刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathemetics by Y.P.Liu

第十二编

时代文化出版社

刘彦佩
半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathematics by Y.P.Liu

第十二编

时代文化出版社

半闲数学集锦（第十二编）

作　　者：刘彦佩
出版单位：时代文化出版社
地　　址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司
地　　址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼
电　　话：010-68920114　13693651386
网　　址：www.grcsw.com

印　　刷：京冀印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
版　　次：2016年9月第1版

书　　号：ISBN 978-988-18455-0-4
定　　价：全套 1890.00元（共22编）

第十二编序

本编分三个部分. 第一部分由文 12.01[078]—12.24[176] 组成, 反映在地图的各类计数, 对已有结果的简化, 以及渐近行为; 考虑到地图上的多项式, 特别是色多项式, 及以点剖分向量, 或面剖分向量为参量的一些新计数等. 第二部分和第三部分, 分别为专著[336] *Introduction to Combinatorial Maps*(12.25—12.38) 和专著[292] 组合地图进阶(12.39—12.62).

在各种地图同构分类的计数, 包括色和, 范色和, 以及梵和中, 对于基础理论的研究, 拟分三个重要阶段.

第一阶段是在 Tutte 平面根三角剖分的计数的过程中, 解二次函数方程重根法基础上, 发现非二次函数方程, 通过特征曲线法(重根法, 或二次法, 可视为特例)求解. 同时也通过将参数方程, 转化为差分方程和微分方程.

那时, 我心目中, 有两个主要任务.

任务 1. 发现尽可能多的, 具有相当普遍性的地图类, 使得能够通过对于每类地图合适的分解, 可以对于适合的参数, 导出确定任何给定参数下, 这类地图根同构类数的, 计数函数所满足的方程.

这里面, 有两个关键点.

一个是选择适合的计数参数. 因为如果选择不当, 就会导致难以找到合适的分解.

另一个是找到合适的分解. 因为即使找到了一个分解, 如不合适也是枉然. 在这个过程中, 所建立起来的各种类型的, 无限集合的分解理论, 也为下两个阶段, 建立更具普遍性的方程, 奠定了理论根基.

任务 2. 求出这个满足给定方程的, 所需要的解. 这些方程的未定元, 一般总是至少两个变元的函数, 同时还带至少一个由这个未定元决定, 但少一个变元的函数, 我们称侧函数, 由此导致直接求解的困难.

如果能将侧函数首先求出来, 那么原方程就原则上可以直接求解.

为了确定侧函数, 先要选择一个, 或几个参数, 通过特征曲线, 或曲面, 建立一个减少至少一个变元的方程组, 设法用 Lagrange 隐函数定理(或 Lagrange 反演), 求出这些侧函数. 将原方程, 变为通常的多变量的函数方程. 如果方程是二次的, 这样的一类消元法, 就是 Tutte 在研究平面三角化时, 所说的二次法.

这里, 也有两个关键点.

一个是, 如何对方程, 选择参数. 这种参数必将决定, 所得的方程组是否相容, 和求解这个方程组, 是否能回避可能产生的复杂性.

另一个就是, 如何变换这些参数, 使得反演出的结果, 利于进一步地简化到尽量正项和, 甚至单项(即无和)显式.

例如, 文 12.01[078]—12.03[079], 12.05[086]—12.06[087], 12.09[090]—12.10

[091], 12.13[101]—12.15[103], 12.18[115]—12.19[120], 12.21[123]—12.24[176] 都是这一阶段的产物.

下面的两个阶段, 都是讨论, 从无穷计数参数, 所演化来的方程, 称为介子泛函方程, 或者, 简称介子方程.

第二阶段是平面型的介子方程的出现, 用无穷维的矩阵分析和/或 Lagrange 反演, 求解其中的一些方程.

例如, 文 12.04[085], 12.07[088]—12.08[089], 12.11[097]—12.12[098], 12.16[113]—12.17[114], 12.20[122] 等, 反映在这一阶段范围内的工作.

第三阶段是发现曲面型介子方程, 以及通过计数理论, 导出其中一些方程解的显式, 为直接求解提供了明确的目标. 这些都是围绕地图的计数.

