考研金榜题名名师辅导教材系列

金榜考研命题研究中心 编

概率论与数理统计8讲

让数学成绩提高成为大概率事件

- 名师推荐考研复习备考专用教材
- 详解考试重点难点浓缩知识精华
- 典型习题巩固重要知识全面指导

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

概率论与数理统计8讲

金榜考研命题研究中心◎编

本书专属：

Where there is a will, there is a way.

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

内容简介

《概率论与数理统计 8 讲》是为参加全国硕士研究生入学考试的广大考生而编写的概率论与数理统计学科辅导用书。本书由编者多年来在考研辅导班上的基础课讲稿改写而成。全书内容共八讲，每讲均由考试内容要点精讲、典型例题及练习题三部分组成。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 8 讲 / 金榜考研命题研究中心 编
—北京：机械工业出版社，2016.8
考研金榜题名名师辅导教材系列
ISBN 978－7－111－54462－3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①金… Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 179498 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号邮政编码 100037)
策划编辑：丁诚　责任校对：丁诚
责任编辑：丁诚
责任印制：李飞
北京铭成印刷有限公司印刷
2017 年 3 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm×260mm · 9.25 印张 · 220 千字
0001－3000册
标准书号：ISBN 978－7－111－54462－3
定价：29.00 元
凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：(010)88361066
读者购书热线：(010)68326294
(010)88379203

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.gdden-book.com

前　言

概率论与数理统计是理工科院校的一门重要基础学科，由概率论和数理统计两部分组成。概率论部分侧重理论知识，介绍基本概念，建立一系列定理和公式，其中包括随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等。数理统计部分是以概率论为基础，对试验结果进行分析，做出合理的估计和判断，主要包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

研究生入学统一考试的数学试卷中概率论与数理统计部分平均得分较低，得分率与难度不成比例，得分“方差”较大，这样的结果，有多方面原因。我们认为主要是：

(1)概率论与数理统计是高等数学的后续课程，很多地方需要用到高等数学的知识，部分考生前面的课程没学好，后面进一步学习就会有困难。

(2)有些考生之前没学过，因为考研才学的，所以基础比较薄弱，甚至有部分考生一开始的复习策略就是放弃这部分。其实，这部分的分数是很容易拿到的。对比分析近几年的数学试题，概率论与数理统计部分的题目相对比较稳定，解题方法也比较固定，考生掌握起来比较容易。

《概率论与数理统计 8 讲》是为参加全国硕士研究生入学考试的广大考生而编写的概率论与数理统计学科辅导用书。本书由编者多年来在考研辅导班上的基础课讲稿改写而成。全书内容共八讲，每讲均由**考试内容要点精讲**、**典型例题及练习题**三部分组成。

考生在学习本书的内容时，学完每一讲后要及时总结知识体系，这样不仅可以加深对知识的理解，还会对进一步学习有所帮助。本书中例题的选取努力做到既要具有典型性，又要有助于理解概念和掌握定理，便于广大考生从中归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型；同时还要有指导性，依据命题的指导思想，发现命题趋势，指导复习方向。考生在做练习题时要归纳方法举一反三，总结错误查漏补缺。只有这样，才能将本书的效用发挥到最大，才会有所收获。

为了考生使用方便，本书对数学一、三不要求的内容都有所说明。希望本书能对考生有较大帮助。在编写、编辑和出版本书的过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的态度，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽如人意之处，敬请广大读者和同行批评指正。

编者

目 录

第 1 讲　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其运算

一、随机现象

1. 定义

在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象称为随机现象.

2. 特点

结果不止一个，而且出现哪一个结果事先不知道.

3. 随机试验

对在相同条件下可以重复的随机现象的大量重复观察称为随机试验，它具有以下特征：重复性、明确性、随机性. 我们就是通过随机试验来研究随机现象的.

