研究生精品教材

现代分析基础

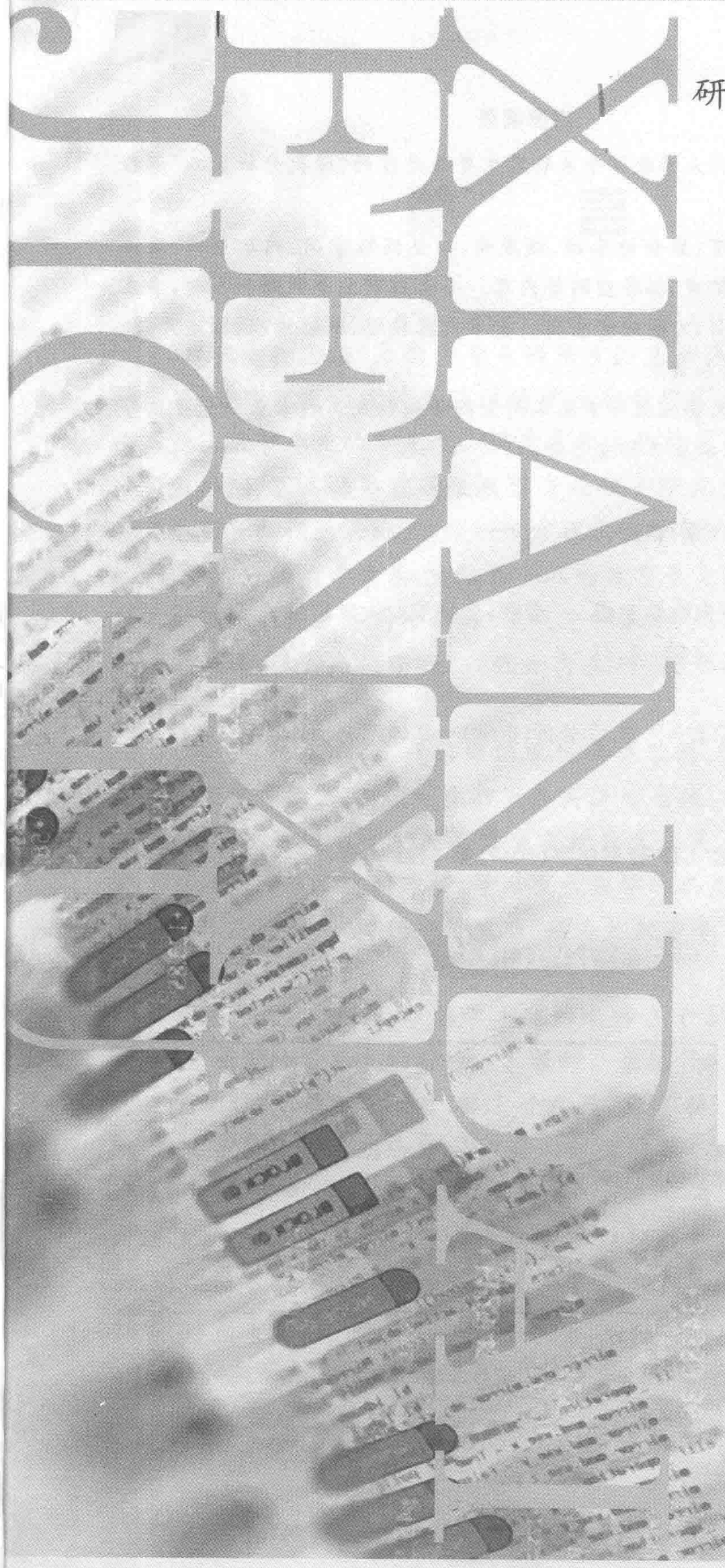
朱晓临　主编

合肥工业大学出版社

研究生精品教材

现代分析基础

朱晓临 主编



合肥工業大學出版社

内容摘要

本书是为理工科大学数学专业研究生普遍开设的“现代分析基础”课程编写的教材。

本书主要内容有：集合论基础、测度论、赋范线性空间、内积空间、泛函分析中的几个重要定理、拓扑空间等内容。每章都有大量例题和习题，书末还有相关概念的索引，方便读者查阅。全书内容精练、脉络清晰、阐述严谨、深入浅出，便于教学和自学。

