华东师范大学数学教育丛书

HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS

HPM

HPM：数学史与数学教育

History & Pedagogy of Mathematics

汪晓勤 著

科学出版社

华东师范大学数学教育丛书

HPM：数学史与数学教育

汪晓勤　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

数学史与数学教育之间的关系(HPM)是数学教育的一个研究领域，研究的课题包括：关于"为何"和"如何"的探讨、教育取向的数学史、历史相似性、数学史融入数学教学的实践、HPM与教师专业发展、数学史融入数学教材等。本书全面展示了作者及其研究团队近十年以来在上述各课题上的研究成果。

本书可作为职前和在职教师教育课程"数学史与数学教育"的教材，也可供数学教育研究者参考。

图书在版编目(CIP)数据

HPM：数学史与数学教育/汪晓勤著. —北京：科学出版社，2017.5
华东师范大学数学教育丛书
ISBN 978-7-03-051831-6

Ⅰ.①H… Ⅱ.①汪… Ⅲ.①数学史 ②数学教学-教学研究 Ⅳ.①O11 ②O1-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第032603号

责任编辑：胡海霞 / 责任校对：彭 涛
责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017年5月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017年7月第二次印刷 印张：34 1/2
字数：695 000
定价：79.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　　言

打开汪晓勤教授的《HPM:数学史与数学教育》一书的电子稿,看完目录,读过几章,一种惊喜的预感便油然而生。我在想,这部著作的出版,必将成为我国数学史全面融入数学教育的一个历史性标志。我国的数学史研究,也将由此翻开新的一页。

回顾近代的中国数学史研究,主要以探寻中国古代数学的发展史实为核心。前辈学者通过考古发现和史料整理,构建理论体系,基本上确立了中国古代传统数学在人类文化史上的重要地位。这是一份宝贵的学术贡献。正如李文林教授所说,这些研究是在为历史而数学史,也在为数学而数学史;此外,还有不可缺少的一部分,便是要为教育而数学史。按理说,这三者,应该鼎足而立。不过,就实际情形而言,“为教育而数学史”的努力,显然比较滞后。记得一位数学史名家曾对我说起过,在他的研究初期,要求他的学生必须全力投入数学史的学术研究,不许写那些“没有学术含量”的科普文章。这当然有一定道理,完全可以理解。在 20 世纪,如果离开了纯粹的学术研究,仅凭发表一些“科普文章”,断难确立本单位的学术地位,更无法获得令人尊崇的学术声誉。

不过,为教育的数学史,未必没有学术含量。我常将“为历史而数学史”比喻成“和田玉矿床”的开采,而把“为教育而历史”看成“玉石雕刻”的艺术。和田玉籽料是玉器的源头,当然重要,但是玉石雕刻艺术同样具有学术价值和艺术魅力。我想,HPM 就是这样的一门艺术。HPM 是数学史料的教育形态,需要对史料进行“教育”的加工、雕琢、创造才能完成。这是一份独特的创新活动,也因而具有自身的学术价值。

如果说 HPM 研究是“为教育而数学史”的新阶段,那么 1949 年以来几十年间的“为教育而数学史”,则不妨认为属于初级阶段。那时的有些做法比较简单化。有一种做法是所谓“民粹式”。只讲中国的某某数学成就比国外早多少年,教科书上只剩下祖冲之等寥落可数的几个名字。以至于不少人认为中国古代数学总体上也早于古埃及和古巴比伦数学,造成误解。第二种是“词典式”。凡是涉及数学史的内容,旁边有一位历史人物头像,如欧几里得、笛卡儿、欧拉、高斯等,写明生卒年份,说明作出了某某伟大的贡献,就完事了。至于这段历史和数学内容的关联,则多半付之阙如。还有一种是“传说式”。在一些教学参考资料中,往往宣扬一些并不可靠的数学家故事来博取读者的注意,如笛卡儿之梦,说天花板上的蜘蛛使他发现了坐标系等。以上这些做法,用意自然是好的,只是因为不够深刻,姑且称之为

“初级阶段”。

HPM 的研究，则将“为教育的数学史”的教学引向更高的层次。这就是说，要用数学史内容揭示相关的数学内涵，营造数学文化氛围，并与学生的数学认知规律密切联系，使之有利于学生对数学内容的理解。在教学实践中，HPM 需要紧扣三维教学目标，以学生喜闻乐见的形式呈现绚丽多彩的数学历史文化，在严谨的数学逻辑理性体系里投射出人文精神的光芒。

至于具体怎么做，该书里的许多案例，就是一批精心制作的范本。我在前面提到，该书的出版，将为数学史与数学教育的研究揭开新的一页。这一页之新，即在于这一批创新的范本，以及他们所支撑的 HPM 理念。

HPM 是在数学教育过程中，对数学史知识的一次再认识。在这方面，徐光启对《几何原本》的认识与欣赏是一个经典的榜样。他在《几何原本序》里有一段话：

“此书有四不必：不必疑、不必揣、不必试、不必改；有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。”他还说：“（此书）有三至、三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难。”

不妨认为，徐光启对《几何原本》的这一评价和欣赏，正是今日平面几何教学的目的。我们从第一节课的“对顶角相等”开始，就要用 HPM 的理念进行教学加工。具体说来，首先，我们要到“数学史”库房里寻找一块“对顶角璞玉”。形态如下：

