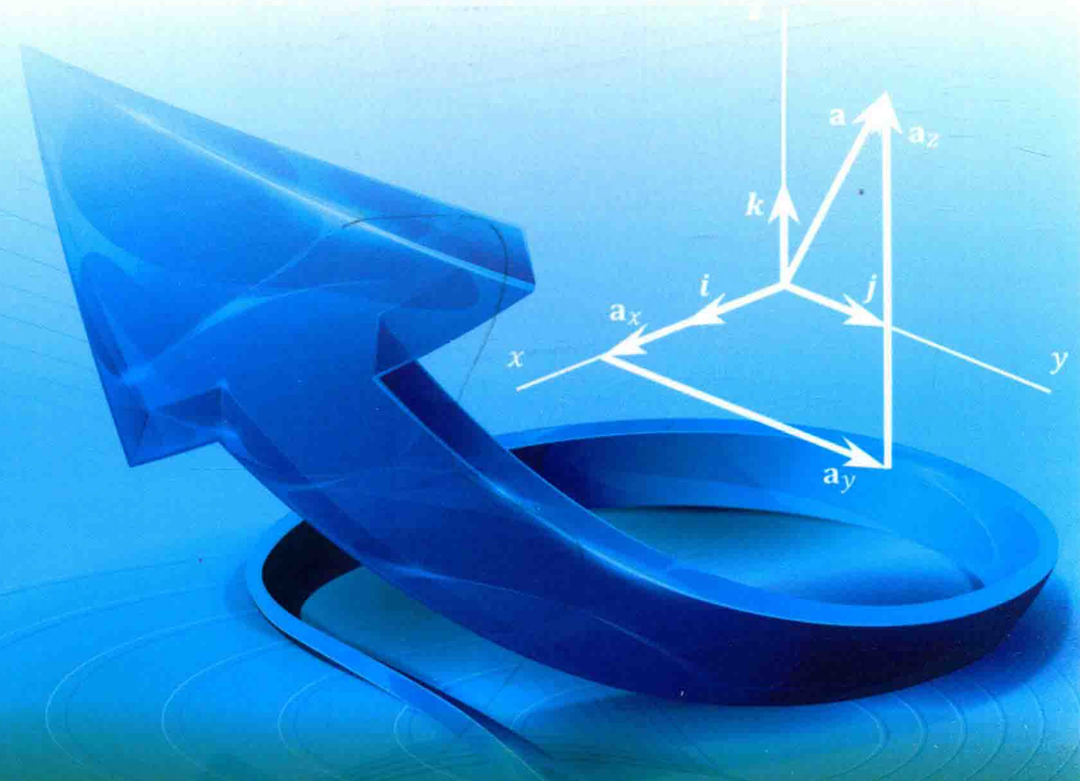
高等学校教材

理论力学

主　编　陶春达　孙建强
副主编　林鸿志　石　健　常学平



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

理论力学

主　编　陶春达　孙建强
副主编　林鸿志　石　健　常学平

石油工业出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部高等工科本科理论力学课程的基本要求(中学时)及教育部工科力学课程教学指导委员会面向21世纪工科力学课程教学改革的要求编写而成。全书共三篇12章，分别阐述静力学、运动学和动力学的基础理论和方法，在理论分析的同时注重与工程实际相结合，通过大量例题阐述分析问题、解决问题的思路及方法。每章有多种形式的习题，并附有答案。

本书可作为机械、土木建筑、石油工程等专业理论力学课程的教材，也可作为电大学生、自学者及工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/陶达春，孙建强主编.
北京：石油工业出版社，2017.2
(高等学校教材)
ISBN 978-7-5183-1772-1

Ⅰ.理…
Ⅱ.①陶…②孙…
Ⅲ.理论力学—高等学校—教材
Ⅳ.O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第013651号

出版发行：石油工业出版社
(北京市朝阳区安定门外安华里2区1号楼 100011)
网 址：www.petropub.com
编辑部：(010)64523579 图书营销中心：(010)64523633
经 销：全国新华书店
排 版：北京市密东股份有限公司
印 刷：北京晨旭印刷厂