二、样本空间

1. 样本点与样本空间的定义

随机试验的每一可能结果称为样本点，记作 ω. 由所有样本点的全体组成的集合称为样本空间，记作 Ω. 显然，样本点是组成样本空间的元素，于是有 $\omega \in \Omega$.

2. 离散样本空间和连续样本空间

样本空间分类：有限和无限；无限又可以分为可列与不可列. 有限与可列分为一类，称为离散样本空间；无限与不可列属于另一类，称为连续样本空间.

三、随机事件

定义：样本空间的子集称为**随机事件**，简称**事件**，常用字母 A,B,C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成的，由一个样本点组成的子集是最简单事件，称为**基本事件**. 既然随机事件是由样本点组成的，那么也可以将随机事件看成是由基本事件组成的.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现，就称该基本事件出现或发生. 如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生，也称事件 A 出现或发生.

如果把 Ω 看成一事件，则每次试验必有 Ω 中某一基本事件（即样本点）发生，也就是每次试验 Ω 必然发生，称 Ω 为**必然事件**.

把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 看成一个事件. 每次试验 $\varnothing$ 必不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

事件具有以下特征：

(1) 任意一个事件 A 是相应样本空间 Ω 的一个子集.

(2) 事件 A 发生，当且仅当 A 中某一结果发生，或者说，当 $\omega_1(\in A)$ 发生时，则称事件 A 发生；当 $\omega_2(\notin A)$ 发生时，则称事件 A 不发生.

(3) 事件 A 的表示可用集合，也可以用语言，但要使人明白.

四、随机变量

用来表示随机现象结果的变量称为随机变量，常用大写字母 X,Y,Z 等表示. 很多随机事件都可以用随机变量来表达.

取值情况：有限、无限可列属于离散型随机变量；剩下的属于非离散型随机变量（主要研究连续型随机变量）.

有了随机变量，我们就可以用随机变量来表达随机事件，才可以用数学方法（分析方法）来研究随机性问题.

随机事件的三种表达式：集合、语言描述、随机变量.

五、随机事件的概率

1. 概率公式

设试验 E 的样本空间为 Ω，称实值函数 P 为概率，如果 P 满足如下三个条件：

(1) 对于任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

(3) 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2. 概率性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

六、事件之间的关系与运算

为使以后的概率计算化繁为简，需要研究事件间的关系与事件的运算规则，这里先研究事件的关系，它与集合的运算有着相同之处.

1. **事件的包含**

定义：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

从集合关系来说，$A \subset B$ 就是 A 中的每一个样本点都属于 B.

2. **事件的相等**

定义：如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

$A = B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

3. **事件的交**

定义：如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A \cap B$ 或 AB.

集合 $A \cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成的集合.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = A_1A_2\cdots A_n\cdots.$$

4. **互斥事件**

定义：如果事件 A 与事件 B 满足关系 $AB = \varnothing$，即 A 与 B 同时发生是不可能事件，则称事件 A 和事件 B 为**互斥**或**互不相容**.

互斥的两个事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称这 n 个事件是两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$，则称这可数无穷个事件是两两互斥或两两互不相容.

5. **事件的并**

定义：如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的并或和，记为 $A \cup B$.

集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成的集合.

事件的并可推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

6. **对立事件**

定义:如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 为**对立事件**或**互逆事件**,记为 $\overline{A}=B$ 或 $\overline{B}=A$.

如果 A 与 B 为对立事件,则 A 与 B 不能同时发生,且必有一个发生,即 A,B 满足 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

在样本空间中,集合 $\overline{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

7. **完备事件组**

定义:如果有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个**完备事件组**或**完全事件组**.

可以将完备事件组推广到可数无穷多个事件的情形:

$$A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n,\cdots),且 \bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\Omega.$$

8. **事件的差**

定义:事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$.

在样本空间中,集合 $A-B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合.显然,$A-B=A\overline{B}$.

9. **文氏图**

直观上常用几何图形来表示集合.事件间的关系与运算也可以用几何图形直观表示.这类图形称为文氏图,如图 1-1 所示.