联系到有关图在曲面上的专题, 愈来愈意识到, 曲面、嵌入、以及地图和根地图等之间的共性和区别, 需要从理论上, 予以澄清, 在我访问韩国之际, 得以作初步清理. 在那里, 出版了一个讲演札记. 这就是专著[336](12.25—12.38). 实际上, 应该是一个提纲.

回来之后, 经过为研究生开设专业基础课, 充实了理论内容, 特别是增添了三个层次的课外活动. 试图从 100 余道思考题, 进一步澄清基本概念的理论内涵. 从 100 余道练习题, 进一步了解正文中, 所采用的手段的普遍意义. 从 100 余道研究题, 提供有兴趣的读者, 广开思路, 选中方向, 以求得广而深的发展. 这就产生了专著[292](12.39—12.62).

在这本书中, 从理论上, 还要注意, 如下一些创新点.

第一、图的一种新的代数表示. 源自我在上世纪 70 年代末, 为中国科学院研究生院, 开图论课时, 曾提到将图的边视由两个半边组成. 这里, 却通过一个二元群粘贴到一个元素上实现. 注意, “粘贴”与文献中的一个群“作用”到一个集合上不同. “作用”意将一个群变为一个集合上的置换群.

第二、成形了图曲面嵌入的一种联树模型. 源自我在上世纪 70 年代末, 以一类特殊树, 寻求图在曲面上的嵌入的手段. 不过, 这里却是任何支撑树.

第三、启示一个图, 曲面嵌入数, 和由它产生根地图的数目之间, 仅与这个图, 一类自同构群的阶有关.

第四、这类自同构群必须建立在半边集合的基础上.

第五、揭示将一个带对称性的对象, 变换为无对称性, 的一个过程.

刘彦佩
2015 年 7 月
於北京上园村

iv

第十二编目录

关于有根外平面地图的着色计数*

刘 彦 佩
(中国科学院应用数学研究所，北京)

关键词 平面地图、着色、计数

关于着色计数，Tutte 于 1973 年发表第一篇文章[1]，他所研究的是平面上的三角剖分. 十年之后，本文作者研究了一般平面地图[2]. 接着，又研究了平面上的 3-正则地图[3]. 这里所研究的是外平面地图并且求出了着色计数的显式. 而文献[1-3]均未得到这样的显式.

当然，我们也是研究带根的情形. 事实上并不影响问题的一般性. 对于一类地图 $\mathscr{M}$，其着色计数函数为

$$g_{\mathscr{A}}(x, y, z; \lambda) = \sum_{M \in \mathscr{A}} P(M; \lambda) x^{m(M)} y^{s(M)} z^{t(M)}, \tag{1}$$

其中 $P(M; \lambda)$ 为M的色多项式；$m(M)$，$s(M)$ 和 $t(M)$ 分别为M的边数、根面的次和根节点的次. 为方便，常记

$$\begin{cases} g_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} = g_{\mathscr{A}}(x, y, z; \lambda);\ f_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} = g_{\mathscr{A}}(x, 1, z; \lambda); \\ d_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} = g_{\mathscr{A}}(x, y, 1; \lambda);\ h_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} = g_{\mathscr{A}}(x, 1, 1; \lambda). \end{cases} \tag{2}$$

由于环的出现使色多项式变为零，重边不影响色多项式的值. 这里只研究不可分离的简单外平面地图，只有节点而无边的地图不在考虑之列，只有一条非环边的杆地图则在此列. 记 $\mathscr{A}$ 为所有这种外平面地图的集合. 本文之目的在于确定 $g_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}$，$f_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}$，$d_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}$ 和 $h_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}$ 以及对于 $\lambda = 2, 3$ 和∞的情况.

首先，研究 $g_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}$ 所满足的方程. 为此，必需将 $\mathscr{A}$ 分解. 记 F_0，F_1 分别为 $A \in \mathscr{A}$ 的根面和与根边关联的那个非根面. 用 $B(F)$ 表示面F的边界.

引理 1 对于 $A \in \mathscr{A}$，如果A不是杆地图，则在$A - R$中，至少有一个割点. 而且，除R的二端外，所有 $B(F_1)$ 上的节点全是割点.

由此，可将$\mathscr{A}$表示为

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 + \cdots, \tag{3}$$

其中 $\mathscr{A}_0$ 仅由杆地图组成；$\mathscr{A}_i$，$i \geqslant 2$，为 $\mathscr{A}$ 中那些使得$A - R$有 $i - 1$ 个割点的地图A组成.

