

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册·数学二)

主编: 张宇

副主编: 高昆轮

AUTHENTIC
EXAMINATION
PAPERS
WITH ANSWERS
□ Mr. Zhang

2017



图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学二 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2016. 4

ISBN 978—7—5682—2184—9

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 078121 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / [http://www. bitpress. com. cn](http://www.bitpress.com.cn)

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市文阁印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 7.5

字 数 / 187 千字

版 次 / 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 60.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 边心超

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \ln(1+ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' =$ _____, $y'' =$ _____.

(2) 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是 _____; 法线方程是 _____.

(3) 积分中值定理的条件是 _____, 结论是 _____.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n =$ _____.

(5) $\int f'(x) dx =$ _____;

$\int_a^b f'(2x) dx =$ _____.

二、(本题满分 6 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

三、(本题满分 7 分)

设

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$$

求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

四、(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

五、(本题满分 8 分)

设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形, 求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

六、证明题(本题满分 10 分)

(1) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$, 则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、(本题满分 10 分)

计算不定积分

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

其中 a, b 是不全为 0 的非负数.

八、(本题满分 10 分)

(1) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的特解.

(2) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

九、选择题(本题共 4 小题,每小题 4 分,满分 16 分)

(1) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是

- (A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

(2) 函数 $f(x) = x \sin x$

- (A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大. (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.
(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界. (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于

- (A) $f'(a)$. (B) $2f'(a)$. (C) 0. (D) $f'(2a)$.

(4) 设 $I = t \int_0^t f(tx) dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $s > 0, t > 0$, 则 I 的值

- (A) 依赖于 s, t . (B) 依赖于 s, t, x .
(C) 依赖于 t, x , 不依赖于 s . (D) 依赖于 s , 不依赖于 t .

十、(本题满分 10 分)

在第一象限内求曲线

$$y = -x^2 + 1$$

上的一点, 使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小, 并求此最小面积.

答案速查

一、填空题

(1) $\frac{a}{1+ax}; -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$. (2) $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1); y - \frac{\pi}{4} = -2(x-1)$.

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; 在 $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$.

(4) e^{-3} . (5) $f(x) + C; \frac{1}{2}[f(2b) - f(2a)]$.

二、 $\frac{1}{2}$. 三、 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{5(1 - \cos t)^2}$.

四、 $\frac{\pi}{8}$. 五、 $\frac{\pi}{2}(8+3\pi)$.

六、略.

七、当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时, $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C$.

当 $a = 0, b \neq 0$ 时, $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{b^2} \tan x + C$.

当 $a \neq 0, b = 0$ 时, $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = -\frac{1}{a^2} \cot x + C$.

八、(1) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$. (2) 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$.

九、选择题

(1)(D). (2)(C). (3)(B). (4)(D).

十、所求点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$, 最小面积为 $\frac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leq 0, \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ _____.

P31, 87 题

(2) 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

P43, 19 题

(3) 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

P108, 77 题

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ _____.

P9, 17 题

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx =$ _____.

P100, 41 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点坐标是

P53, 65 题

(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$.

(B) $(-1, 0)$.

(C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$.

(D) $(1, 0)$.

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有

P90, 2 题

(A) $f(-x) > g(-x)$.

(B) $f'(x) < g'(x)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$.

(3) 若函数 $y = f(x)$, 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是

P38, 2 题

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(4) 由曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

P116, 105 题

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}\pi$.

(C) $\frac{2}{3}\pi^2$.

(D) $\frac{2}{3}\pi$.

(5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充分必要条件是

P209, 1 题

(A) 有一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

P5, 3 题

(2) 已知 $y = 1 + xe^y$, 求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$.

P45, 29 题

(3) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解(一般解).

P161, 2 题

四、(本题满分 12 分)

作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表.

P67, 120 题

单调增加区间		凹(U)区间	
单调减少区间		凸(∩)区间	
极值点		拐点	
极 值		渐近线	

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各长为多少时, 正方形与圆形的面积之和为最小.

P58, 87 题

六、(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x,$$

且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

P177, 56 题

七、(本题满分 7 分)

设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$.