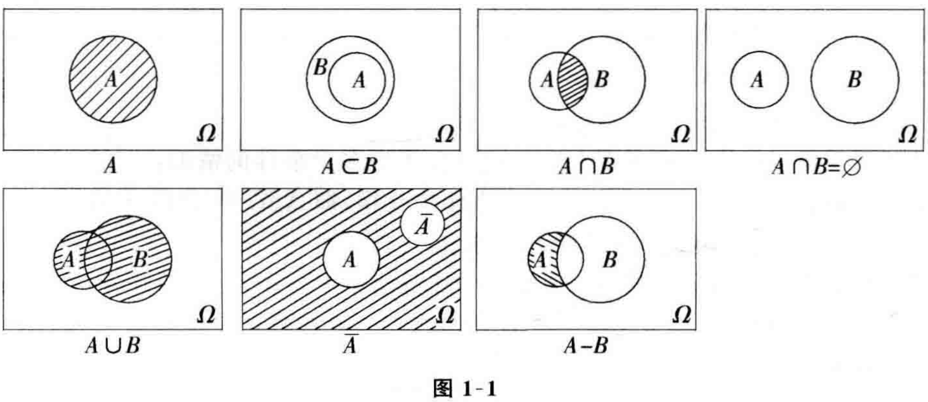

图 1-1

10. **事件的运算规律**

交换律　$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，

$\overline{A-B}=\overline{A\bar{B}}=\overline{A}\cup B$.

1.2　古典概型和几何概型

一、古典型概率

定义：当试验结果为有限 n 个样本点，且每个样本点的发生具有相等的可能性时，称这种有限等可能试验为古典概型. 此时如果事件 A 由 n_A 个样本点组成，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中的样本点总数}},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的古典型概率.

二、几何型概率

定义：当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维、二维或三维等)时，以 $L(\Omega)$ 表示样本空间 Ω 的几何度量(长度、面积、体积等). $L(\Omega)$ 为有限，且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只与该区域的几何度量成正比. 称这种推广至几何度量上的有限等可能试验为几何型概型. 此时如果事件 A 的样本点表示的区域为 Ω_A，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}=\frac{\Omega_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}},$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的几何型概率.

1.3　条件概率　事件独立性和五大公式

一、条件概率

定义：设 A,B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

对固定的事件 A，条件概率也具有与概率相同的各种性质.

二、事件独立性

1. 定义

设 A,B 两事件满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$,

任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 满足等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件.

事实上,n 个事件相互独立需要 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式成立.

2. 相互独立的性质

(1)A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\overline{B}$ 或 $\overline{A}$ 与 B 或 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件,则新组成的 n 个事件也相互独立.

(2) 当 $0<P(A)<1$ 时,A 与 B 独立等价于 $P(B\mid A)=P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$ 成立.

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 必两两独立. 反之,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不一定相互独立.

(4) 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,它们的部分事件也是相互独立的.

三、五大公式

(1) **加法公式**:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

(2) **减法公式**:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(3) **乘法公式**:当 $P(A)>0$ 时,

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A);$$

当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(4) **全概率公式**:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

(5) **贝叶斯公式**:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的概率均不为零的一个完备事件组,则对任意事件 A,且 $P(A)>0$,有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

1.4 伯努利概型

把一随机试验独立重复进行若干次,即各次试验所联系的事件之间相互独立,且同一事

件在各个试验中出现的概率相同，称为**独立重复试验**.

如果每次试验只有两个结果 A 和 $\overline{A}$，则称这种试验为**伯努利试验**. 将伯努利试验独立重复进行 n 次，称为 **n 重伯努利试验**.

设在每次试验中，概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率，又称为**二项概率公式**，即 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$.

典型例题

【例 1】 已知随机事件 A,B,C 中，满足 $P(AB)=1$，则事件 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ ________.

(A) 相互独立.　　(B) 两两独立，但不一定相互独立.

(C) 不一定两两独立.　　(D) 一定不两两独立.