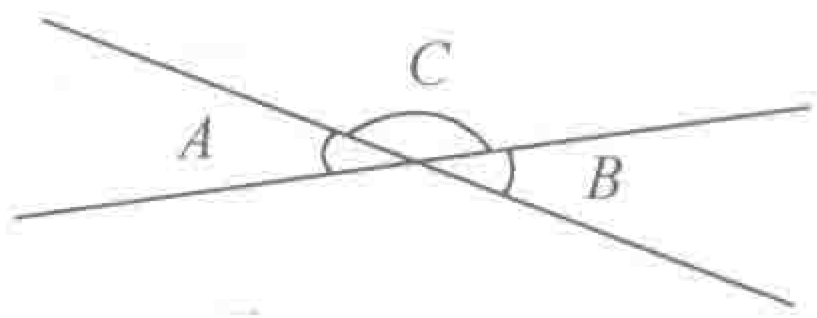


图 0-1　两直线相交示意图

定理　“对顶角相等。”如图 0-1，两条直线相交，那么角 A 等于角 B。

在世界名著、欧几里得编写的《几何原本》第一卷中，“对顶角相等”是命题 15。证明如下：$\angle A+\angle C$ 是平角，$\angle B+\angle C$ 也是平角，然后根据公理 3（“等量减等量，其差相等”），所以 $\angle A=\angle B$。

现在我们试将这块“璞玉”雕琢成一件 HPM 精品。

事实上，这个定理非常直观，一眼就看出来了！没有人怀疑它的正确性。那么，我们的教学是不是还要教条式地去“创设情境，组织合作讨论”呢？当然不需要。用 HPM 的理念来处理“对顶角相等”定理的教学，关键点在于“这样明显正确的知识究竟要不要证明？为什么古希腊人认为要证明，中国古代数学则根本没有这个命题呢？思考这一问题，就会树立起对古希腊伟大理性文明的敬畏，触发学生的一次心灵震撼。由此开始学习平面几何，HPM 将带领学生一步步地理解徐光启对《几何原本》的那段深刻的评价。

HPM 在现代中国，还是一块尚未充分开发的沃土。记得 1998 年，我曾以 ICMI 执行委员的身份参加了在马赛举行的一次 HPM 的特别年会，由于那时的中国数学教育界和数学史界，还没有精力顾及于此，我是大陆去参加的唯一中国人。会

后出版的那本著名文集，多少留下了一点中国大陆的痕迹。会后，我就再也没有参加 HPM 的活动了。直到汪晓勤来到上海，HPM 活动才如火如荼地开展起来。2014 年在哥本哈根举行的 HPM 会议上，中国大陆的学者非常活跃，和我 1998 年的形单影只的情形已经不可同日而语。汪晓勤教授的这部著作，正是这一过程的总结。“风正一帆悬”。我们希望，HPM 会在未来的中国数学教育中有一个更大的发展，以至成为繁荣数学文化的一种教学常态。

最后，我想趁此机会，谈谈上海滩数学史研究的一些历史状况。

我国的数学史研究，早先是李俨、钱宝琮两位前辈，分别在北方和南方进行耕耘，但都不在上海。20 世纪 50 年代以来，北京的中国科学院是大本营，北京师范大学则有白尚恕先生。北方的数学史重镇还有辽宁师范大学的梁宗巨先生，内蒙古师范大学的李迪先生，以及西北大学的李继闵先生。南方的杭州，则有沈康身先生独当一面。至于上海，除了零星的工作之外，简直是数学史的一片沙漠。20 世纪 80 年代，我作为“票友”想参与一点数学史研究，几乎无门可入。和我类似的还有上海师范大学的袁小明教授，也是半路出家的业余作者。在新世纪到来的时候，情况突变。1999 年汪晓勤从中国科学院自然科学史研究所获得博士学位后进入华东师范大学，这是“科班出身”的专业数学史学者第一次来到上海工作。接着，2001 年纪志刚来到上海交通大学，此后徐泽林应聘于东华大学，王幼军执教于上海师范大学。一时间上海的数学史研究呈现井喷式的发展。最近，听说复旦大学要引进一名法国的数学史研究方向的博士，上海的数学史研究队伍益发壮大了。

大约在十年前，纪志刚和汪晓勤来看我，我说我已经老了，“票友”只能玩到这个样子。你们两位科班出身，能不能创立“海派”数学史研究呢？现在他们两位，成果迭出，已经是一个方面的领军人物了。他们两位，包括徐泽林、王幼军等的工作，是否能看成“海派”，尚需公论。依我看，汪晓勤的这本 HPM，大概有一点“海派”的味道了。

拉杂写来，主旨是为了祝贺汪晓勤的著作出版，也为中国大陆的 HPM 研究呐喊助威。应作者之约，权以这点文字为序。

张奠宙

2014 年盛夏于上海

前　言

早在19世纪，数学史与数学教育之间的关系已经受到欧美数学家和数学教育家的关注。1972年，在第二届国际数学教育大会上，成立了数学史与数学教学关系国际研究小组（International Study Croup on the Relations Between the History & Pedagogy of Mathematics，简称HPM，今天我们通常也将数学史与数学教育关系这一学术领域本身简称为HPM），自此，数学史与数学教育之间的关系成了数学教育的重要研究领域之一。四十余年间，HPM领域的研究工作涉及以下五个方面。

- 关于“为何”和“如何”的探讨；
- 教育取向的数学史研究；
- 数学理解的历史相似性实证研究；
- 数学史融入数学教学的实践；
- HPM与数学教师专业发展。