2017年2月第1版 2017年2月第1次印刷
787毫米×1092毫米 开本：1/16 印张：15.25
字数：390千字

定价：36.00元
(如发现印装质量问题，我社图书营销中心负责调换)
版权所有，翻印必究

前　　言

“理论力学”是高等学校机械、土木建筑、石油工程等许多专业的重要技术基础课。近年来，随着高等教育改革的深入，课程的体系、内容等都发生了巨大的改变。在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批《理论力学》教材。但从整体上看，具有普通一般院校教育特色的教材仍然匮乏。为适应新形势下教学实际的要求，编写一本适用于众多专业48～64学时的理论力学教材是很有必要的。本教材根据高等学校工科理论力学的基本要求，吸取了目前最新的“理论力学”教材的优点，在保证力学课程的系统性、完整性的基础上，充分考虑普通一般院校教学的实际情况，旨在使学生加深对理论力学基本概念、基本理论的理解，掌握理论力学的分析和计算方法，为后续专业课的学习打下良好的基础。

在编写本书过程中，笔者力求体现以教师为主导、学生为主体的教学基本要求，突出重点，联系工程实际；语言上通俗易懂，便于自学。文中加“*”的部分为选学内容，使用本教材时，可根据各专业的不同要求，对内容酌情取舍，全部讲授本书内容约需60学时。

本书由陶春达、孙建强担任主编，由林鸿志、石健、常学平担任副主编。具体编写分工如下：陶春达负责编写绪论和第1、2、3章；孙建强负责编写第4、5、6章；林鸿志负责编写第7、10、11章；石健负责编写第8、9章；常学平负责编写第12章；杨建波负责绘制插图；王丹丹、王艳楠负责选编习题及试做。在本书的编写过程中，得到了西南石油大学力学教研室全体教师的支持和帮助，很多同仁、专家审阅了本书，并提出了宝贵的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中可能存在一些错误或不妥之处，敬请指正。

编　者

2016年8月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三篇 动 力 学

绪　论

1. 理论力学的研究内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。

所谓机械运动，是指物体在空间的位置随时间的改变，它是人们在日常生活和生产实践中最常见的一种运动。如石油工业生产中的钻机钻柱的钻进运动、抽油机大梁的摆动、建筑工地上升降机的上下运动、起重机吊臂的转动等，都是机械运动的例子。

理论力学研究速度远小于光速的宏观物体的机械运动，它以伽利略和牛顿总结的力学基本定律为基础，属于古典力学的范畴。对于微观粒子和速度接近于光速的宏观物体，它们的机械运动有特殊的规律，必须用相对论和量子力学的观点才能给予很好的解释。

理论力学的研究内容包括静力学、运动学和动力学三大部分。

静力学研究物体的受力分析、力系的简化，以及物体在力系作用下的平衡规律；

运动学研究物体机械运动的几何性质（如运动轨迹、速度、加速度等），而不考虑引起物体运动的物理原因；

动力学研究物体的机械运动与所受力之间的关系。

2. 理论力学的研究对象和力学模型

对工程中的构件进行力学分析之前，必须对实际研究对象进行抽象化处理即理想化和简化，这是一切学科研究的基本方法，也是理论力学研究的基本方法。为了解决问题或降低解题的难度，我们必须抓住研究对象本质的和主要的因素，舍弃非本质的次要因素，把它抽象为力学模型，这就是力学建模的过程。然后对力学模型进行分析研究，以解决实际问题。

抽象化处理的关键在于选择合理的模型。所谓合理，就是模型既不与一般的自然规律相矛盾，又能反映我们对研究对象某一方面性能的认识，对模型所作的理论分析结果能符合实践中或实验中观察到的相应现象。如不符合，模型就必须修正。选择或建立合理的模型代替实物系统往往是解决问题的关键环节。针对不同问题采用不同的力学模型，是研究力学问题的重要方法。

理论力学中对所研究的工程构件采用了几种力学模型：**质点**、**刚体**和**刚体系统**。如果研究对象的形状尺寸对所研究的问题无影响，可采用质点模型；如果研究对象的形状尺寸对所研究的问题有影响，且研究对象为单个物体时，可采用刚体模型；如果研究对象的形状尺寸对所研究的问题有影响，且研究对象为多个物体构成的物体系统时，可采用刚体系统模型。刚体模型忽略了物体在力的作用下形状的改变，假定物体中任何两点之间的距离保持不变。采用刚体模型能大大简化对物体整体运动和平衡的数学分析和推导。实际上，任何物体在外力的作用下都要产生变形，它们都是变形固体。只是有些时候变形很小，可以忽略不计，此时采用刚体力学模型比较恰当。但是，在某些工程问题中构件不能视作为刚体，例如跳水运动员对跳板的作用，如对跳板进行研究，此时就必须放弃刚体模型，采用可变形固体模型，这些属于变形体力学的研究范畴，我们将在材料力学等力学学科中再去研究。