本书也可以作为高校数学专业本科生高年级以及工科专业研究生选修课程的教材，并可供科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代分析基础/朱晓临主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5650-3532-6

Ⅰ.①现… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①分析(数学)—基础理论—研究生—教材
Ⅳ.①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 219191 号

现代分析基础

主　编　朱晓临　　　　责任编辑　张择瑞

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2017 年 9 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2017 年 10 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	710 毫米×1010 毫米　1/16
电　话	理工编辑部：0551-62903204	印　张	9.5
	市场营销部：0551-62903198	字　数	110 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	hfutpress@163.com	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-5650-3532-6　　　　定价：30.00 元

前　　言

“现代分析基础”是数学专业研究生的基础课程，通过该课程的学习，为研究生后续的专业课的学习和科研实践打下坚实的理论基础。数学专业的研究生必须具有扎实的数学基本功，而“现代分析基础”的基本任务就是使数学专业硕士研究生在本科所学的分析类课程知识的基础上，进一步掌握现代分析的思想、理论和方法，培养良好的数学素养，为培养合格的数学专业研究生提供必要的基础理论保证。各高校都将“现代分析基础”列为数学专业研究生的学位课，很多高校还将“现代分析基础”列为数学专业本科高年级的选修课或必修课。

“现代分析基础”是一门提供现代数学思想、数学思维和数学方法的数学基础课，对研究生打下扎实理论基础、培养科学素养和洞察力、提高科研水平都有非常重要的意义。高校工科专业的研究生可以通过选修这门课程，学习现代数学的思想和方法。因此，目前很多高校都将“现代分析基础”列为非数学专业研究生的选修课程。

本书是合肥工业大学数学学院的老师在十多年从事“现代分析基础”教学的基础上编写的一本教材。在编写时，我们力求使它既便于教学，也便于自学。在选材方面，力求精炼、简洁、脉络清晰，着重强化分析问题和解决问题的能力培养；在文字叙述方面，力求做到由浅入深、言简意赅、通俗易懂。书中每章都配备了大量的例题和习题，尤其对那些读者比较难以理解和掌握的理论和方法，通过例题从多角度给予详尽的解答。书末还有相关概念的索引，方便读者查阅。

全书共有六章，主要内容有：集合论基础、测度论、赋范线性空

间、内积空间、泛函分析中的几个重要定理、拓扑空间。全书讲授课时为40学时。如果少于要求学时，可以少讲每章的部分内容，或选讲其中部分内容；其他内容可作为自学或参考资料。

本书第1章、第2章由朱晓临编写，第3章、第4章由朱晓临、李露露编写，第5章由李露露编写，第6章由陈智、朱晓临编写。全书由朱晓临整理、统稿，并最后定稿。

在本教材付梓之际，我们衷心感谢合肥工业大学研究生精品教材项目的支持；同时，衷心感谢合肥工业大学出版社的编辑，感谢他们的耐心和热心，他们认真负责的专业精神是这本教材能高质量完成的保证。

限于作者的水平，书中难免有不当乃至错误之处，尚祈读者批评指正，编者将不胜感激。

编　者

2017年4月

目　录

第1章 集合论基础

1.1 集合的基本概念与运算

1.1.1 集合的基本概念

集合论是大家熟悉的知识，这里仅将其主要内容列举于后，不作详细的解释。

定义 1.1.1 由具有某种共同特点的个体构成的集体称为**集合**，简称**集**。集合中的个体称为**元素**。

$a \in A$ 表示 a 是 A 的元素，读作 a 属于 A；$a \notin A$（或 $a \bar{\in} A$）表示 a 不是 A 的元素，读作 a 不属于 A；$\varnothing$ 表示空集。

$A \subset B$ 或 $B \supset A$（或 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$）表示集 A 是集 B 的子集，读作 A 包含于 B.