P109, 78 题

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 且

$$m \leq f(x) \leq M.$$

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$;

(2) 证明 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m (a > 0)$.

P130, 142 题

答案速查

一、填空题

(1) 1. (2) $(1+2t)e^{2t}$. (3) $\frac{1}{12}$. (4) 1. (5) $2(e^2+1)$.

二、选择题

(1) (A). (2) (C). (3) (B). (4) (B). (5) (D).

三、(1) $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0$. (2) $y'|_{x=0} = 1, y''|_{x=0} = 2$. (3) $y = \frac{1}{x}(\arctan x + C)$.

四、

单调增加区间	$(-\infty, 1)$
单调减少区间	$(1, +\infty)$
极值点	1
极 值	2
凹区间	$(-\infty, 0)$ 及 $(2, +\infty)$
凸区间	$(0, 2)$
拐点	$(0, \frac{3}{2})$ 及 $(2, \frac{3}{2})$
渐近线	$y=0$

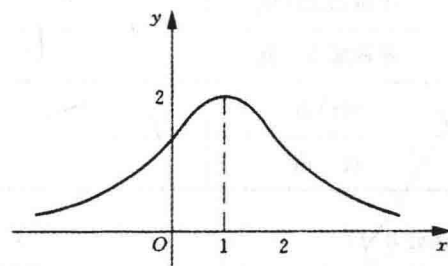


图 1

五、两段铁丝各长为 $\frac{4a}{4+\pi}$ 和 $\frac{\pi a}{4+\pi}$. 六、 $y = (1-2x)e^x$.

七、当 $-1 \leq x < 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{2}(1+x)^2$. 当 $x \geq 0$ 时, 原式 $= 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$. 八、(1) $f'(0)$. (2) 略.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名 _____ 分数 _____

(试卷 III)

一、填空题(本题共 7 小题,每小题 3 分,满分 21 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x =$ _____ .

P9, 18 题

(2) $\int_0^{\pi} t \sin t dt =$ _____ .

P100, 42 题

(3) 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2) dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程是 _____ .

P53, 66 题

(4) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)$, 则 $f'(0) =$ _____ .

P38, 3 题

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____ .

P90, 3 题

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} a+bx^2, & x \leq 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是 _____ .

P31, 87 题

(7) 设 $\tan y = x+y$, 则 $dy =$ _____ .

P45, 30 题

二、(本题共 5 小题,每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 已知 $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 y' .

P43, 20 题

(2) 求 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

P94, 15 题

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

P9, 19 题

(4) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

P48, 46 题

(5) 已知 $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

P100, 43 题

三、选择题(本题共 6 小题,每小题 3 分,满分 18 分)

(1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

P68, 121 题

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.

(2) 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$

P78, 154 题

(A) 无实根.

(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.

(D) 有五个不同实根.

(3) 曲线 $y = \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 与 x 轴所围成的图形, 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

P117, 106 题

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) π .

(C) $\frac{\pi^2}{2}$.

(D) π^2 .

(4) 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值, 则函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处

P58, 88 题

(A) 必取极大值.

(B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值.

(D) 是否取极值不能确定.

(5) 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数)

P167, 26 题

(A) $ae^x + b$.

(B) $axe^x + b$.

(C) $ae^x + bx$.

(D) $axe^x + bx$.

(6) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个领域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

P38, 4 题

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h[f(a + \frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程

$$xy' + (1-x)y = e^{2x} \quad (0 < x < +\infty)$$

满足 $y(1) = 0$ 的特解.

P161, 3 题

五、(本题满分 7 分)

设

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt,$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$.

P174, 51 题

六、(本题满分 7 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

P79, 155 题

七、(本题满分 11 分)

对函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

P68, 122 题

单调减区间	
单调增区间	
极 值 点	
极 值	

续表

凹区间	
凸区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$.

试确定 a, b, c 的值, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

P117, 107 题

答案速查

一、填空题

(1) $\frac{1}{2}$. (2) π . (3) $y = 2x$. (4) $n!$. (5) $x - 1$. (6) $a = b$. (7) $\cot^2 y dx$.