3. 学习理论力学的目的

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。学习本课程的目的在于认识机械运动的客观规律，并运用这些规律和其他专门知识解决工程实际问题。

理论力学又是工科各专业一些后续课程重要的理论基础，如材料力学、结构力学、机械设计、土力学、混凝土结构等，都以理论力学的理论为基础。在建立这些课程的基本理论时可以直接应用理论力学的定理和公式。

此外，掌握机械运动的规律，理解力学的研究方法，有助于抽象思维能力、逻辑思维能力以及创新思维能力的培养，提高分析问题和解决问题的能力，为学习其他科学技术理论和从事科学研究工作创造条件。

第一篇 静 力 学

静力学是研究物体在力的作用下的平衡规律的学科。在静力学中,我们将研究三方面的问题:

(1)物体的受力分析。分析某个物体受几个力,以及每个力的作用位置和方向。

(2)力系的简化。所谓力系,是指作用在物体上的一群力。将作用在物体上的复杂力系用一个简单的力系来等效代替,便是力系的简化。如果某力系与一个力等效,则此力称为该力系的合力,而力系中的各力称为此力的分力。

(3)力系平衡条件的建立。研究作用在物体上的力系所需满足的平衡条件。力系的平衡条件在工程中有着十分重要的意义,它是设计结构、机构和机械零件时静力计算的基础。

第1章 静力学基础

本章首先介绍静力学的概念,包括力和力矩的概念、主矢和主矩的概念、力偶的概念。在此基础上,介绍受力分析的基本方法,包括分离体的选取及受力图的绘制。

1.1 力 的 概 念

1.1.1 力

1. 力的定义

力是物体间的相互机械作用,这种作用将使物体的运动状态和形状发生变化。如图 1.1 所示,直线轨道上的小车,开始是静止的,在水平力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下,由静止变为运动,其运动状态发生了变化。又如图 1.2 所示,跳水运动员在跳板上起跳时,跳板产生了变形,其轴线由直线变成了曲线。一般情况下,力使物体的运动状态和形状同时发生变化。

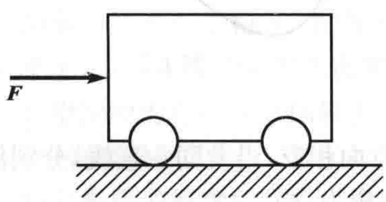


图 1.1

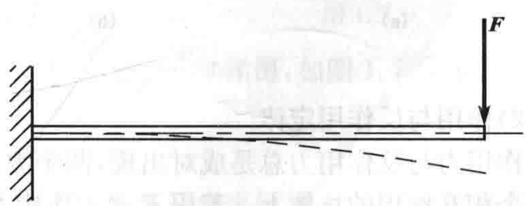


图 1.2

2. 力的效应

力的作用效果称为**力的效应**。力使物体的运动状态发生变化，称为力的运动效应或外效应；力使物体的形状发生变化，称为力的变形效应或内效应。理论力学主要研究力的运动效应；材料力学则主要研究力的变形效应。

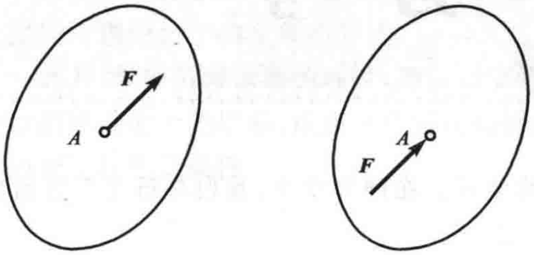


图 1.3

3. 力的三要素

实践证明力对物体的作用效应取决于力的三要素，即力的大小、方向和作用点。因此力用矢量来描述，矢量的长度表示力的大小，箭头表示方向，矢量的起端或末端表示力的作用点，如图 1.3 所示。