其中，HPM教学实践与教师专业发展将是HPM领域未来的研究重点。此外，数学史融入数学教材的研究也开始受到关注。

在我国，早在20世纪20～50年代，著名数学史家钱宝琮先生（1892～1974）十分重视数学史对于数学教育的价值，认为数学史研究的一个重要目标是为中学数学教师服务。他还倡导，师范院校有必要开设数学史课程。本世纪初，我国著名数学教育家张奠宙教授开始关注数学史的教育价值，并提倡在数学教学中运用数学史。2002年，张先生在《数学教学》上创办“数学史与数学教育”栏目，可惜这个专栏在当时并没有引起数学教育界的重视。三年后，第一届全国数学史与数学教育学术研讨会在西北大学召开，HPM开始受到国内学术界的普遍关注。但从前六届全国HPM会议（2005～2015）看，尽管关注HPM领域的人日益增多，数学史融入数学教学的实践开发的重要性已成为共识，但迄今尚无成熟的研究方法。大量HPM文献中，总结“为何”的很多，探讨“如何”的偏少；思辨议论很多，实证研究偏少。

目前，国际上比较重要的专著是John Fauvel和Jan van Maanen的《数学教育中的历史》（图0-2），而在我国，迄今尚未有一部系统探讨数学史与数学教育关系且对HPM领域的教学研究具有指导性的高水平学术著作。

本书的出版将满足以下各方面的需要。

首先，确立数学史与数学教育之间的关系作为一个研究领域的内容框架和研

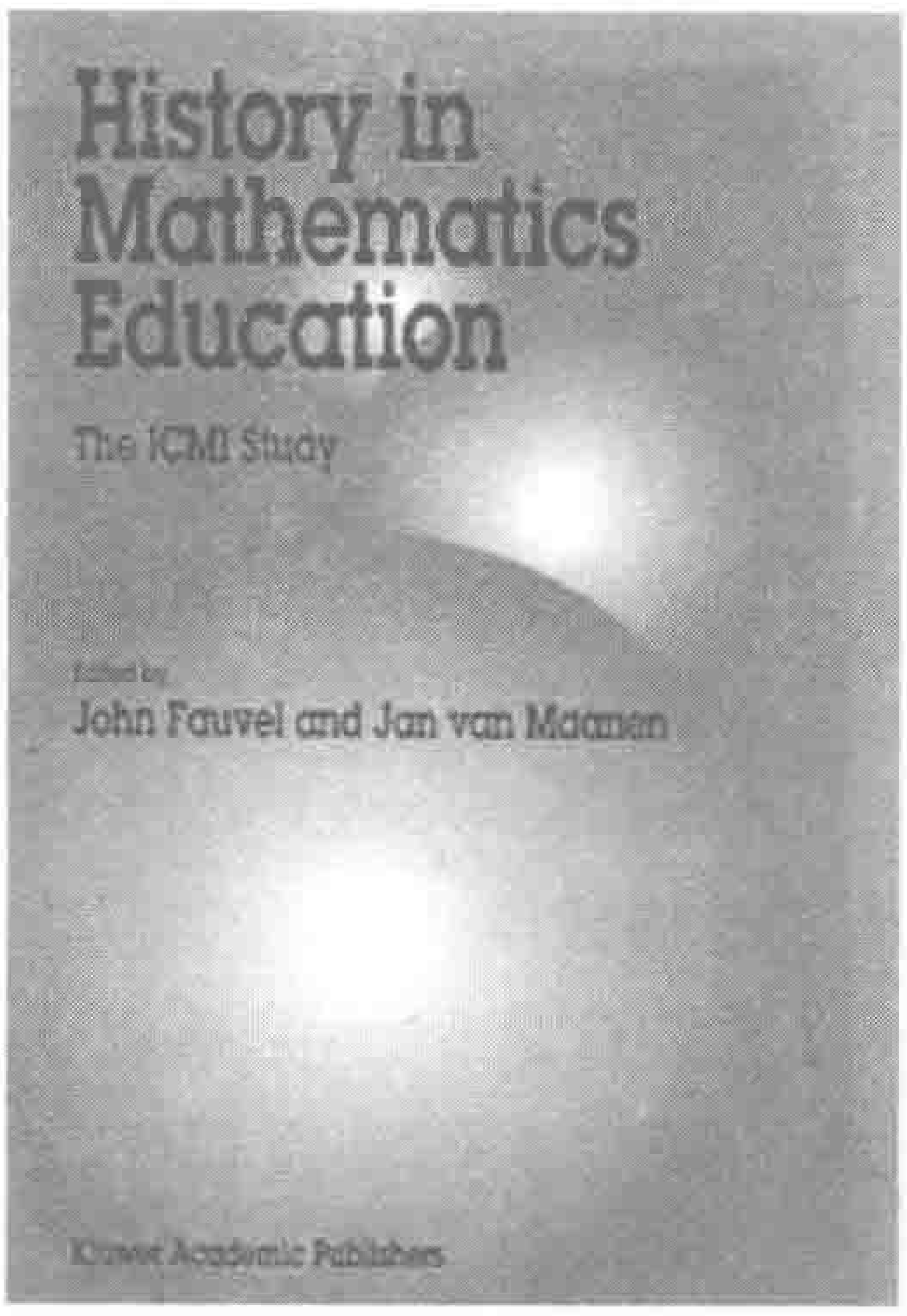


图 0-2 《数学教育中的历史》书影

究方法，为未来更多的相关研究建立理论基础；

其次，为中学数学教师在教学中运用数学史提供素材、案例和理论指导，从而提升 HPM 的实践价值，加强 HPM 与中学数学教育之间的联系；

再次，为职前和在职教师教育课程“数学史与数学教育”（目前国内很少有师范院校开设这门课程）的建设打下基础；

最后，促进数学史与数学文化在数学教育界的传播，并为数学史融入初、高中数学课程提供参考。

图 0-3 给出了本书各章与 HPM 各研究主题之间的对应关系。

在第 1 章，我们将追溯 HPM 的历史源流，考察西方学者对“为什么要将数学史融入数学教学”