【答案】 A.

【分析】 讨论事件 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 的独立性，可等价地考虑 A,B,C 的独立性.

由 $P(AB)=1$ 可知 $P(A)=P(B)=1$，而概率等于 1 的事件与所有的事件相互独立. 所以有以下式子成立：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$

又因 $P(AB)=1$，所以事件 AB 与 C 也相互独立，即

$$P(ABC)=P(AB)P(C)=P(A)P(B)P(C).$$

总之 A,B,C 相互独立.

答案应选 A.

【例 2】 某个由 9 人组成的顾问小组，若每个顾问贡献正确意见的百分比是 70%，现在某机构对某事件可行与否征求顾问小组的意见，并按多数人意见做出决策，求做出正确决策的概率.

【解】 显然本问题是：如果 9 人中超过 4 人做出正确决策，则可对该事件可行与否做出正确决策，从而设事件 $A=\{$做出正确决策$\}$，由题设知，$n=9,p=0.7,q=0.3$，于是

$$b_k(n,p)=b_k(9,0.7)=C_9^k\times 0.7^k\times 0.3^{9-k}(k=5,6,7,8,9),$$

所以 5 次试验是相互独立的，故

$$P(A)=\sum_{k=5}^{9}C_9^k\times 0.7^k\times 0.3^{9-k}\approx 0.901.$$

【例 3】 有 4 个大小质地一样的球，分别在其上写有数字“1”“2”“3” 和“1,2,3”，令

$$A_i=\{\text{随机抽出一球，球上有数字 } i\}\quad (i=1,2,3).$$

试证明：A_1,A_2,A_3 两两独立而不相互独立.

【证明】 由题设可知 $P(A_1)=\dfrac{1}{2},P(A_2)=\dfrac{1}{2},P(A_3)=\dfrac{1}{2}$，且

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},$$

以上等式说明 A_1,A_2,A_3 两两独立. 但是

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

可见事件 A_1,A_2,A_3 不相互独立.

【例 4】 袋中装有α个白球和β个黑球，分有放回和无放回两种情况，每次随机地连续抽取一个，求下列事件的概率：

(1) 从袋中取出的第 k 个球是白球($k\leqslant\alpha+\beta$)；

(2) 从袋中取出 $a+b$ 个球中，恰含 a 个白球和 b 个黑球($a\leqslant\alpha,b\leqslant\beta$).

【解】 有放回的情况：

每次摸出球后仍放回袋中，所以每次摸球时袋中均有$(\alpha+\beta)$ 个球.

(1) 设事件 $A=\{$第 k 个球是白球$\}$. 显然第 k 次摸时袋中有$(\alpha+\beta)$ 个球，每个球等可能被摸到，总的样本点数为$(\alpha+\beta)$，事件 A 是取到白球，A 所含样本点数为 α，所以

$$P(A)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

(2) 设事件 $B=\{$取 a 个白球和 b 个黑球$\}$. 每次摸球均是从$(\alpha+\beta)$ 个球中任取一球，共取了$(a+b)$ 次，总共有$(\alpha+\beta)^{a+b}$ 种取法，所以 $n=(\alpha+\beta)^{a+b}$. B 中所含样本点数是从$(a+b)$次中选出 a 次取白球，而余下的 b 次取黑球，有 C_{a+b}^{a} 种可能. 每次取白球有 α 种可能，取黑球有 β 种可能；取白球 a 次，取黑球 b 次为 $\alpha^a\beta^b$. 总之，B 中所含样本点数为 $\mathrm{C}_{a+b}^{a}\alpha^a\beta^b$. 所以，

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_{a+b}^{a}\alpha^a\beta^b}{(\alpha+\beta)^{a+b}}.$$