力的国际单位为“牛顿”或“千牛顿”，分别用 N(牛)或 kN(千牛)表示。

4. 力的理想化

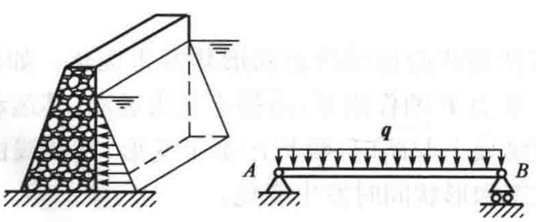
力的作用位置是物体之间机械作用位置的抽象化结果。实际上两物体间力的作用处总会占有一定的体积或面积，力总是作用于物体的一定体积或面积上的。如果作用体积或面积很小，则可将其抽象为一个点，这种作用力称为**集中力**；如果作用体积或面积比较大，这种作用力称为**分布力**，作用位置为体积的称为**体分布力**，作用位置为面积的称为**面分布力**，作用位置可以简化为一条线的称为**线分布力**。对于分布力，用单位体积、面积或长度上的力表示分布力的强弱程度，称为**载荷集度**，用记号 q 表示，单位为 N/m^3、N/m^2 或 N/m。例如，图 1.4(a)所示水对大坝的压力，可以看作是面分布力；而图 1.4(b)所示桥梁的自重，则是沿着桥梁长度方向连续分布的，所以是线分布力。

5. 力的性质

1)力的平行四边形法则

作用在同一点的两个力，可以合成为一个合力，合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为边所构成的平行四边形的对角线确定，如图 1.5 所示。或者说，合力矢量等于两个力矢量的矢量和，表示为

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1.1}$$



(a) (b)

图 1.4

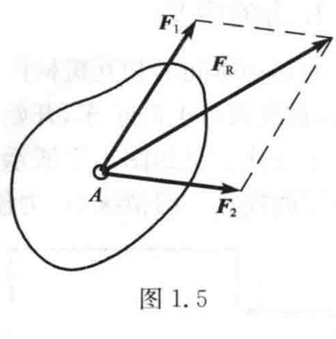


图 1.5

2)作用与反作用定律

作用力与反作用力总是成对出现，两个力的大小相等、方向相反，沿着同一直线，分别作用在两个相互作用的物体上。若用 $\boldsymbol{F}$ 表示作用力，$\boldsymbol{F}'$ 表示反作用力，则

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}' \tag{1.2}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.1.2 力在坐标轴上的投影

1. 力在轴上的投影

1)定义

从力矢量的起点和终点分别向投影轴引垂线,得到两个垂足,则从力矢量起点垂足到终点垂足的线段,称为力在轴上的投影。如图 1.6 所示,力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的起点为 A,终点为 B,分别过矢量的 A 和 B 两点作 x 轴的垂线,垂足分别为 a 和 b,则从 a 到 b 的线段 ab 称为力在轴 x 上的投影,记作为 F_x。若 $\boldsymbol{F}$ 与 x 正向的夹角为 α,则力的投影为

$$F_x = F\cos\alpha \tag{1.3}$$

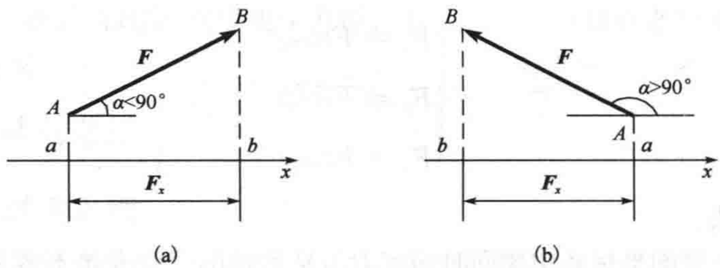


图 1.6

2)说明

(1)力在轴上的投影是一个代数量,可正可负,也可以为零。在实际计算时可以采用较直观的方法判断投影的正负号。如从 a 到 b 指向与坐标轴的正向一致,则投影为正,如图 1.6(a)所示;反之投影为负,如图 1.6(b)所示。