二、

(1) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1-e^{-2\sqrt{x}})}$. (2) $-\frac{1}{\ln x} + C$. (3) e^2 . (4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$. (5) 0.

三、选择题

(1) (A). (2) (B). (3) (C). (4) (D). (5) (B). (6) (D).

四、 $y = \frac{e^x}{x} (e^x - e)$.

五、 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$.

六、略.

七、

单调减少区间	$(-\infty, -2), (0, +\infty)$	凹区间	$(-3, 0), (0, +\infty)$
单调增加区间	$(-2, 0)$	凸区间	$(-\infty, -3)$
极值点	-2	拐点	$(-3, -\frac{2}{9})$
极值	$-\frac{1}{4}$	渐近线	$x = 0$ 和 $y = 0$

八、 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 0$.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 处的法线方程是_____.

P54,73 题

(2) 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

P43,21 题

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx =$ _____.

P101,44 题

(4) 下列两个积分的大小关系是: $\int_{-2}^{-1} e^{-x} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^x dx$.

P91,4 题

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

P5,4 题

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则

P17,49 题

(A) $a=1, b=1$.

(B) $a=-1, b=1$.

(C) $a=1, b=-1$.

(D) $a=-1, b=-1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于

P94,16 题

(A) $f(x)$.

(B) $f(x)dx$.

(C) $f(x)+C$.

(D) $f'(x)dx$.

(3) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

P59,89 题

(A) 不可导.

(B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

(4) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f'(0) \neq 0, f(0) = 0$, 则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

P32,88 题

(A) 连续点.

(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.

(D) 连续点或间断点不能由此确定.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

P17,50 题

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy .

P45,31 题

(3) 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x>0)$ 的拐点.

P64,109 题

(4) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

P94,17 题

(5) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y \Big|_{x=e} = 1$ 的特解.

P161,4 题

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线, 椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中 $a>0, b>0$).

P59,90 题

五、(本题满分 9 分)

证明: 当 $x>0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

P73,139 题

六、(本题满分 10 分)

设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x>0$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

P109,79 题

七、(本题满分 10 分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

P117,108 题

八、(本题满分 10 分)

求微分方程

$$y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$$

的通解, 其中 a 为实数.

P168,30 题

答案速查

一、填空题

$$(1) y = \sqrt{3}x - 1. \quad (2) -\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \left(\sec^2 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right).$$

$$(3) \frac{4}{15}. \quad (4) >. \quad (5) 1.$$

二、选择题

$$(1) (C). \quad (2) (B). \quad (3) (D). \quad (4) (B).$$

三、

$$(1) a = \ln 3. \quad (2) dy = \frac{x}{2x-y} dx. \quad (3) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4} \right). \quad (4) \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C.$$

$$(5) y = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$\text{四、} P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right).$$

五、略.

$$\text{六、} \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

$$\text{七、} \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{八、} y = \begin{cases} (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}, & a \neq -2, \\ (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2) e^{-2x}, & a = -2. \end{cases}$$

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \ln(1+3^{-x})$, 则 $dy =$ _____.

(2) 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的凸区间是 _____.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx =$ _____.

(4) 质点以速度 $t \sin t^2$ 米/秒作直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 _____ 米.

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + x^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则

(A) $a = 0, b = -2$.

(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.

(D) $a = -1, b = -1$.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 则

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.

(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.

(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1), (-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

P149, 1 题

P44, 22 题

P64, 110 题

P103, 58 题

P127, 135 题

P9, 20 题

P53, 67 题

P109, 80 题

P59, 91 题

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$.

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$.

(D) 0.

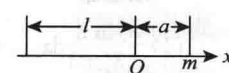
(5) 如图, x 轴上的一线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a , 已知引力系数为 k , 则质点和细杆之间引力的大小为

(A) $\int_{-l}^0 \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$.

(B) $\int_0^l \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$.

(C) $2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{k\mu dx}{(a+x)^2}$.

(D) $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{k\mu dx}{(a+x)^2}$.



P127, 136 题

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P48, 47 题

(2) 计算 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

P101, 45 题

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

P10, 21 题

(4) 求 $\int x \sin^2 x dx$.