$A = B$ 表示集 A 与集 B 相等；$A \neq B$ 表示集 A 与集 B 不相等。

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为集 A 与集 B 的**并集**（或**和**（**集**））；

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为集 A 与集 B 的**交集**（或**通**（**集**））；

$\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in I$，使 $x \in A_\alpha\}$，$\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid$ 对一切 $\alpha \in I$，均有 $x \in A_\alpha\}$，其中 I 称为 A_α 的**指标集**。

定义 1.1.2 若 $A \cap B = \varnothing$（$A \cap B \neq \varnothing$），则称集 A 与集 B **不相交**（**相交**）；若 $\{A_\alpha\}$ 的任何两个集没有公共元素，则 $\{A_\alpha\}$ 是一个**不相交的集族**。

定义 1.1.3 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差**（**集**）（读作 A 差 B 或 A 减去 B）。

当 A 是全集，$B \subset A$ 时，称差（集）$A - B$ 为 B 的**余集**，记为 B^c.

注 下列记号在本书中是固定的：

N 表示全体自然数构成的集合；**Z** 表示全体整数构成的集合；**Q** 表示全体有理数构成的集合；**R** 表示全体实数构成的集合；$\mathbf{R}^+$ 表示全体非负实数构成

的集合;**C** 表示全体复数构成的集合。

设 X 是一个集合,用 2^X 表示 X 的所有子集构成的集合(或 X 的所有子集构成的集簇;或 X 的所有子集构成的集类),称之为 X 的**幂集(合)**。

1.1.2 集合的运算

设 I 是指标集,$A,B,C,A_\alpha(\alpha\in I),B_\alpha(\alpha\in I)$ 是集合,则

(1) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,A\cap B=A$. 特别地,$A\cup A=A,A\cap A=A$.

(2) $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$.

(3) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5) $A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

(6) $B-\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B-A_\alpha),B-\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$.

$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha-B=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B),\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha-B=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$.

(7) $(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c,(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$(德·摩根(De Mongan)律)。

(8) $(A^c)^c=A$.

(9) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$.

(10) $(C-A)-B=C-(A\cup B),A-B=A\cap B^c$.

1.1.3 上限集、下限集及集列的极限

定义 1.1.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列集合,称

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\lim_n\sup A_n \tag{1.1.1}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的**上限集**;它是由属于集列 $\{A_n\}$ 中无数多个集的元素的全体所组成的集合,即:$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\,|\,x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_{k_m},A_{k_m}\in\{A_n\},m=1,2,\cdots\}$。称

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\lim_n\inf A_n \tag{1.1.2}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的**下限集**;它是由属于集列 $\{A_n\}$ 中从某个指标 $N=N(x)$(这个指标不是固定的,与元素 x 有关)以后的所有集 A_n 都包含的元素的全体(即除去有限多个集外的所有集 A_n 所含有的元素)所组成的集合,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\,|\,\exists N=N(x)\in\mathbf{N},当\ n\geqslant N\ 时,x\in\bigcap_{m=N}^{\infty}A_m\}.$$

性质 设$\{A_n\}$是一个集列,S是任意一个集,则

(1)$S-\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}(S-A_n)$, $S-\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}(S-A_n)$;

(2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定理 1.1.1 设$\{A_n\}$是一个集列,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,\quad \varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m \tag{1.1.3}$$

证 (1) 记$P=\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$,$Q=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 往证$P=Q$.

对$\forall x\in P$,由上限集的定义,x属于$\{A_n\}$中无限个集,不妨设x同时属于$A_{n_1},A_{n_2},\cdots,A_{n_k},\cdots(n_k<n_{k+1},k=1,2,\cdots)$. 于是,对任意自然数$n$,当$n_k>n$时,$x\in A_{n_k}\subset\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,故$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m=Q$,即$P\subset Q$.

反之,对$\forall y\in Q=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,往证:在$\{A_n\}$中必有无限个集同时含有元素$y$.

事实上,取$n=1$,因为$y\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_m$,所以必存在自然数$n_1$,使得$y\in A_{n_1}$;

又因为$y\in\bigcup\limits_{m=n_1+1}^{\infty}A_m$,所以必存在自然数$n_2>n_1$,使得$y\in A_{n_2}$;

这样的过程一直进行下去,得到一列自然数$\{n_k\}$,$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,而集$A_{n_1},A_{n_2},\cdots,A_{n_k},\cdots$都含有元素$y$,因此$y\in P$,于是又有$Q\subset P$.