(2)力和投影轴可以共面,也可以不共面。

2. 力在直角坐标轴上的投影

1)平面上力在直角坐标轴上的投影

将力在坐标轴上投影的方法应用到直角坐标系中。如图 1.7 所示,已知力 $\boldsymbol{F}$ 与平面直角坐标系的 x、y 轴的夹角分别为 α 和 β,则力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y 轴上的投影分别为

$$F_x = F\cos\alpha, F_y = F\cos\beta \tag{1.4}$$

则力的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} \tag{1.5}$$

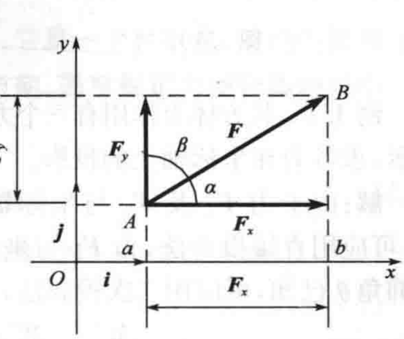


图 1.7

需要说明,力在坐标轴上的投影和力在坐标轴上的分力是两个不同的概念,不要混淆。投影是代数量,而分力是矢量,一般情况下力在坐标轴上的投影和力在坐标轴上的分力的大小不相等,如图 1.8 所示。只有在直角坐标系下,力在坐标轴上的投影和力在坐标轴上的分力的大小才相等,如图 1.7 所示。

2)空间中力在直角坐标轴上的投影

(1)直接投影法。

将力投影的概念应用到三维直角坐标系中。设力 $\boldsymbol{F}$ 与三个坐标轴 x、y 和 z 的夹角分别为 α、β 和 γ,如图 1.9 所示。根据力在轴上的投影的定义,$\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

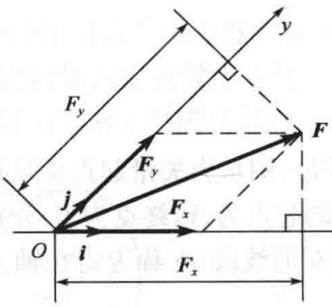


图 1.8

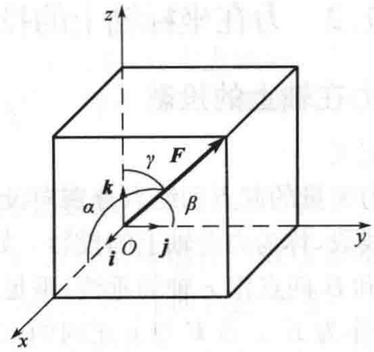


图 1.9

$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\cos\beta \\ F_z = F\cos\gamma \end{cases} \tag{1.6}$$

(2)二次投影法。

很多情况下，在空间坐标系中要同时确定力与坐标轴的三个夹角不容易，在实际计算时，可采用先确定力与某一坐标轴的夹角并求出力在该轴上的投影，然后再利用二次投影可以求得力在其余两轴上的投影。例如，已知力 $\boldsymbol{F}$ 与 z 轴的夹角为 γ，将力投影到 Oxy 平面，得到在平面 Oxy 上的投影 F_{xy}，其大小为 $F_{xy}=F\sin\gamma$，若已知力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 与 x 轴的夹角为 φ，则再将力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 分别向 x 和 y 轴投影，如图 1.10 所示，得

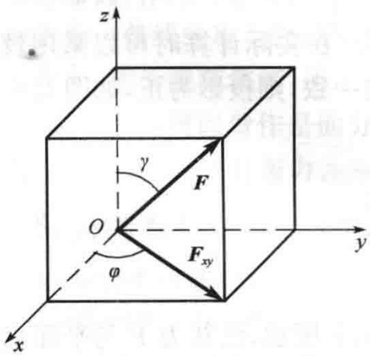


图 1.10

$$\begin{cases} F_x = F\sin\gamma\cos\varphi \\ F_y = F\sin\gamma\sin\varphi \\ F_z = F\cos\gamma \end{cases} \tag{1.7}$$

则力的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

例 1.1 长方体上作用有三个力，$F_1=500\text{N}$，$F_2=1000\text{N}$，$F_3=1500\text{N}$，方向及尺寸如图 1.11 所示，求各力在坐标轴上的投影。

解：由于力 $\boldsymbol{F}_1$ 及 $\boldsymbol{F}_2$ 与坐标轴的方位角都为已知，可应用直接投影法，力 $\boldsymbol{F}_3$ 与坐标轴间的方位角 φ 及仰角 θ 已知，可应用二次投影法，而

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2.5}{5.59},$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{5.59},$$

$$\sin\varphi = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\varphi = \frac{DB}{CB} = \frac{3}{5}$$