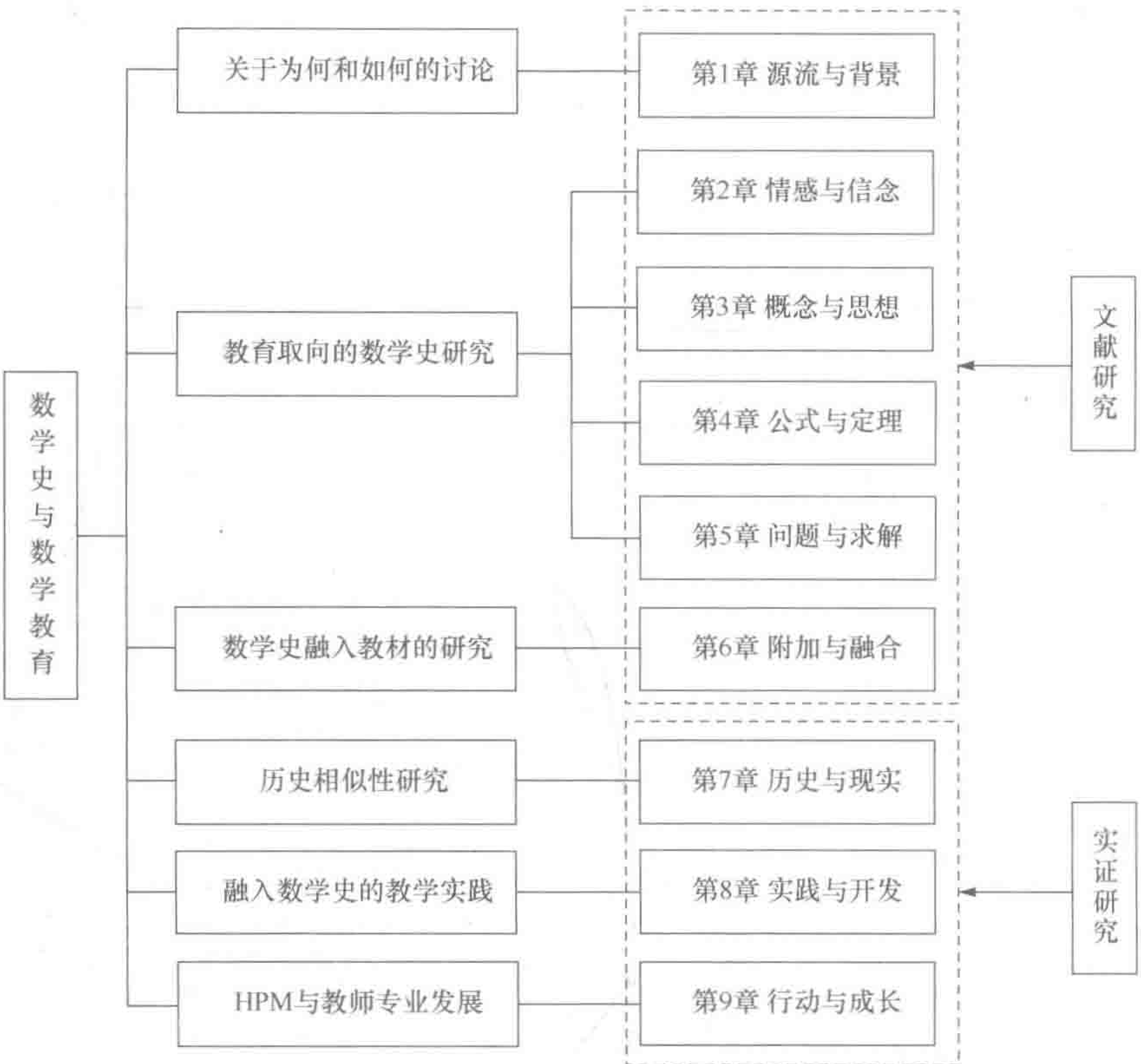


图 0-3 本书各章与 HPM 各研究主题之间的对应关系

所作的讨论，系统阐明 HPM 的学术价值和对数学教学的现实意义。在第 2～5 章，我们立足于“教学取向的数学知识(MKT)”理论，挖掘数学史素材，通过丰富多彩的数学史实例说明数学史在改善数学教学质量和提升教师 MKT 方面所扮演的角色。第 6 章探讨数学教科书中的数学史内容的分析方法，并将研究对象扩展至历史上的教科书。第 7 章介绍关于 HPM 重要理论基础——发生原理的实证研究。第 8 章通过具体的 HPM 教学案例，探讨数学史融入数学教学的具体方法，展示 HPM 教学设计、实施和评价的过程。第 9 章以两位中学数学教师为研究对象，探讨 HPM 在促进教师专业发展方面的有效性。

HPM 是一个富有魅力、前景广阔、特色鲜明的学术领域。近年来，越来越多的大学、中学和小学教师与象牙塔里的职前教师们对 HPM 产生了浓厚的兴趣。但是，要在该领域做出好的工作，也并非易事。它横跨数学史与数学教育两个学科，既需要有一定的数学和数学史功底，也需要掌握数学教育的理论与研究方法；既需要有坐冷板凳的功夫，也需要有较强的社会实践能力；既需要有文献驾驭和理解的能力，也需要有较强的写作能力。无疑，HPM 学术研究与实践探索都是艰辛的，尽管如此，HPM 的实践成效却让我们感到惊奇和快乐。

且让我们携手步入一片新天地，时而穿越时空，与先哲对话，汲取思想养料，探索教学方法；时而回归现实，走入学生的心灵之中，探寻数学学习的历史相似性；时而掩卷深思，品味成败得失，展望数学教育美好的明天。