为方便，还得引进一种运算. 对于二个地图M和N，记 $M * N = M \cup N$ 但满足条件:

(i) $M \cap N = \{v\}$，v即M的根边的非根节点又是N的根节点；

(ii) M和N的根面边界之并为 $M * N$ 的根面的边界；

(iii) $M * N$ 的根边即选为M的根边.

本文 1987 年 12 月 5 日收到.
* 国家自然科学基金资助项目.

可见,这个运算是非交换也是非结合的. 因此,对于二个以上的地图 $M_0, M_1, \cdots, M_k$, 定义

$$\biguplus_{0\leqslant i\leqslant k}^{*} M_i = M_0 * M_1 * \cdots * M_k \tag{4}$$

为先作 $M_{k-1} * M_k$ 再与 M_{k-2} 作此运算直到 M_0. 对于地图的一个集合 $\mathscr{N}$, 记 $|\mathscr{N}|$ 为 $\mathscr{N}$ 的基数. 如果 $\mathscr{N}$ 为有限集,则 $|\mathscr{N}|$ 即 $\mathscr{N}$ 中元素的个数.

引理 2 对于 $k \geqslant 2$, 有

$$|\mathscr{A}_k| = \left|\left\{A \,\middle|\, A = \biguplus_{0\leqslant i\leqslant k-1}^{*} A_i,\ A_i \in \mathscr{A},\ 0 \leqslant i \leqslant k-1\right\}\right|. \tag{5}$$

引理 3 对于 $\mathscr{A}_0$, 有

$$g_{\mathscr{A}_0}^{(\lambda)} = \lambda(\lambda - 1)xy^2z. \tag{6}$$

令 $\mathscr{A}_{(0)} = \mathscr{A} - \mathscr{A}_0 = \sum\limits_{k\geqslant 2} \mathscr{A}_k$. 相应地,令

$$g_{\mathscr{A}_{(0)}}^{(-)} = \sum_{A\in\mathscr{A}_{(0)}} P(A - R;\lambda)\, x^{m(A)} y^{s(A)} z^{t(A)}, \tag{7}$$

$$g_{\mathscr{A}_{(0)}}^{(\cdot)} = \sum_{A\in\mathscr{A}_{(0)}} P(A \cdot R;\lambda)\, x^{m(A)} y^{s(A)} z^{t(A)}. \tag{8}$$

引理 4 对于 $g_{\mathscr{A}_{(0)}}^{(-)}$, 有

$$g_{\mathscr{A}_{(0)}}^{(-)} = xz\left(\frac{d_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} g_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}}{\lambda y - d_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}}\right). \tag{9}$$

为确定 $g_{\mathscr{A}_{(0)}}^{(\cdot)}$, 还需将 $\mathscr{A}_{(0)}$ 分为二部分:

$$\mathscr{A}_{(0)} = \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_{(2)}^{(0)}, \tag{10}$$

其中 $\mathscr{A}_{(2)}^{(0)} = \sum\limits_{k\geqslant 3} A_k$. 至此,还要引进一个运算. 对于二地图 M, N, 记 $M\langle 1\rangle N = M \cup N$ 且满足如下条件:

(i) $M \cap N = \{e\}$, e 即为 M 的根边也为 N 的根边;

(ii) $M\langle 1\rangle N$ 的根面边界为 M 和 N 的根面边界分别去掉根边后的并;

(iii) $M\langle 1\rangle N$ 的根选为 M 的根面边界上与根节点关联的边.

引理 5 令 $\mathscr{A}_2^{(R)} = \{A \cdot R \mid A \in \mathscr{A}_2\}$ 和 $\mathscr{A}^{(1)2} = \{A \mid A = A_1\langle 1\rangle A_2,\ A_1,\ A_2 \in \mathscr{A}\}$. 则有

$$|\mathscr{A}_2^{(R)}| = |\mathscr{A}^{(1)2}|. \tag{11}$$

引理 6 对于 A_2, 有

$$g_{\mathscr{A}_2}^{(\cdot)} = \frac{xz}{\lambda(\lambda - 1)y} d_{\mathscr{A}}^{(\lambda)} g_{\mathscr{A}}^{(\lambda)}. \tag{12}$$