综上所述,有$P=Q$.

(2) 记$A=\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$,$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 往证$A=B$.

对$\forall x\in A$,由下限集的定义,存在自然数$N=N(x)$(与x有关),当$n\geqslant N$时,$x\in A_n$. 于是,$x\in\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}A_m\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m=B$,即$A\subset B$.

反之,对$\forall y\in B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,往证:存在自然数$N$,当$n\geqslant N$时,$x\in A_n$.

事实上,因为$y\in B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,所以存在自然数$N$,使$y\in\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}A_m$,即当$n\geqslant N$时,$x\in A_n$.

因此$y\in A$,于是又有$B\subset A$.

综上所述,$A=B$. 证毕!

例 1.1.1 设$A_n(n=1,2,3,\cdots)$是如下一列点集:

$A_{2n+1}=\left[0,2-\frac{1}{2n+1}\right],n=0,1,2,\cdots$； $A_{2n}=\left[0,1+\frac{1}{2n}\right],n=1,2,3,\cdots$.

求$\{A_n\}$的上限集和下限集．

解 因为 $A_n\subset[0,2),n=1,2,\cdots$,所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2)$.

因为 $[0,1]\subset A_n\ (n=1,2,\cdots)$,所以

$$[0,1]\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\varliminf_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2),$$

$$[0,1]\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\varlimsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2).$$

而对 $\forall x\in(1,2)$,存在自然数 $N=N(x)$,当 $n\geqslant N$ 时,恒有

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1};$$

即当 $n\geqslant N$ 时,$x\overline{\in}A_{2n}$,但 $x\in A_{2n+1}$. 换句话说,对于开区间$(1,2)$中的点x,具有充分大的奇数指标的集都含有x,从而$\{A_n\}$中有无限多个集含有x；而充分大的偶数指标的集都不含有x,即$\{A_n\}$中也有无限多个集不含有x.这说明:$x\notin\varliminf_{n\to\infty}A_n$,$x\in\varlimsup_{n\to\infty}A_n$.

由 $x\notin\varliminf_{n\to\infty}A_n$ 得:$\varliminf_{n\to\infty}A_n\cap(1,2)=\varnothing$. 再由$[0,1]\subset\varliminf_{n\to\infty}A_n\subset[0,2)$得:$\varliminf_{n\to\infty}A_n=[0,1]$.

而由 $x\in\varlimsup_{n\to\infty}A_n$ 得:$(1,2)\subset\varlimsup_{n\to\infty}A_n$,进而得:$[0,2)\subset\varlimsup_{n\to\infty}A_n$. 再由$\varlimsup_{n\to\infty}A_n\subset[0,2)$得:$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=[0,2)$.

例 1.1.2 设 $A_n=\left(0,1-\frac{1}{n}\right),n=1,2,3,\cdots$. 类似于例 1.1.1 的讨论,得:

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}A_n=(0,1).$$

定义 1.1.5 若$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}A_n\overset{记}{=}A$,则称集列$\{A_n\}$**收敛**,并称集合$A$为集列$\{A_n\}$的**极限**,记为$\lim_{n\to\infty}A_n=A$.

若集列$\{A_n\}$满足$A_n\subset A_{n+1}$(或$A_n\supset A_{n+1}$),$n=1,2,\cdots$, 则称$\{A_n\}$是**单调增加**(或**单调减少**)**集列**;单调增加和单调减少的集列统称为**单调集列**。

性质 单调集列是收敛的;且

(1) 若 $\{A_n\}$ 是单调增加的，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) 若 $\{A_n\}$ 是单调减少的，则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

例如，集列 $A_n = \left(0, 1-\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 就是单调增加集列，由性质 (1) 知：$\{A_n\}$ 收敛，其极限是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1)$.