汪晓勤

2016 年 3 月于上海

目　录

第 1 章　源流与背景

没有任何科学教育可以不重视科学的历史与哲学。

——马赫(E. Mach,1838～1916)

作为一个学术研究领域,数学史与数学教育之间的关系如今已经广为人知。那么,这个领域是如何诞生的?数学教师为什么需要了解这一领域?本章将追溯学科历史,分析学术背景,总结教育思想,回答上述问题。

1.1　数学史的教育

早在公元前 4 世纪,古希腊学者欧德摩斯(Eudemus,公元前 4 世纪)即开始系统研究数学的历史了。他著有《算术史》(*History of Arithmetic*)、《几何史》(*History of Geometry*)和《天文学史》(*History of Astronomy*),可惜全都失传,我们只是在后世希腊数学家的著作中看到一些零星的信息。18 世纪,雄心勃勃的法国著名数学史家蒙蒂克拉(J. E. Montucla,1725～1799)试图勾勒整个人类文明的历史,于 1758 年出版《数学史》(2 卷),此书成了历史上第一部数学史经典著作(图 1-1)。

德国数学史家康托尔(M. Cantor,1829～1920)从 1880 年开始陆续出版《数学史讲义》诸卷[①](4 卷,1880～1908),此书取代了蒙蒂克拉的《数学史》,成了当时最有影响的数学史著作,对数学史学科的建立起着重要作用(图 1-2)。

在 1904 年德国海德堡召开的第三届国际数学家大会上,美国著名数学史家和数学教育家史密斯(D. E. Smith,1860～1944)、法国著名数学史家塔内里(P. Tannery,1843～1904)、德国数学史家布劳恩米尔(A. von Braunmühl,1853～1908)、兰普(E. Lampe,1840～1918)、西蒙(M. Simon,1844～1918)、斯特克尔(P. Stäckel,1862～1919)、沃尔芬(E. Wölffing)、意大利数学史家洛里亚(G. Loria,1862～1954)等在提出的一项决议中称:

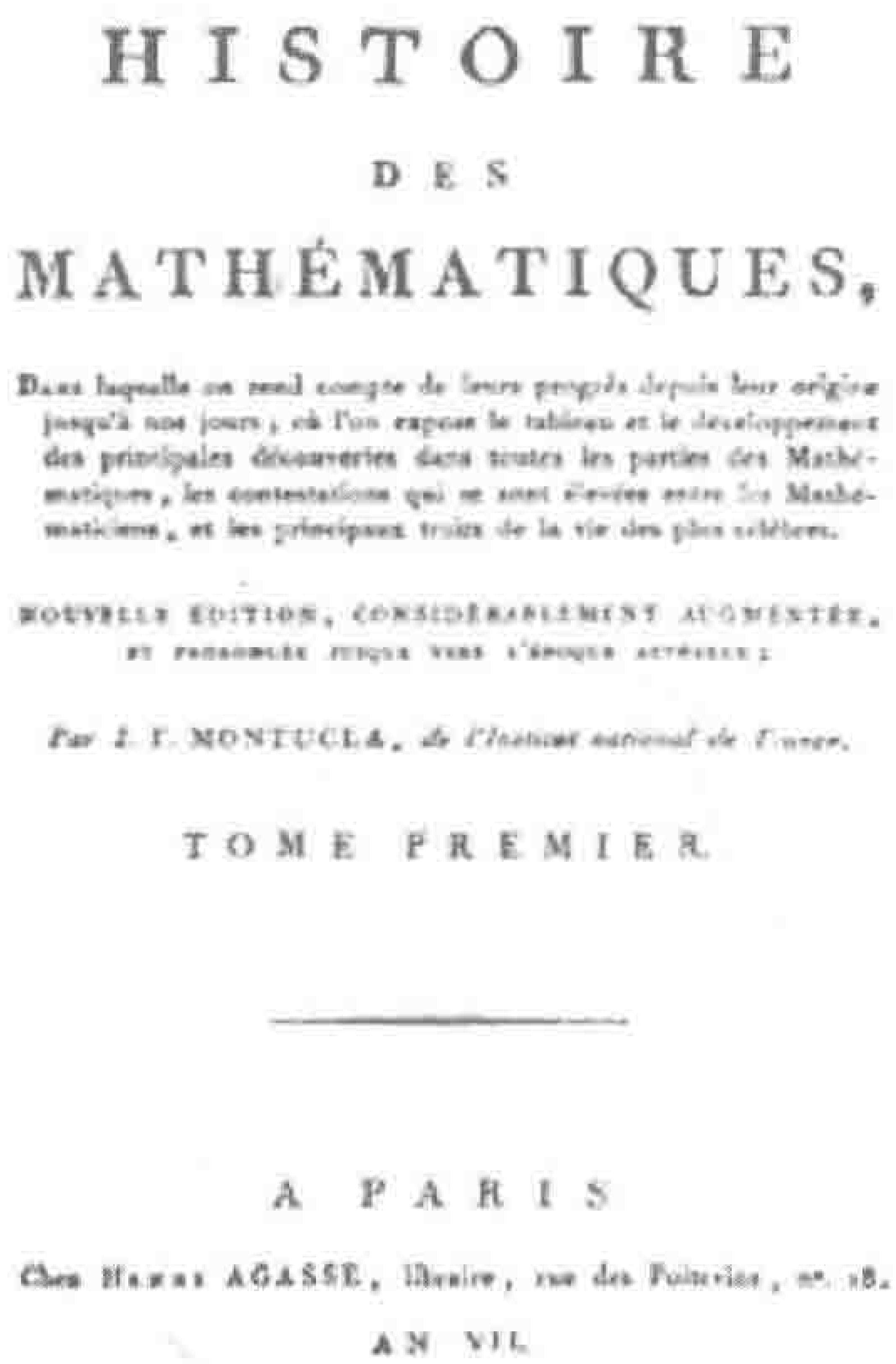
> "数学史在今天已成为一门具有无可否认重要性的学科,无论从数学的角度还是从教学的角度来看,其作用变得更为明显,因此,在公众教育中给予其恰当的位置乃是不可或缺的事。"(Fauvel and van Maanen,2000,91—92)