无放回的情况：

(1) 从$(\alpha+\beta)$ 个球中连续不放回地取 k 个球，可以看成从$(\alpha+\beta)$ 个球中取出 k 个来进行一次有序排列，总共有 $\mathrm{P}_{\alpha+\beta}^{k}$ 种. 事件 $A=\{$第 k 个球是白球$\}$，可以从 α 个白球中先选一个放在第 k 个位置，有 α 种取法，而其余的$(k-1)$ 个球在余下的$(\alpha+\beta-1)$ 个位置上，任取$(k-1)$个，考虑排列，有 $\mathrm{P}_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$. 所以 A 中包含的样本点数共有 $\alpha\mathrm{P}_{\alpha+\beta-1}^{k-1}$ 个. 故

$$P(A)=\frac{\alpha\mathrm{P}_{\alpha+\beta-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_{\alpha+\beta}^{k}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

(2) 从$(\alpha+\beta)$ 个球中取$(a+b)$ 个球总共有 $\mathrm{C}_{\alpha+\beta}^{a+b}$ 种取法. 如果这$(a+b)$ 个球中恰有 a 个白球、b 个黑球，则有 $\mathrm{C}_{\alpha}^{a}\mathrm{C}_{\beta}^{b}$ 种取法. 从而

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_{\alpha}^{a}\mathrm{C}_{\beta}^{b}}{\mathrm{C}_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

【例 5】 两盒火柴各有 N 根，每次任取一盒用一根，则当一盒用完时，另一盒还有 $R(R\leqslant N)$ 根的概率为__________.

【分析】

甲　　　　乙

$\boxed{N}$　　　　$\boxed{N}$

用了 N 根　　　　用了 $N-R$ 根

A　　　　$\overline{A}$

图 1-2

图 1-2 表示甲、乙两盒火柴，各有 N 根."每次任取一盒用一根"可理解为做一次伯努利试验.不妨假定取甲时为试验成功，A 发生；取乙时为试验失败，$\overline{A}$ 发生.

用火柴可以看成是独立重复试验，每次试验成功的概率为$\frac{1}{2}$，失败的概率也是$\frac{1}{2}$."当一盒用完时，另一盒还有 R 根"，不妨假定甲盒火柴用完时(就是甲盒取第 N 根火柴时)，另一盒，也就是乙盒内还有 R 根，用伯努利试验的概念理解为在第 N 次成功前恰好失败了 $N-R$ 次.根据前面给出的结果，其概率必为

$$\mathrm{C}_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-R}\cdot\frac{1}{2}=\mathrm{C}_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R}.$$

实际上"当一盒用完"这个事件既有可能在甲盒发生，也有可能在乙盒发生.所以概率应为

$$2\cdot\mathrm{C}_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R}=\mathrm{C}_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R-1}.$$

答案应填 $\mathrm{C}_{2N-R-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-R-1}$.

【例 6】　设有五个袋子，其中两个袋子(品种 A_1)每袋有两个白球和三个黑球，另外两个袋子(品种 A_2)每袋有一个白球和四个黑球，还有一个袋子(品种 A_3)中有四个白球和一个黑球，

(1) 从五个袋子中任选一袋，并从此袋中任取一球，求此球为白球的概率；

(2) 从不同品种的三个袋子中任选一袋，并从其中任取一球，结果是白球(事件 B)，问此球从三个品种的袋子中取出的概率各是多少？

【解】　(1) 设事件 $B=\{$取到白球$\}$，$A_i=\{$从五个袋子中取到 A_i 品种袋子$\}(i=1,2,3)$，故

$$P(A_1)=\frac{2}{5},P(A_2)=\frac{2}{5},P(A_3)=\frac{1}{5},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{2}{5},P(B\mid A_2)=\frac{1}{5},P(B\mid A_3)=\frac{4}{5},$$

利用全概率公式，所求概率为

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\\&=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

(2) 设事件 $B=\{取到白球\}$，$A_i=\{从不同品种的三个袋子中取到品种 A_i 袋子\}(i=1,2,3)$，根据题设，欲求下述三个条件概率 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$.