P94, 18 题

(5) 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

P161, 5 题

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

P73, 140 题

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

P168, 31 题

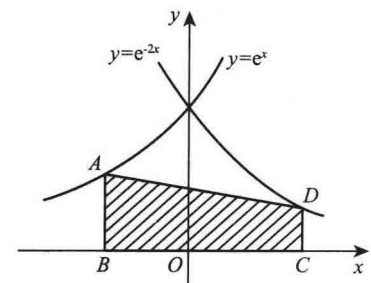
六、(本题满分 9 分)

曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

P117, 109 题

七、(本题满分 9 分)

如图, A, D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2 : 1, |AB| < 1$. 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



P59, 92 题

八、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足

$$f(x) = f(x-\pi) + \sin x,$$

且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$, 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

P101, 46 题

答案速查

一、填空题

(1) $-\frac{\ln 3}{3^x+1}dx$. (2) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. (3) 1. (4) $\frac{1}{2}$. (5) -1.

二、选择题

(1)(D). (2)(B). (3)(B). (4)(A). (5)(A).

三、

(1) $\frac{2+t^2}{(\cos t - t \sin t)^3}$. (2) $2 \ln \frac{4}{3}$. (3) $\frac{1}{6}$. (4) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$. (5) $y = \frac{x-1}{x}e^x + \frac{1}{x}$.

四、略.

五、 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}x \sin x$.

六、 $\frac{1}{2}\pi$.

七、点 B 和 C 的横坐标分别为 $\frac{1}{3} \ln 2 - 1$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln 2$.

八、 $\pi^2 - 2$.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x=f(t)-\pi, \\ y=f(e^t-1), \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____.

(2) 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为_____.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x - \cos x} =$ _____.

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} =$ _____.

(5) 由曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成图形的面积 $S=$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的

(A) 低阶无穷小.

(C) 等价无穷小.

(B) 高阶无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2+x, & x > 0, \end{cases}$ 则

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2+x), & x > 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2-x, & x > 0. \end{cases}$

(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2+x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2-x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

(3) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(C) 为 ∞ .

(B) 等于 0.

(D) 不存在但不为 ∞ .

(4) 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x f(t^2)dt$, 则 $F'(x)$ 等于

(A) $f(x^4)$.

(C) $2xf(x^4)$.

(B) $x^2 f(x^4)$.

(D) $2xf(x^2)$.

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为

(A) $1 + \sin x$.

(C) $1 + \cos x$.

(B) $1 - \sin x$.

(D) $1 - \cos x$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

P48,48 题

P60,93 题

P10,22 题

P104,59 题

P115,96 题

P24,67 题

P5,5 题

P8,14 题

P109,81 题

P94,19 题

P10,23 题

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 的值.

(3) 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

(4) 求 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx$.

(5) 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

七、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成图形面积最小.

八、(本题满分 9 分)

设 $f''(x) < 0, f(0)=0$, 证明对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

P45,32 题

P94,20 题

P101,47 题

P161,6 题

P101,48 题

P169,32 题

P121,119 题

P60,94 题

P73,141 题

答案速查

一、填空题

(1) 3. (2) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. (3) 0. (4) $\frac{1}{2} \ln 2$ (5) $\frac{1}{2} e^{-1}$.

二、选择题

(1) (B). (2) (D). (3) (D). (4) (C). (5) (B).

三、

(1) $e^{-\frac{3}{2}}$. (2) $2e^2$. (3) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C$. (4) $4(\sqrt{2}-1)$. (5) $y = C\sqrt{x} - \frac{1}{5}x^3$.

四、 $\frac{7}{3} - \frac{1}{e}$.

五、 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$.

六、 $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

七、 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

八、略.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.
- 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.
- 设 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0)$, 则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是_____.
- $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx =$ _____.
- 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1+x^2)$, 则 $f(x) =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时,变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是
(A) 无穷小. (B) 无穷大.
(C) 有界的,但不是无穷小的. (D) 无界的,但不是无穷大.
- 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-1|}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$
(A) 不连续. (B) 连续,但不可导.
(C) 可导,但导数不连续. (D) 可导,且导数连续.
- 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 则 $F(x)$ 为
(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
- 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为
(A) 3. (B) 2.
(C) 1. (D) 0.
- 若 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内

- (A) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$. (B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.
(C) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$. (D) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

- 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.
- 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$.
- 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.
- 求微分方程 $(x^2-1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初值条件 $y(0)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$$

的一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$. 试确定常数 α, β, γ , 并求该方程的通解.