决议希望在大学里开设精密科学史课,包括数学与天文学史、物理与化学史、自然科学史、医学史四部分。决议还建议在中学课程中介绍精密科学的历史。自此,数学史正式成了一些大学里的一门课程。史密斯在其《数学史》(1923～1925)前言中

---

① 其中第 4 卷由九位作者合作完成。

指出："数学史已被公认为师范教育及大、中学校学生博雅教育中的重要学科。"(Smith，1923，iii)以下是数学史课程在美国高校的开设情况：


HISTOIRE

DES

MATHÉMATIQUES,

TOME PREMIER.

A PARIS

AN VII.

图 1-1　蒙蒂克拉《数学史》书影


VORLESUNGEN

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1894.

图 1-2　康托尔《数学史讲义》书影

1891 年：史密斯在密歇根州立师范学院开设数学史；

20 世纪初：哥伦比亚大学师范学院设立数学教育博士点，数学史是最重要的学位课程；

1918 年：卡约黎(F. Cajori，1859～1930)被加利福尼亚大学聘为数学史教授；

20 世纪 20 年代初：40％的师范院校开设数学史课程；

1936 年：160 所高校开设数学史课程；

20 世纪 50 年代末：52％的师范院校开设数学史课程。

在我国，钱宝琮先生早在浙江大学任教时即已开设数学史课程，但直到 20 世纪 80 年代，师范院校才普遍开设数学史选修课。

1.2　先驱者的思想

1.2.1　筚路蓝缕

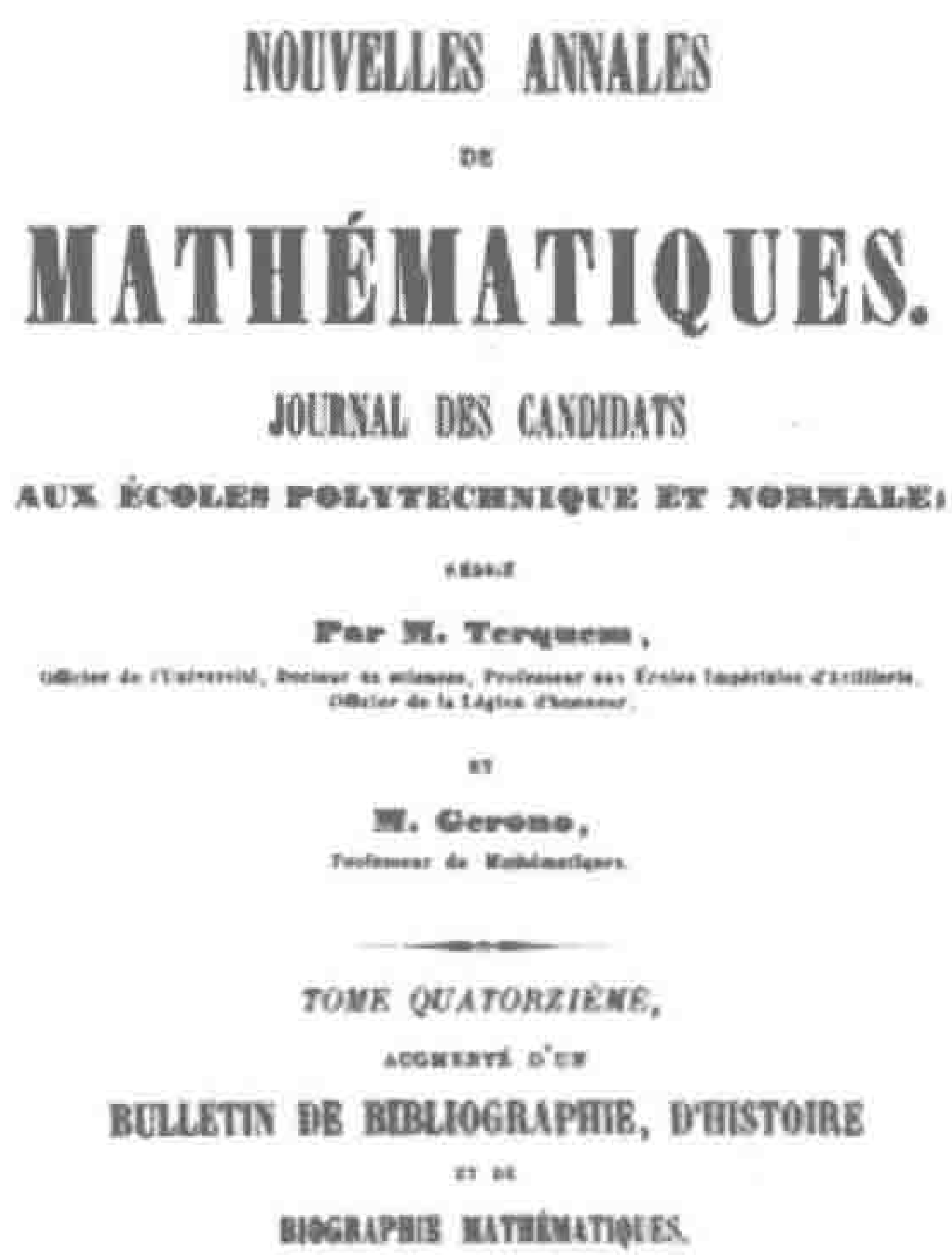
早期的数学史作者蒙蒂克拉、康托尔似乎并未关注数学史与数学教育之间的关系，但 19 世纪一些关注数学史的数学家已经意识到数学史的教育价值，法国犹太数学家泰尔康(O. Terquem，1782～1862)就是其中的先驱者。早在 1838 年，泰尔康就在《纯粹与应用数学杂志》(刘维尔杂志)上发表论文，对"黄金分割"一词进行考证(Terquem，1838)。19 世纪 40～50 年代，他在《新数学年刊》上发表了系列数学史论文，内容涉及数学术语(不可公度量、无理量)考辨(Terquem，1844a)、圆