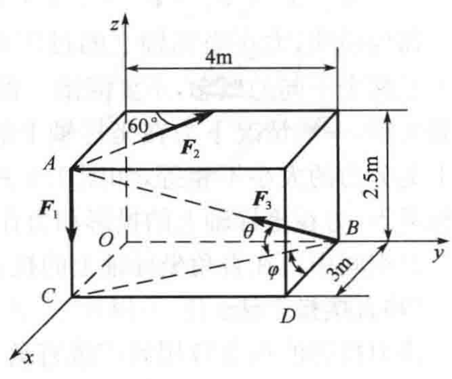


图 1.11

因此，各力在坐标轴上的投影分别为

$F_{1x}=500\cos90^{\circ}=0, F_{1y}=500\cos90^{\circ}=0, F_{1z}=500\cos180^{\circ}=-500(\mathrm{N})$

$F_{2x}=-1000\sin60^{\circ}=-866(\mathrm{N}), F_{2y}=1000\cos60^{\circ}=500(\mathrm{N}), F_{2z}=1000\cos90^{\circ}=0$

$F_{3x}=1500\cos\theta\cos\varphi=805(\mathrm{N}), F_{3y}=-1500\cos\theta\sin\varphi=-1073(\mathrm{N}), F_{3z}=1500\sin\theta=671(\mathrm{N})$

1.2 力　　矩

力对物体作用的运动效应，一般分为平移和转动两种。力对物体的平移效应由力矢量的大小和方向来决定，而转动效应，则取决于力矩。力矩又分为力对点之矩和力对轴之矩，在静力学中具有重要意义。

1.2.1 力对点之矩

1. 平面上力对点之矩

使用过扳手的读者都能体会到：用扳手拧紧螺帽时，作用在扳手上的力 $\boldsymbol{F}$ 使螺帽绕点 O 转动的效应不仅与力的大小成正比，而且与点 O 到力作用线的垂直距离 h 成正比，当然还与扳手的转向有关，如图 1.12 所示。其中，点 O 称为**矩心**，h 称为**力臂**，如图 1.13 所示。为了描述平面上力使物体绕某点转动的效应，特引入力对点之矩的概念。

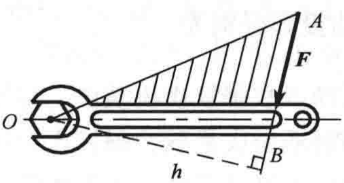


图 1.12

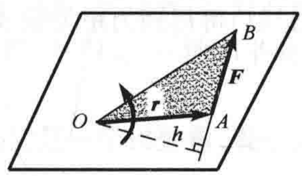


图 1.13

定义如下：

平面上力对点之矩是力使物体绕某点转动效应的度量，它是一个代数量，其绝对值等于力的大小与力臂之积，其正负号代表力使物体绕矩心转动的方向，通常规定力使物体绕矩心逆时针转动为正，反之为负。即

$$M_O(\boldsymbol{F})=\pm Fh=\pm 2A_{\triangle OAB} \tag{1.9}$$

在国际单位制中，力对点之矩的单位为 N·m（牛·米）或 kN·m（千牛·米）。

2. 空间中力对点之矩

在空间中，力使物体绕某点转动的效应，除了取决于力与力臂的乘积和转向外，还取决于力与矩心组成的平面方位，因为平面方位不一样，作用效果也不同。于是在空间中力对点之矩由三个要素决定，即力的大小与力臂的乘积；力和矩心所确定的平面的方位；物体在力矩作用平面内绕矩心转动的转向。方位不同，即使力矩大小一样，作用效果也将完全不同。可见，用一个代数量是不能描述空间中力使物体绕某点转动的效应，为此，需要用力矩矢量来描述力的转动效应。

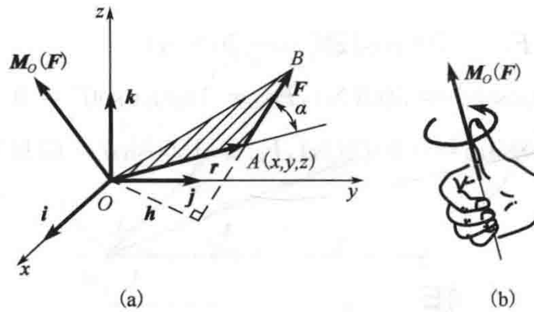


图 1.14

定义如下：

力对点的矩矢等于从矩心向力的作用点引出的矢径与该力的矢量积，即

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1.10}$$

力矩矢量的大小 $|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})| = Fr\sin\alpha = 2A_{\triangle OAB}$，