1.2　映射与集合的势

1.2.1　映射的基本概念

定义 1.2.1　设 X 和 Y 是两个非空集合，若存在一个规则 f，使对每个元素 $x \in X$，按照规则 f，在 Y 中有一个确定的元素 y 与 x 对应，记为 $f: x \mapsto y$，则称 f 是集 X 到集 Y(**中**) 的一个**映射**。

元素 y 称为元素 x(在映射 f 下) 的**象**，记作 $y = f(x)$.

对任一固定的 y，称满足关系 $y = f(x)$ 的 x 的全体为 y(在映射 f 下) 的**原象**，记作 $f^{-1}(y)$，即 $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y \in Y\}$.

f 的**定义域**是 X，记为 $D(f)$；f 的**值域**是 $f(X)$，记为 $R(f)$.

集 X 到集 Y 的映射记为 $f: X \to Y$.

若 $A \subset X$ 及 $B \subset Y$，则称 $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 为 A(在映射 f 下) 的**象**；称 $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ 为 B(在映射 f 下) 的**原象**(或**逆象**)。

注 1　特别地，若 Y 是一个数集(实数集或复数集)，则映射 f 就是定义在集 X 上的泛函；若 X, Y 都是数集，则映射 f 就是数学分析中所研究的函数。由此可见，映射的概念就是函数概念的推广。

注 2　对 $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ 来说，即使 $B \neq \varnothing$，但 $f^{-1}(B)$ 也可能是空集。

定义 1.2.2　设 X 和 Y 是两个非空集合，f 是集 X 到集 Y 的一个映射。若 $f(X) = Y$，则称 f 是 X 到 Y **上**的映射(或称 f 是 X 到 Y 的**满射**，或 f 把 X 映射到 Y **上**)。

对每一个 $y \in Y$，若 $f^{-1}(y)$ 至多由一点组成，即：对 X 中任意两个元素 x_1, x_2，当 $x_1 \neq x_2$ 时，必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是**可逆映射**(或**单(映)射**)。

若 f 是可逆映射，则 f^{-1} 也是一个映射，称之为 $f(X)$ 到 X 的**逆映射**；其定义域是 $f(X)$，值域是 X.

若 f 是 X 到 Y 上的可逆映射，则称 f 是 X 到 Y 的**一一对应**（或**双射**）。

注 1　任何可逆映射 f 一定是 X 到 $f(X)$ 的一一对应。

注 2　可逆映射必有逆映射。逆映射是反函数概念的推广。

定义 1.2.3　设 $f: X \to Y$ 及 $g: Y \to Z$，定义 X 到 Z 的映射 $h: X \to Z$ 为：

$$\text{对 } \forall x \in X, h(x) = g(f(x)),$$

则称 h 是 f, g 的**复合映射**，记为 $h = g \circ f$，即：$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$.

若 $f: X \to [-\infty, \infty]$ 且 $E \subset X$，则习惯上用 $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ 代替 $\sup f(E)$.

1.2.2　映射的运算

设 $f: X \to Y$ 为集 X 到集 Y 的一个映射，A_1, A_2 是 X 的子集，B_1, B_2 是 Y 的子集，A_α 是 X 的子集，B_α 是 Y 的子集，$\alpha \in I$，I 是指标集；则

(1) 若 $A_1 \subset A_2$，则 $f(A_1) \subset f(A_2)$. 若 $B_1 \subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$；

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$；

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(4) $f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)$；$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

(5) $f^{-1}(B_1^c) = [f^{-1}(B_1)]^c$；一般地，$f(A_1^c) \neq [f(A_1)]^c$.

(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$； $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$.

(7) $f(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$；$f(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$.

(8) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$；$f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$.

1.2.3　集合的特征函数

定义 1.2.4　设 X 是一个非空集合，A 是 X 的一个子集，称 X 上的函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为集 A 的**特征函数**。其中，$x \notin A$ 表示 $x \in X - A$ 或 $x \in A^c$.

注　子集 A 与它的特征函数之间是一一对应的。

特征函数与集合之间的一些等价关系：

(1)$A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 1$；$A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 0$.

(2)$A\subset B$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$；$A=B$ 等价于 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$.

(3)$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$；$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$.

(4) 设 $\{A_n\}$ 是一列集，则 $\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$；$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$.