引理 7 令 $\mathscr{A}_{(2)}^{(0)(R)} = \{A \cdot R \mid A \in \mathscr{A}_{(2)}^{(0)}\}$. 有

$$\mathscr{A}_{(2)}^{(0)(R)} = \mathscr{A}. \tag{13}$$

引理 8 对于 $\mathscr{A}_{(2)}^{(0)}$, 有

$$\mathscr{A}_{(2)}^{(0)} = \sum_{A\in\mathscr{A}} \{\delta_1(A), \delta_2(A), \cdots, \delta_{m(A)-1}(A)\}, \tag{14}$$

其中 $\delta_i(A)$, $1 \leqslant i \leqslant m(A) - 1$, 为将 A 的根节点劈分为 v_1, v_2 并连边 $\langle v_1, v_2\rangle$ 作为根边,使得 v_1 与 A 的根节点处依次 i 条边关联所得的地图.

引理 9 对于 $\mathscr{A}^{(0)}_{(2)}$，有

$$g^{(\cdot)}_{\mathscr{A}^{(0)}_{(2)}} = \frac{xyz}{1-z}\left(z\,d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} - g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}\right). \tag{15}$$

基于上述引理和色多项式之性质，有

$$g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} = g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}_0} + g^{(-)}_{\mathscr{A}_{(0)}} - \left(g^{(\cdot)}_{\mathscr{A}_?} + g^{(\cdot)}_{\mathscr{A}^{(0)}_{(2)}}\right). \tag{16}$$

定理 1 $g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 连同 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 满足方程:

$$\left(1 - xz\left[\frac{y}{1-z} - \frac{d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}{\lambda(\lambda-1)y} + \frac{d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}{\lambda y - d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}\right]\right) g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$$
$$= \lambda(\lambda-1)xy^2z - \frac{xyz^2}{1-z}d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}. \tag{17}$$

解方程(17)的困难在于其中 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 也是一个未知函数。因此，必需寻求间接解法。首先，注意到 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 中不含 z 而只是 x, y 的函数。将 z 也视为一个 x, y 的函数 $\xi = \xi(x, y)$. 通过方程

$$\begin{cases} \lambda(\lambda-1)xy^2\xi - \dfrac{xy\xi^2}{1-\xi}d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} = 0; \\ 1 - x\xi\left(\dfrac{y}{1-\xi} - \dfrac{d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}{\lambda(\lambda-1)y} + \dfrac{d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}{\lambda y - d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}}\right) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

称之为(17)式的特征方程，确定出 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 和 x 的以 ξ 为参数的表达式:

$$\begin{cases} d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} = \lambda(\lambda-1)y\dfrac{1-\xi}{\xi}; \\ x = (\xi-1)\left(-y\xi + \dfrac{\lambda-1-\xi}{\lambda-1-\lambda\xi}(1-\xi)^2\right)^{-1}. \end{cases} \tag{19}$$

由(19)式出发使我们能够借助于 Lagrange 反演，首先确定 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 作为 x, y 的级数形式。然后由(17)式确定 $g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 作为 x, y 和 z 的级数形式。由于对 $g^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 的讨论要占过多的篇幅，只好略去。当然，这时只有复杂性而不再有多少难度了。同样地，对于 $f^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$.

定理 2 着色计数函数 $d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 和 $h^{(\lambda)}_{\mathscr{A}}$ 具有如下的形式:

$$d^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} = \lambda(\lambda-1)y\left\{xy + \sum_{m\geq 2}\sum_{s=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{m}\sum_{j=0}^{2s-m-1}(-1)^j \times \frac{(m-1)!}{s!(m-s)!j!}\right.$$
$$\left.\times\frac{(s-2)!}{(2s-m-j-1)!(s-j-2)!}\times A^{m-s}_{m-s}(2s-m-j-1;\lambda)y^s x^m\right\}. \tag{20}$$

$$h^{(\lambda)}_{\mathscr{A}} = \lambda(\lambda-1)\left\{x + \sum_{m\geq 2}\sum_{s=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{m}\sum_{j=0}^{2s-m-1}(-1)^j\times\frac{\lambda(\lambda-1)(m-1)!}{s!(m-s)!(s-j-2)!}\right.$$
$$\left.\times\frac{(s-2)!}{(2s-m-j-1)!}\times A^{m-s}_{m-s}(2s-m-j-1;\lambda)x^m\right\}, \tag{21}$$