力矩矢量的方向由右手法则确定：右手握拳，弯曲的四指指向表示力矩转动方向，拇指指向为力矩矢量的方向，如图 1.14(b)所示。

若以(x,y,z)和(F_x,F_y,F_z)分别表示矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式分别为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

力对点之矩的解析式则可表达为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1.11}$$

由式(1.11)可得到力矩矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$在三个坐标轴上的投影分别为

$$\begin{cases} [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x = yF_z - zF_y \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y = zF_x - xF_z \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = xF_y - yF_x \end{cases} \tag{1.12}$$

3. 合力矩定理

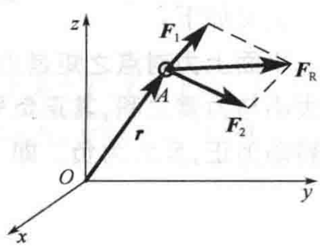


图 1.15

图 1.15 所示各力作用线汇交于一点的汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$，可以证明

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_R) &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) \\ &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) \end{aligned}$$

对于由若干个力构成的汇交力系，同理可得

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_R) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.13}$$

式(1.13)表明，**汇交力系的合力对某点之矩等于各分力对该点之矩的矢量和，此即为汇交力系的合力矩定理。**

说明：

(1)对于各力都位于同一平面的平面汇交力系，力对点之矩为代数量，故式(1.13)成为代数式，即

$$M_O(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.14}$$

(2)此定理不仅适用于汇交力系,可以证明,对于任意力系只要存在合力,该定理也成立。

例 1.2 力 $\boldsymbol{F}$ 作用在支架上点 A,如图 1.16 所示,图上尺寸 l_1、l_2、l_3 和角 α 均为已知。试求 $M_O(\boldsymbol{F})$。

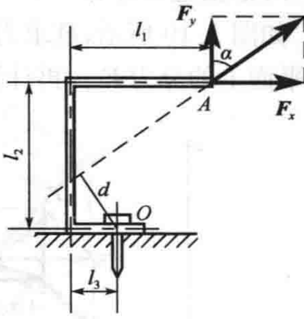


图 1.16

解:方法一,$M_O(\boldsymbol{F})=-Fd$,d 为力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力臂,从几何上求解 d 之值比较麻烦,这是读者习惯使用的方法。

$$d=|(l_1-l_3)\cos\alpha-l_2\sin\alpha|$$

$$M_O(\boldsymbol{F})=F(l_1-l_3)\cos\alpha-Fl_2\sin\alpha$$

方法二,根据式(1.14),得

$$M_O(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_x)+M_O(\boldsymbol{F}_y)=F(l_1-l_3)\cos\alpha-Fl_2\sin\alpha$$

可以看出,利用合力矩定理求力对点之矩,比按照定义直接找力臂求力对点之矩往往容易一些,因此我们常常利用合力矩定理求力对点之矩。

1.2.2 力对轴之矩

1. 定义

工程上,经常遇到刚体绕定轴转动的情形,为了度量力对绕定轴转动刚体的作用效果,必须了解力对轴之矩的概念。

先从力使一扇门绕门轴转动的效应来认识力对轴之矩。图 1.17 表示一扇门,门轴 z 垂直于平面Ⅰ,二者相交于 O 点。在门上,平面Ⅰ的 A 点作用有力 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_z+\boldsymbol{F}_{xy}$,其中 $\boldsymbol{F}_z$ 平行于 z 轴,$\boldsymbol{F}_{xy}$ 垂直于 z 轴。显然,平行于 z 轴的力 $\boldsymbol{F}_z$ 对门没有绕 z 轴的转动效应,只有垂直于门轴的力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 才能使门转动。因此,力对 z 轴的转动效应可由力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 O 点(z 轴和平面Ⅰ的交点)之矩来度量。由此得力对轴之矩的定义:

空间中力对轴之矩是力使刚体绕此轴转动效应的度量,它是一个代数量,等于该力在垂直于轴的平面上的分力对该轴与平面的交点之矩,即

$$M_z(\boldsymbol{F})=M_O(\boldsymbol{F}_{xy})=\pm F_{xy}h=\pm 2A_{\triangle OAB} \tag{1.15}$$