于是

$$P(A_1)=\frac{1}{3},P(A_2)=\frac{1}{3},P(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(B|A_1)=\frac{2}{5},P(B|A_2)=\frac{1}{5},P(B|A_3)=\frac{4}{5},$$

利用全概率公式，取到白球的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{15}.$$

再由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{2}{7}.$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{1}{7}.$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{4}{7}.$$

【例 7】 设随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，记事件 $A=\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{3}{4}\right\}$，则________.

(A) A 与 B 互不相容. (B) B 包含 A.

(C) A 与 B 对立. (D) A 与 B 相互独立.

【答案】 D.

【分析】 如图 1-3 所示，由图形立即得到正确选项为 D，事实上，由题设知

$$X\sim f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

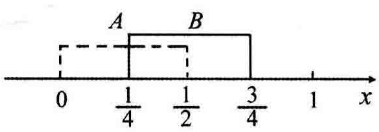

图 1-3

所以 $P(A)=P\left\{0\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,

$$P(B)=P\left\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{3}{4}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$P(AB)=P\left\{\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

因此 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，即 A 与 B 相互独立.

【例 8】 将一枚硬币独立投掷两次，记事件 $A=\{第一次掷出正面\}$，$B=\{第二次掷出反面\}$，$C=\{正面最多掷出一次\}$，则事件________.

(A)A,B,C 两两独立.　　　　(B)A 与 BC 独立.

(C)B 与 AC 独立.　　　　(D)C 与 AB 独立.

【答案】 B.

【分析】 由题设知,试验的基本事件共有4个:$w_1=\{正,正\}$,$w_2=\{正,反\}$,$w_3=\{反,正\}$,$w_4=\{反,反\}$,所以 $A=\{w_1,w_2\}$,$B=\{w_2,w_4\}$,$C=\{w_2,w_3,w_4\}$,$P(A)=P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{3}{4}$,显然 A 与 B 独立,$B\subset C$,故 B,C 不独立,A 选项不正确.

又 $BC=B$,$ABC=AB$,$P(ABC)=P(AB)=P(A)P(B)=P(A)P(BC)$,即 A 与 BC 独立,B 选项正确.

而
$$P(ABC)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}\neq P(B)P(AC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4},$$
$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(C)P(AB)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4},$$
故 C 选项和 D 选项不正确.

【例 9】 (2007) 在区间(0,1)中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为________.

【分析】 本题考查的是几何型概率.不妨假定随机地取出两个数分别为 X 和 Y.显然,X 与 Y 是两个相互独立的随机变量.如果把(X,Y)看成平面上的一个点的坐标,则由于 $0<X<1,0<Y<1$,所以(X,Y)为平面上正方形 $0<X<1,0<Y<1$ 中的一个点.而 X 与 Y 两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的点(X,Y)则对应于正方形中$|X-Y|<\frac{1}{2}$的区域.

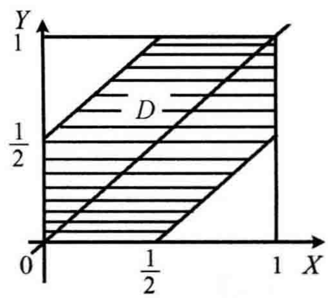

图 1-4

在区间(0,1)中随机地选取所有可能的两个数 X 和 Y.这些(X,Y)点刚好是图 1-4 单位正方形中满足$|X-Y|<\frac{1}{2}$的点的区域,也就是图中用阴影标出的区域 D.

根据几何型概率
$$P\left\{|X-Y|<\frac{1}{2}\right\}=\frac{D\text{ 的面积}}{\text{单位正方形的面积}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\frac{3}{4}.$$

故答案应填$\frac{3}{4}$.

【评注】 几何型概率题的求解关键在于如何将满足条件的可能结果与某区域中的一个点对应起来,这些区域可能是一维的,也可能是二维的,甚至可能是三维的,然后求出题目要求的区域和可能结果所对应的区域长度或面积或体积之比.

本题是 2007 年的考题,当年的考得分率为 0.414.