其中 $A^k_k(r;\lambda)$ 为如下公式所确定的组合数

$$A^k_k(r;\lambda) = \sum_{j=0}^{r}\lambda^{r-j}(\lambda-2)^{k-j}\frac{r!k!(k+r-j-1)!}{j!(r-j)!(k-j)!(k-1)!}. \tag{22}$$

定理 3 对于 $\lambda = 3$，有

$$d^{(3)}_{\mathscr{A}} = 6y\left\{xy + \sum_{m\geq 2}\sum_{s=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{m}\sum_{j=0}^{2s-m-1}(-1)^j\times\sum_{i=0}^{2s-m-1}\left[(m-1)!(s-2)!2\cdot 3^{2s-m-j-i-1}\right.\right.$$

$$\times(s-j-i-2)!\Big]y^s x^m\Big/\Big[s!(m-s-1)!(s-j-2)!j!i!$$

$$\times(2s-m-j-i-1)!(m-s-i)!\Big]\Big\}. \tag{23}$$

$$h_{\mathscr{A}}^{(3)}=6x+\sum_{m\geqslant 2}\sum_{s=\lceil\frac{m+1}{2}\rceil}^{m}\sum_{j=0}^{2s-m-1}(-1)^j\times\sum_{i=0}^{2s-m-1}\Big[2\cdot 3^{2s-m-j-i}(m-1)!(s-2)!$$

$$\times(s-j-i-2)!\Big]x^m\Big/\Big[s!(m-s-1)!(s-j-2)!j!i!(2s-m-j-i-1)!$$

$$\times(m-s-i)!\Big]. \tag{24}$$

为了得到 $\lambda=2$ 情况下较简单的显式还要研究这时地图的特殊性质．事实上，是对于不**可分**离简单偶地图计数．从而，可得如下定理．

定理 4　2-着色的计数函数 $g_{\mathscr{A}}^{(2)}$，$f_{\mathscr{A}}^{(2)}$，$d_{\mathscr{A}}^{(2)}$ 和 $h_{\mathscr{A}}^{(2)}$ 有如下形式：

$$g_{\mathscr{A}}^{(2)}=2xy^2z+\sum_{m\geqslant 2}\sum_{t=2}^{\lfloor\frac{m+2}{3}\rfloor}\sum_{\substack{s=\lceil\frac{2m+4}{3}\rceil\\ s\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)}}^{m-t+2}\frac{4(t-1)(m-t-1)!}{(m-t-s+2)!(s-2)!}$$

$$\times\binom{\frac{s}{2}-1}{m-s+1}y^s z^t x^m. \tag{25}$$

$$f_{\mathscr{A}}^{(2)}=2xz+\sum_{m\geqslant 2}\sum_{t=2}^{\lfloor\frac{m+2}{3}\rfloor}\Bigg[\sum_{\substack{s=\lceil\frac{2m+4}{3}\rceil\\ s\equiv(\mathrm{mod}\ 2)}}^{m-t+2}\frac{4(t-1)(m-t-1)!}{(m-t-s+2)!(s-2)!}$$

$$\times\binom{\frac{s}{2}-1}{m-s+1}\Bigg]z^t x^m. \tag{26}$$

$$d_{\mathscr{A}}^{(2)}=2xy^2+\sum_{m\geqslant 2}\sum_{\substack{s=\lceil\frac{2m+4}{3}\rceil\\ s\equiv(\mathrm{mod}\ 2)}}^{m}\Bigg[\sum_{t=2}^{m-s+2}\frac{4(t-1)}{(s-2)}\binom{m-t-1}{s-3}$$

$$\times\binom{\frac{s}{2}-1}{m-s+1}\Bigg]y^s x^m. \tag{27}$$

$$h_{\mathscr{A}}^{(2)}=2x+\sum_{m\geqslant 2}x^m\left(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m-1}{3}\rfloor}\frac{2}{m}\binom{m}{i}\binom{\frac{m-i-1}{2}-1}{i-1}\right). \tag{28}$$

对于 $\lambda=\infty$，需引进一个新的常数 $\mu=\lambda^{-1}$．讨论相应色多项式的变换．以及当 $\mu=0$ 时着色函数的值．事实上，这里相当所讨论的地图的计数．