锥曲线的历史(Terquem,1842a)、"sinus"(正弦)一词的起源(Terquem,1854)、笛卡儿(R. Descartes,1596～1650)指数记号的历史(Terquem,1847)、牛顿(I. Newton,1643～1727)二项式定理的历史(Terquem,1847)、消元法的历史(Terquem,1842b)、康德(I. Kant,1724～1804)论负数(Terquem,1844b)、关于小数的历史文献(Terquem,1853)等,还介绍了很多数学家的生平著述。

1855年,泰尔康创办数学史专业刊物——《数学文献、历史与传记通报》,作为《新数学年刊》的副刊。从创刊开始直到泰尔康去世的1862年,《数学文献、历史与传记通报》共出版了8卷,发表了许多教育取向的数学史文章,见表1-1。这些文章大部分出自泰尔康的手笔。

表1-1 《数学文献、历史与传记通报》中的部分数学史文章

年份	卷	数学史专题	数学史文献
1855	1	对数的发明;费马(P. de Fermat,1601～1665)多边形数定理;阿喀琉斯(Archilles)追龟问题;球面三角形求积的历史;关于调和比的历史注记	鲁道夫(C. Rudolff,1499～1545)《物之术》;帕斯卡(B. Pascal,1623～1662)《思想录》;纳皮尔(J. Napier,1550～1617)《对数表》;吉拉德(A. Girard,1595～1632)《代数新发明》;拉克洛瓦(S. F. Lacroix,1765～1843)《几何基础》;斯坦纳(J. Steiner,1796～1863)《几何作图》
1856	2	倍立方问题的历史;关于阿基米德(Archimedes,公元前287～前212)牛群问题;三次方程求解的历史;"chiffre"(法文)和"zero"二词的起源	斐波那契(L. Fibonacci,1170? ～1250?)《花朵》和《平方数之书》;巴贝奇(C. Babbage,1791～1871)的自然对数表;微积分发明权仲裁委员会的报告
1857	3	古希腊的记数法;罗马分数的命名与表示法;"moment"(瞬)一词的起源;卡塔尔迪(P. A. Cataldi,1548～1626)与连分数	《几何原本》算术卷;丢番图(Diophantus,200? ～284?)的不定分析问题;《大术》中有关方程的定理
1858	4	"Calculer"(法文)一词的起源;伯努利(Bernoulli)家族的家谱	斯特恩(M. A. Stern,1807～1894)的《超越方程的解》
1859	5	分数与无理数指数的发明;π的历史;牛顿法的修正;平面曲线的历史	定积分表
1860	6	行列式的起源;毛罗利科(F. Maurolico,1494～1575)的圆面积求法;比尔吉(J. Bürgi,1552～1632)与"logarithme"(法文)一词的纳皮尔含义;丢番图的墓志铭;韦达(F. Viète,1540～1603)的家谱	
1861	7	索菲·热尔曼(S. Germain,1776～1831)关于不同时代科学与文学发展状况的思考;开普勒(J. Kepler,1571～1630)与塔木德经	欧几里得(Euclid,公元前3世纪)《命题集》;历史上第一部印刷出版的算术书
1862	8	关于梅修斯(A. Metius,1571～1635)的圆周率(355/113);莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646～1716)的精神特征;中国的算术与代数	拉克洛瓦的《微积分基础》



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

Par M. Terquem,

ET

M. Gerono,

TOME QUATORZIÈME,

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

图 1-3 《新数学年刊》及其副刊《数学文献、历史与传记通报》

《数学文献、历史与传记通报》(图 1-3)的办刊主旨就是为各类公立学校师生服务。显然,在泰尔康眼中,数学史是数学教学不可或缺的资源(汪晓勤,2002)。

1.2.2 以史为鉴

英国数学家德摩根(A. De Morgan,1806~1871)不仅是一位大数学家,而且也是英国当时最重要的数学史家。在德摩根一生众多著述中,数学史与天文学史占了六分之一以上。德摩根的剑桥大学老师、英国著名数学家皮科克(G. Peacock,1791~1858)曾称他是"所有现代数学史作者中最准确和最博学的学者",而后来剑桥大学三一学院的数学家鲍尔(W. W. R. Ball,1850~1925)也称:"在数学哲学和数学史方面,他或许比同时代的其他任何一个人都渊博"(汪晓勤,2001)。

在伦敦数学会主席就职演说中,德摩根指出:"任何一门艺术或科学都算不上博雅艺术或博雅科学,除非人们将其与人类过去的思想联系起来学习。"他还说:"人类数学思想的早期历史引导我们发现自己的错误;从这个方面说,关注数学的历史是很有益的。"(De Morgan,1865)这里,德摩根实际上已经意识到历史相似性及其对教师的帮助了。