(5) 设 $\{A_n\}$ 是一列集，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$ 存在；且当极限存在时，$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$.

定义 1.2.5　设 X,Y 是两个集合。若存在一个 X 到 Y 的一一对应 f，则称集 X 与集 Y **对等(或相似)**，记为 $X\overset{f}{\sim}Y$，或简记为 $X\sim Y$.

规定　空集 $\varnothing$ 和自身对等。

性质 1　对等是一种等价关系。

性质 2　设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$，$\{B_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是两个集族，I 是指标集。若对每个 $\alpha\in I$，都有 $A_\alpha\sim B_\alpha$ 且 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$，$B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing$，$\alpha,\beta\in I$，$\alpha\neq\beta$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

常用下面的定理判断两个集合对等：

定理 1.2.1(伯恩斯坦定理)　设 X,Y 是两个集。若 X 对等于 Y 的一个子集，Y 又对等于 X 的一个子集，则 $X\sim Y$.

1.2.4　映射的延拓

定义 1.2.6　设 f,g 分别是定义域 D_f,D_g 到集 B 的映射。若 $D_f\subset D_g$，且对于 D_f 中的每个元素 x，都有 $f(x)=g(x)$，则称映射 g 是映射 f 在 D_g 上的**延拓**，并称映射 f 是映射 g 在 D_f 上的**部分或限制**，记为 $f=g|_{D_f}$.

例 1.2.1　设 $f(x)=x^3,0\leqslant x\leqslant 1$；$g(x)=|x|^3,-\infty<x<+\infty$，则 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的延拓，即 $f=g|_{[0,1]}$.

例 1.2.2　设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n,z\in\mathbf{C}\,|z|<1$；$g(z)=\dfrac{1}{1-z},z\in\mathbf{C},z\neq 1$，解析函数 $g(z)$ 就是 $f(z)$ 的延拓。

1.2.5 集合的势

1.2.5.1 基本概念

定义 1.2.7 设 X,Y 是两个集合。若 $X \sim Y$，则 X 与 Y 具有相同的**势**（或**基数**）；记 X 的势为 $\overline{\overline{X}}$. 当 X 与 Y 具有相同的势时，记为 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$.

若 X 对等于 Y 的某个子集 A，则称 X 的势小于或等于 Y 的势，或称 Y 的势大于或等于 X 的势，记为 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} \geqslant \overline{\overline{X}}$.

若 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{Y}}$，则称 X 的势小于 Y 的势，或称 Y 的势大于 X 的势，记为 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} > \overline{\overline{X}}$.

注 势这个概念的直观背景就是元素的个数。两个集合 X 和 Y 若有相同的势（简称**等势**），就意味着集 X 和集 Y 的元素的个数是“一样多”。

势的大、小就意味着元素个数的“多、少”。

注意，即使 $X \subset Y$ 且 $X \neq Y$，也不一定有 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$.

定理 1.2.2(伯恩斯坦定理) 若 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{X}}$，则 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$.

定义 1.2.8 设 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}, n \in \mathbf{N}$，$X$ 是一个集合。若 $X \sim M_n$，则称 X 是**有限集**，并称 n 为集 X 的**计数**。称不是有限集的集合为**无限集**。

规定 空集为有限集，且其计数为零。

引理 1.2.1 集 M_n 与其任何真子集不对等。

定理 1.2.3 有限集具有唯一的计数。

定理 1.2.4 无限集必与它的一个真子集对等。

推论 1 凡不能与自己的任一真子集对等的集必是有限集。

推论 2 集 X 是有限集的充分必要条件是：X 不能和它的真子集对等；集 X 是无限集的充分必要条件是：X 能和它的某个真子集对等。

定义 1.2.9 凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集称为**可列集**（或**可数（无限）集**）。可列集的势记为 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”）。

注 可列集是最“小”的无限集，即任何无限集必含有一个可列子集。

定理 1.2.5 可列集的任何子集不是有限集就是可列集。

定理 1.2.6 有限个或可列个有限集或可列集的并是有限集或可列集。

定理 1.2.7 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是有限集或可列集，则

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, i=1,2,\cdots,n\}$$