五、(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小, 并求出该最小值.

七、(本题满分 9 分)

设 $x > 0$, 常数 $a > e$. 证明: $(a+x)^a < a^{a+x}$.

八、(本题满分 9 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $f(0)=0$, 证明:

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$.

P10, 24 题

P45, 32 题

P60, 95 题

P95, 21 题

P95, 22 题

P5, 6 题

P32, 89 题

P109, 82 题

P79, 156 题

P64, 111 题

P44, 23 题

P10, 25 题

P101, 49 题

P104, 60 题

P161, 7 题

P169, 33 题

P118, 110 题

P60, 96 题

P74, 142 题

P131, 143 题

答案速查

一、填空题

(1) 0. (2) $\frac{y^2 - 2x \cos(x^2 + y^2) - e^x}{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}$. (3) $(0, \frac{1}{4})$. (4) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

(5) $\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

二、选择题

(1) (D). (2) (A). (3) (D). (4) (B). (5) (C).

三、

(1) $2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)] - [f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$.

(2) -50. (3) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$. (4) $\frac{1}{2}$. (5) $y = \frac{\sin x - 1}{x^2 - 1}$.

四、 $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -1$. 通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x$.

五、 $\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}$.

六当 $h = 4r$ 时, V 取最小值, $V(4r) = \frac{8\pi r^3}{3}$.

七、略.

八、略.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷Ⅲ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2x} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.

P32, 90 题

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

P48, 49 题

(3) $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\cos 3x} f(t) dt \right) =$ _____.

P110, 83 题

(4) $\int x^3 e^x dx =$ _____.

P95, 23 题

(5) 微分方程 $y dx + (x^2 - 4x) dy = 0$ 的通解为 _____.

P162, 8 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

P17, 51 题

(A) $a=1, b=-\frac{5}{2}$.

(B) $a=0, b=-2$.

(C) $a=0, b=-\frac{5}{2}$.

(D) $a=1, b=-2$.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的

P39, 5 题

(A) 左、右导数都存在.

(B) 左导数存在, 但右导数不存在.

(C) 左导数不存在, 但右导数存在.

(D) 左、右导数都不存在.

(3) 设 $y = f(x)$ 是满足微分方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在

P61, 97 题

(A) x_0 某邻域内单调增加.

(B) x_0 某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.

(D) x_0 处取得极大值.

(4) 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

P68, 123 题

(A) 1 条.

(B) 2 条.

(C) 3 条.

(D) 4 条.

(5) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有

P91, 5 题

(A) $N < P < M$.

(B) $M < P < N$.

(C) $N < M < P$.

(D) $P < M < N$.

三、(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 具有二阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P45, 34 题

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$.

P102, 50 题

(3) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$.

P10, 26 题

(4) 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$.

P95, 24 题

(5) 如图, 设曲线方程为 $y = x^2 + \frac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 D , 曲边梯形 $OABC$ 的面积

为 D_1 , 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, $a > 0$, 证明: $\frac{D}{D_1} < \frac{3}{2}$.

P115, 97 题

四、(本题满分 9 分)

设当 $x > 0$ 时, 方程

$$kx + \frac{1}{x^2} = 1$$

有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

P79, 157 题

五、(本题满分 9 分)

设 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求

(1) 函数的增减区间及极值;

(2) 函数图像的凹凸区间及拐点;

(3) 渐近线;

(4) 作出其图形.

P68, 124 题

六、(本题满分 9 分)

求微分方程

$$y'' + a^2 y = \sin x$$

的通解, 其中常数 $a > 0$.

P169, 34 题

七、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明: 当 $0 < \lambda < 1$ 时, $\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$.

P131, 144 题

八、(本题满分 9 分)

求曲线

$$y = 3 - |x^2 - 1|$$

与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

P118, 111 题