有两个例子可以说明德摩根对历史相似性的认识。第一个例子是幂的写法(De Morgan,1902,60)。在表达同一个字母 x 自乘多次的结果时,x 只用一次,在其右上角写出现的次数。这是 17 世纪法国数学家笛卡儿发明的幂的写法。德摩根指出,学生应该仔细学习以下数表(表 1-2)。

表 1-2 幂的书写方法

原始写法	简写法	笛卡儿写法	读法
$x\times x$	xx	x^2	x 的平方或二次幂
$x\times x\times x$	xxx	x^3	x 的立方或三次幂
$x\times x\times x\times x$	$xxxx$	x^4	x 的四次幂
$x\times x\times x\times x\times x$	$xxxxx$	x^5	x 的五次幂
⋮	⋮	⋮	⋮

德摩根指出,初学者极易将 $4x$ 和 x^4 混为一谈。因此,一开始他最好不要使用笛卡儿的写法 x^4,而是采用简写法 $xxxx$,直到运算中能够正确区分两者为止。如果他不遵循这样的顺序,他必须牢记,两种表达式中的 4 是不同的:在 $4x$ 中,4 称

为“系数”，而在 x^4 中，4 称为“指数”。

第二个例子是代数恒等式的表达(De Morgan，1902，56—57)。德摩根认为，代数学上一般数量关系的发现始于特例。例如：两个数的和的一半加上它们的差的一半等于较大的数。首先，取 16 和 10，它们的和的一半为 13，差的一半为 3。13 和 3 相加，得 16，为较大数。上述结果对于其他数对也是成立的，如 27 和 8，15 和 9 等。利用运算符号，我们发现以下事实：

$$\frac{16+10}{2}+\frac{16-10}{2}=16,$$

$$\frac{27+8}{2}+\frac{27-8}{2}=27,$$

$$\frac{15+9}{2}+\frac{15-9}{2}=15,$$

等等。但如何表达上述结果对于任何一对数都成立呢？我们将较大数称为第一数，较小数称为第二数，就有

$$\frac{\text{第一数}+\text{第二数}}{2}+\frac{\text{第一数}-\text{第二数}}{2}=\text{第一数}。$$

类似地，也可以得到其他等式，如

$$(\text{第一数}+\text{第二数})\times(\text{第一数}-\text{第二数})=\text{第一数}\times\text{第一数}-\text{第二数}\times\text{第二数}。$$

但每次写“第一数”“第二数”很麻烦，若用 x 表示“第一数”，用 y 表示“第二数”，则上面的恒等式可以写成

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x,$$

$$(x+y)\cdot(x-y)=x\cdot x-y\cdot y。$$

因此，用字母来表示数后，我们能够快速、简洁地表达一个对于任意数都成立的事实。

1.2.3　教育取向

HPM 先驱者、美国数学史家卡约黎(图 1-4)是一位多产的作者，著有《美国数学的教学与历史》(1890)、《数学史》(1894，图 1-5)、《初等数学史及其教学启示》(1896)、《物理学史》(1899)、《数学符号史》(1928)等。他的 HPM 思想可以归结为以下两点。

首先，一门学科的历史知识乃是“使面包和黄油更加可口的蜂蜜”“有助于使该学科更具吸引力”(Cajori，1899)，能够激发学生学习兴趣；使他们树立正确的价值观。他在《数学史》前言里指出，数学史对于教师具有重要价值：“如果用历史回顾和历史轶事点缀枯燥的问题求解和几何证明，学生的学习兴趣就会大大增加。……通过历史的解说，教师可以让学生明白：数学并不是一门枯燥呆板的学科，而是一门不断进步的生动有趣的学科。”(Cajori，1911)实际上，在他编写的数学教科书中就包含

数学史知识。

其次，一门学科的历史是这门学科的教学指南，因为学生的理解具有历史相似性："学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难"(Cajori，1899)。根据孔德(A. Comte，1798～1857)和斯宾塞(H. Spencer，1820～1903)的理论——"个体知识的发生遵循人类知识的发生过程"(参阅第 7 章)，卡约黎指出：数学史是有效的教学工具(Cajori，1917，v)。实际上，《初等数学史》就是"为教育而历史"的典型例证，书中考察算术、代数、几何与三角的历史，无不为获取教学方法上的借鉴。例如，根据负数的历史，卡约黎得出结论："在教代数的时候，给出负数的图形表征是十分重要的。如果我们不用线段、温度等来说明负数，那么现在的学生就会与早期代数学家一样，认为它们是荒谬的东西。"(Cajori，1917，233)这种利用数学史解决学生认知障碍的思想与德摩根的 HPM 观点是一脉相承的。

图 1-4　卡约黎


A HISTORY OF

MATHEMATICS

FLORIAN CAJORI

MACMILLAN AND CO.

1894

图 1-5　卡约黎《数学史》书影

在卡约黎的大量论文中，我们能感受到一种强烈的教育关怀。未知数为什么用 x 来表示？指数记号是如何演进的？"数学归纳法"之名是如何产生的？"对数"之名是怎么来的？纳皮尔对数就是自然对数吗？为什么等差级数和等比级数又分别叫算术级数和几何级数？牛顿墓碑上刻着二项式定理吗？为什么芝诺(Zeno，公元前 490～前 425)要提出他的四个悖论？四维空间概念是如何诞生的？……卡约黎在论文中都一一给出了答案。为什么要学数学？数学有何教育价值？当我们面对公众和学生的疑问时，卡约黎的著作又给我们以启迪——他通过对历史上 731 位名人的数学观的统计(Cajori，1928)，发现肯定和否定数学教育价值的人数之比为 603∶128！

1.2.4　思想源泉

HPM 先驱者史密斯(图 1-6)也是一位多产的作者，著有《初等数学的教学》