定理 5　当 $\lambda=\infty$ 时，着色计数函数 $g_{\mathscr{A}}^{(\infty)}$，$f_{\mathscr{A}}^{(\infty)}$，$d_{\mathscr{A}}^{(\infty)}$ 和 $h_{\mathscr{A}}^{(\infty)}$ 有如下显式：

$$g_{\mathscr{A}}^{(\infty)}=xy^2z+\sum_{m\geqslant 3}\sum_{t=2}^{\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor}\sum_{s=\lceil\frac{m+3}{2}\rceil}^{m-t+2}\frac{(t-1)(m-t-1)!y^s z^t x^m}{(m-t-s+2)!(2s-m-3)!(m-s+1)!}. \tag{29}$$

$$f_{\mathscr{A}}^{(\infty)} = xz + \sum_{m\geq 3} \sum_{t=2}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \sum_{s=\lceil \frac{m+3}{2} \rceil}^{m-t+2} \frac{(t-1)(m-t-1)!\, z^t x^m}{(m-t-s+2)!(2s-m-3)!(m-s+1)!}. \tag{30}$$

$$d_{\mathscr{A}}^{(\infty)} = xy^2 + \sum_{m\geq 3} \sum_{s=\lceil \frac{m+3}{2} \rceil}^{m+1} \frac{(m-1)!(s-3)!\, y^s x^m}{(s-1)!(2s-m-3)!(m-s-1)!(m-s)!}. \tag{31}$$

$$h_{\mathscr{A}}^{(\infty)} = x + \sum_{m\geq 3} x^m \left[\sum_{s=\lceil \frac{m+3}{2} \rceil}^{m+1} \frac{(m-1)!(s-3)!}{(s-1)!(2s-m-3)!(m-s-1)!(m-s)!} \right]. \tag{32}$$

参　考　文　献

[1] Tutte, W. T., *Canad. J. Math.*, 25(1973), 657—671.

[2] Liu Yanpei, *Congressus Numeramium*, 45(1984), 275—280.

[3] Liu Yanpei, a)科学通报, 31 (1986), 1285—1289; Kexue Tongbao (Eng. Ed.), 32(1987), 1230—1235; b) *Acta Math. Appl. Sinica* (Eng. Series), 3(1987), 136—167; c) *Acta Math. Appl. Sinica* (Eng. Series), 4(1988), 95—96.

Vol. 4 No. 1 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Feb., 1988

CORRECTION TO "CHROMATIC SUM EQUATIONS FOR ROOTFD CUBIC PLANAR MAPS"*

LIU YANPEI (刘彦佩)
(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

Mistakes in the paper "Chromatic sum equations for rooted cubic planar maps" have been corrected

In Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English series) Vol. 3(1987), pp, 136—167. the author published the paper[1] titled "Chromtic sum equations for rooted cubic planar maps" in which several mistakes appeared. Now, the correction has been made.

1. On page 153 of the paper, Eqs. (10.6), (10.8) should be

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(2)}_{(\cdot,\cdot)}=\mathcal{M}-\mathcal{M}_{(\cdot,\cdot,2)}+\mathcal{M}①\mathcal{M};$$
$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(4)}_{(\cdot,\cdot)}=\mathcal{M}-\mathcal{M}_{(\cdot,\cdot,2)}+\mathcal{M}①\mathcal{M}$$

instead of

$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(2)}_{(\cdot,\cdot)}=\mathcal{M}-\mathcal{M}_{(\cdot,\cdot,2)};$$
$$\underset{\sim}{\mathcal{M}}^{(4)}_{(\cdot,\cdot)}=\mathcal{M}-\mathcal{M}_{(\cdot,\cdot,2)}$$

respectively because in the both cases, $\{\beta, \gamma\}$ being a splitting pair has to be considered.

2. On page 154, Eqs. (11.4) and (11.6) should be

$$g^{[2]}_{(\cdot,\cdot)}=x^2y^2(g-g^{(2)}z^2)+\frac{x^2y^2}{\lambda}\,g_{y=1}g;$$
$$g^{[4]}_{(\cdot,\cdot)}=x^2y^2(g_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2)+\frac{x^2y^2}{\lambda}\,g^2_{y=1}$$

instead of

$$g^{[2]}_{(\cdot,\cdot)}=x^2y^2(g-g^{(2)}z^2);$$
$$g^{[4]}_{(\cdot,\cdot)}=x^2y^2(g_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2)$$

respectively in accordance with 1.