代数量 $M_z(\boldsymbol{F})$的正负号,由右手螺旋法则确定,即弯曲的四指表示力 $\boldsymbol{F}$ 使物体绕 z 轴转动的方向,若拇指与 z 轴同向,则力对轴之矩为正;反之,若拇指与 z 轴反向,则力对轴之矩为负,如图 1.18 所示。

由式(1.15)可以得出,当力和轴共面时(力与轴平行或力与轴相交),力对轴之矩等于零。

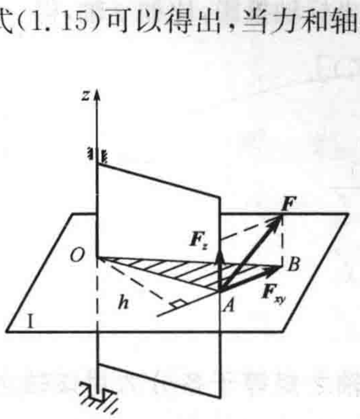


图 1.17

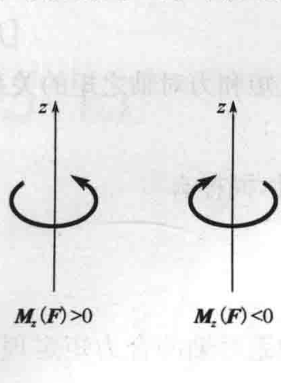


图 1.18

2. 计算

1)根据定义计算

如图 1.19 所示，欲求力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩，首先将力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的 xy 平面上投影，得到 xy 平面上的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$，再计算力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 z 轴与 xy 平面的交点 O 之矩。由合力矩定理，力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 z 轴之矩为

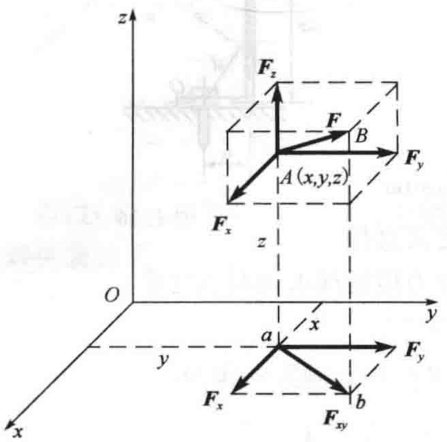


图 1.19

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = xF_y - yF_x$$

同理可求得力 $\boldsymbol{F}$ 对 x 轴和 y 轴之矩。于是力 $\boldsymbol{F}$ 对三个坐标轴之矩为

$$\begin{cases} M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \end{cases} \tag{1.16}$$

2)根据合力矩定理计算

汇交力系的合力矩定理[式(1.13)]对坐标轴取矩时同样成立(将在后面加以证明)，用对坐标轴的合力矩定理计算力对轴之矩更简单。如图 1.19 所示，得

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x) + M_z(\boldsymbol{F}_y) + M_z(\boldsymbol{F}_z) = xF_y - yF_x$$

同理可求得力 $\boldsymbol{F}$ 对 x 轴和 y 轴之矩为

$$M_x(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F}_x) + M_x(\boldsymbol{F}_y) + M_x(\boldsymbol{F}_z) = yF_z - zF_y$$
$$M_y(\boldsymbol{F}) = M_y(\boldsymbol{F}_x) + M_y(\boldsymbol{F}_y) + M_y(\boldsymbol{F}_z) = zF_x - xF_z$$

1.2.3 力对点之矩和力对轴之矩的关系——力矩关系定理

对比式(1.12)和式(1.16)可以得到如下结论：**力对点之矩在过该点的轴上的投影等于力对该轴之矩**，即

$$\begin{cases} [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x = M_x(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y = M_y(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = M_z(\boldsymbol{F}) \end{cases} \tag{1.17}$$

1.2.4 汇交力系对轴的合力矩定理

将式(1.13)即合力矩定理 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_R) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$ 向坐标轴投影，比如 z 轴，得

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_R)]_z = \sum [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)]_z$$

由力对点之矩和力对轴之矩的关系，上式变为

$$M_z(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.18a}$$

对 x 和 y 轴，同样有

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.18b}$$

$$M_y(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_y(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.18c}$$

即得汇交力系对轴的合力矩定理：**汇交力系的合力对某轴之矩等于各分力对该轴之矩的代数和。**

同对点的合力矩定理一样，对轴的合力矩定理也适用于存在合力的任意力系。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com