3. On page 155, in Theorem 11.7, $(g_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2)$ and $\left(2+\frac{x}{\lambda}g^{(3)}\right)$ should be replaced by $\left(g_{y=1}+\frac{1}{\lambda}g^2_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2\right)$ and $\left(2+\frac{1}{\lambda}g_{y=1}+\frac{x}{\lambda}g^{(3)}\right)$ respectively.

4. On page 164, in Lemma 15.6, and in Theorem 15.7, $\left(g^{(4)}+\frac{1}{\lambda}(g^{(2)}_{y=1})^2\right)$ should be replaced by $\left(g^{(4)}_{y=1}+\frac{1}{\lambda}(g^{(2)}_{y=1})^2\right)$.

* supported by the National Natural Science Foundation of China.

5. On page 164, in Theorem 16.1, $(g_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2)$ and $[xyz+2x^2y^2+\cdots]$ should be replaced by $\left(g_{y=1}+\frac{1}{\lambda}g^2_{y=1}-g^{(2)}_{y=1}z^2\right)$ and $\left[xyz+\left(2+\frac{1}{\lambda}g_{y=1}\right)x^2y^2+\cdots\right]$ respectively.

6. On page 165, in Corollary 16.2, the whole parentheses $\left(g^{(3)}+\frac{1}{\lambda}g^{(2)}_{y=1}g^{(2)}\right)$ should be replaced by $g^{(3)}$.

7. On the first line of page 166, $(h_1-\delta)$ should be replaced by $\left(h_1+\frac{1}{\lambda}h_1^2-\delta\right)$. And, on the second of the same page, $\left[xy+2x^2y^2+\cdots+x^2y\left(1+\frac{1}{\lambda}h_1\right)(\cdots)\cdots\right]$ replaced by $\left[xy+\left(2+\frac{1}{\lambda}h_1\right)x^2y^2+\cdots+x^2y\left(1+\frac{1}{\lambda}h_1\right)^2(\cdots)\cdots\right]$.

8. On page 166, in Eq. (16.9), in the first term on the right hand side of the equal sign, $\left(\mathscr{T}+\frac{1}{\lambda}\delta\mathscr{S}\right)$ should be replaced by $\mathscr{T}$.

9. Finally, the author would like to mention that the subject was supported by the National Natural Science Foundation of China.

Reference

[1] Liu Yanpei, Chromatic sum equations for rooted cubic planar maps, *Acta Math. Appl. Sinica* (English Series), **3** (1987), 136—167.

第2卷 第1期 1988年4月 | 应用数学与计算数学学报 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. | Vol.2 No.1 April 1988

有根不可分离平面地图的色和方程

刘 彦 佩
(中国科学院应用数学研究所)

Chromatic Sum Equations for Rooted Nonseparable Planar Maps

Liu Yan-pei
(Institute of Applied Mathematics, Academic Sinica)

Abstract

The theory of chromatic sums for rooted planar triangulations has been founded by W. T. Tutte in a series of papers of his own [2~5].

This paper herein generalizes it to a kind of general rooted planar maps. A functional equation of chromatic sums of rooted nonseparable planar maps is found. And, the theory of chromatic sums for triangulations mentioned above and the theory of enumerating rooted nonseparable planar maps may be treated as special cases.

In adition, the derivatives of chromatic sums at $\lambda=1$, for determining the sums of the number of spanning trees with certain properties over all the maps considered are expressed as a recursive formula seen as the Yang-Pascal triangle extended to the 3-dementional case.

§1. 引 言

本文沿用 [2] 中的术语. 全文只研究有限不可分离平面地图. 令 M 是一个地图, $\mathscr{M}$ 为我们所讨论的全部地图的集合. 且,

$$R=\{(p,q,r,s)\mid p\geqslant 1, q\geqslant 0, r\geqslant 2, s\geqslant 1, p,q,r,s\in Z^{+}\},$$

Z^{+} 为所有正整数的集合. 由此, $\mathscr{M}$ 可剖分如

$$\mathscr{M}=\sum_{(p,q,r,s)\in R}\mathscr{M}_{p,q,r,s}=\sum_{p\geqslant 1}\mathscr{M}_{p,\cdot,\cdot,\cdot}=\cdots, \tag{1.1}$$

本文 1986 年 11 月 18 日收到.

其中 $\mathscr{M}_{p,q,r,s}=\{M\in\mathscr{M}\mid p(M)=p,\ q(M)=q,r(M)=r,s(M)=s\}$, $p(M)$, $q(M)$, $r(M)$, 和 $s(M)$ 分别为 M 中的非根节点数目,非根面的数目,根面的次(度)和根节点的次(度).

$$\mathscr{M}_{p,\cdot,\cdot,\cdot}=\sum_{q\geq 0}\sum_{r\geq 2}\sum_{s\geq 1}\mathscr{M}_{p,q,r,s}. \tag{1.2}$$

同样地,可知 $\mathscr{M}_{\cdot,q,\cdot,\cdot}$,…,$\mathscr{M}_{\cdot,q,r,\cdot}$,…,$\mathscr{M}_{\cdot,q,r,s}$ 等的含义.

现在,我们引进一个函数,

$$G_{p,q,r,s}(\lambda)=\sum_{M\in\mathscr{M}_{p,q,r,s}}P(M;\lambda) \tag{1.3}$$

称为色和,其中 $P(M;\lambda)$ 为 M 的色多项式.进而,

$$\begin{aligned} g(x,y,z,t;\lambda)&=\sum_{M\in\mathscr{M}_{p,q,r,s}}P(M;\lambda)x^{p(M)}y^{q(M)}z^{r(M)}t^{s(M)} \\ &=\sum_{(p,q,r,s)\in R}G_{p,q,r,s}(\lambda)x^p y^q z^r t^s. \end{aligned} \tag{1.4}$$

称为色和函数. 本文就是讨论它所满足的方程.

由色多项式的理论,下面两个熟知的公式是要用到的. 一个是:对于任何的地图 M, A 为它的一条边,总有

$$P(M;\lambda)=P(M-A;\lambda)-P(M\cdot A;\lambda), \tag{1.5}$$

其中 $M-A$, $M\cdot A$ 分别为从 M 中去掉边 A, 以及将 A 去掉后再将 A 之两端合而为一个节点所得到的地图. 另一个公式是:对于 M, 若其形如 $M=\bigcup_{i=1}^{k}M_i$ 使得所有 M_i 之间的公共节点全是 M 的分离节点(切割点),则

$$P(M;\lambda)=\lambda^{-k}\prod_{i=0}^{k}P(M_i;\lambda). \tag{1.6}$$

§2. 一般函数方程

令 $M\in\mathscr{M}$, 即 M 为有根不可分离平面地图. 它与[1]所述的稍有不同. 这里环地图(即仅由一环构成的地图)不在考虑之列.因为有环地图的色多项式皆为0.然而仅由一条非环的边构成的地图却计在内.

又令 $\mathscr{M}^*$ 表示从 $\mathscr{M}$ 中去掉只有一条边的地图所得的集合. 则对任一 $M\in\mathscr{M}^*$ 总有如下的分解

$$M=A\cup(M-A)=A\cup\bigcup_{i=0}^{k}M_i,\quad k\geqslant 0, \tag{2.1}$$

$M_i\in\mathscr{M}$, $i=0,1,\cdots,k$, 且满足: M 的根节点在 M_0 中,根边的非根端在 M_k 中, M_i 与 M_{i+1}, $i=0,1,\cdots,k-1$, 有且仅有一个公共节点,同时, M_i 与 M_j, $j\neq i+1,i-1(\bmod k)$, 无任何公共节点. 在(2.1)中的 A 为根边本身所构成的地图. 有时,也用 L 表示仅由一边构成的地图. 根面选择为无限面,记为 f_0, 与 A 关联. 与根边 A 关联的另一面记为 f_1.

用 p_i,q_i,r_i 和 s_i 分别表示 M_i 的 p, q, r 和 s. l_i 为 M_i 与 f_0 面边界公共部分中边的数目. 则有如下的分解引理.

引理 2.1　对任 $M\in\mathscr{M}^*$, 有且仅有一个 $k\geqslant 0$, 使得 M 有如(2.1)之分解且满足如下条件: