高等学校“十三五”规划教材

本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖

微积分

第二版

Second Edition

谢彦红　李明辉　裴晓雯　主编

化学工业出版社

高等学校“十三五”规划教材

本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖

微积分

第二版

Second Edition

谢彦红　李明辉　裴晓雯　主编

化学工业出版社

·北京·

本书主要面向应用型本科人才的培养。内容包括：函数，极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，多元函数微积分学（包括空间曲面与常见曲面方程），无穷级数，微分方程与差分方程等。每章末附有知识窗，或介绍微积分发展史，或介绍数学大师趣闻逸事等，能拓宽视野，扩展知识面，提高数学素养。

本书在编写过程中注重数学思想的渗透，重视数学概念产生背景的分析，引进概念尽量结合生活实际，由直观到抽象，深入浅出，通俗易懂；选编了相当数量的经济应用例题，以提高读者运用数学知识解决实际经济问题的能力。本书课后习题按照一定的难易比例进行配备，习题中融入了近年考研真题，满足各层次学生的学习需求。

本书适用于经济管理类本科各专业，亦可供其他相关专业选用，适用面较广。本书还可以作为考研读者及科技工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分/谢彦红，李明辉，裴晓雯主编. —2 版. 北京：化学工业出版社，2017.6

高等学校“十三五”规划教材　本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖

ISBN 978-7-122-29512-5

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①谢…②李…③裴…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 081536 号

责任编辑：郝英华　　装帧设计：韩　飞

责任校对：宋　玮

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：北京国马印刷厂

787mm×1092mm　1/16　印张 18¾　字数 476 千字　2017 年 8 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：46.00 元

《微积分》编写人员

主　编　谢彦红　李明辉　裴晓雯

参　编　（以姓氏笔画为序）

王　阳　王欣彦　白春艳　刘　欣

李明辉　李慧林　张　成　徐　涛

谢彦红　裴晓雯

第二版前言

数学不仅是一种工具，还是一种思维模式；不仅是一种知识，还是一种素养；不仅是一种科学，还是一种文化，能否运用数学观念定量思维是衡量民族科学文化素质的一个重要指标。数学教育在培养高素质经济和管理人才中越来越显示出其独特的、不可替代的作用。

微积分是经济管理类学生必修的重要数学基础理论课之一。近年来，经济管理专业一般是文理兼收，导致同一专业学生的数学基础有很大差异，部分文科学生对数学存在畏难情绪；加之某些教材内容陈旧，过于强调数学的严谨和证明，使得学生丧失兴趣和信心，而继续深入学习经管等知识又发现自己的数学基础太差学不下去。因此，编写一部适合经济管理专业学生学习的教材已经刻不容缓，本书正是基于上述考虑编写而成的。

本书根据国家数学与统计学教学指导委员会的经济管理类本科数学基础课程教学基本要求而编写，编者将多年的教学经验有机地融于其中，在编写过程中注重数学思想的渗透，重视数学概念产生背景的分析。根据经济管理类学生的特点，引进概念尽量结合生活实际或几何意义，尽量结合学生已掌握的知识，由直观到抽象，力争深入浅出，通俗易懂；从客观实际出发，淡化数学理论的证明，略去了部分让学生“生畏”的证明，代之以直观形象的阐述，加强数学理论的应用，注重培养学生掌握应用理论解决实际问题的方法。

本书第 1 章增加了中学数学中忽略的而高等数学所必需的知识点，如三角函数的积化和差等基本公式、极坐标等。每章末附有知识窗，或介绍微积分发展史，或介绍数学大师趣闻逸事，既能拓宽视野、扩展知识面，又能提高学生的数学素养，调动学生学习数学的积极性。本书选编了相当数量的经济应用例题，以期提高读者运用数学知识解决实际经济问题的能力。书中打 * 号部分内容或习题可作为选学内容或学生自学用。书中配置了较多例题和习题，课后习题按照一定的难易比例进行配备，同时融入了近年考研真题，如（数学二）表示考研试题中数学二中的考题，以期满足各层次学生的学习需求。

本书第二版是在第一版的基础上，根据我们四年多的教学实践，按照新形势下教材改革的需求，并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见修订而成。

本次修订，我们保留了原书的体系，对书中一些不很确切的文字符号做了修改；对书中几处内容做了次序调整；调整了部分例题和习题，删去了过难、计算量过大的例题和习题以及过于抽象的学习内容；增加了空间曲面与常见曲面方程等内容，为后续求空间立体体积奠定基础；增加了最新考研试题，为进一步深造的同学提供参考资料。

本书由谢彦红、李明辉、裴晓雯主编。参加本书编写的还有白春艳、张成、王阳、刘欣、王欣彦、李慧林、徐涛。

本书的出版得益于沈阳化工大学各级领导的鼓励和支持，得益于广大同仁的努力和帮

助，在此一并表示衷心的感谢！

编者力求编好此书，得到读者好评，但限于水平，难免有疏漏之处，敬请广大同仁及读者批评指正。

编者

2017 年 5 月

目录

第1章 函数

第2章 极限与连续

第 3 章 导数与微分

第 4 章 微分中值定理与导数的应用

第 5 章 不定积分

第 6 章 定积分

第 7 章 多元函数微积分学

第 8 章 无穷级数

第 9 章 微分方程

第 10 章 差分方程初步

部分习题参考答案与提示

第1章 函数

数学是一门研究数量关系与空间形式的科学，函数关系是满足一定条件的一种数量关系．函数是微积分研究的对象，是最重要的基本概念之一．尽管我们在以前已对它有了一定的认识，但认真学好本章，加深对函数概念及其性质的理解和掌握，为学习本课程打下良好基础仍是不容忽视的.

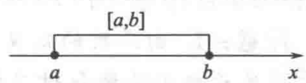
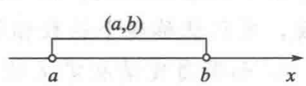
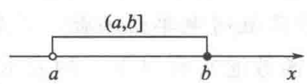
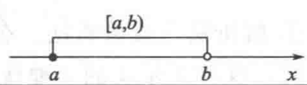
1.1 函数的概念

1.1.1 预备知识

我们在观察某一现象时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中保持不变，称为常量；有的量在过程中是变化的，称为变量．通常用字母 x,y,z 表示变量，用字母 a,b,c 表示常量.

在一些实际问题中，如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围．在数轴上来说，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体．区间通常分为有限区间和无限区间，表 1.1 给出了有限区间的表示方法：设 a,b 为实数，且 $a<b$.

表 1.1

名　称	满足的不等式	记　法	数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,b]$或$[a,b)$	 

除此之外，还有无限区间：

$[a,+\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$a\leqslant x<+\infty$；

$(-\infty,b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$-\infty<x<b$；

其中 $-\infty$ 和 $+\infty$，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

为描述一个变量 x 在一个已知点 x_0 附近变化，我们给出邻域这一术语：

$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$. x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1.1 所示.

$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，如图 1.2 所示.

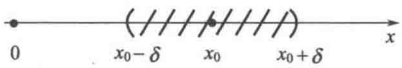


图 1.1

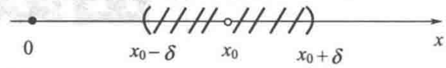


图 1.2

1.1.2 函数的概念

在自然界中，某一现象中的各种变量之间，通常并不都是独立变化的，它们之间存在着依赖关系，我们观察下面几个例子.

例如，某种商品的销售单价为 p 元，则其销售额 L 与销售量 x 之间存在这样的依赖关系：$L=px$. 又例如：圆的面积 S 和半径 r 之间存在这样的依赖关系：$S=\pi r^2$

不考虑上面两个例子中量的实际意义，它们都给出了两个变量之间的相互依赖关系，这种关系是一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设在某个变化过程中有变量 x 和 y，如果对于 x 取值范围内的每一个数值，都有一个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数.

为了突出这里是集合之间的对应关系，给出如下定义.

定义 1.1′ 设 D 是一个非空实数集合，f 是一个对应规则，在此规则下，对每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称此对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，称变量 y 是变量 x 的函数．记做 $y=f(x),x\in D$.

这里称 x 为自变量，称 y 为因变量．集合 D 称为该函数的定义域，可记做 $D(f)$. 对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 的函数值．全体函数值的集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$.

注意：1. 由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应规则和值域．由于值域是由定义域和对应规则决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个函数相等.

2. 如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数．这里我们只讨论单值函数.

函数通常有以下三种表示方法.

① 解析法（或分析法、公式法）：如 $y=\sin x$，$y=\sqrt{x^2+1}$，这样的表达式亦为函数的解析式，这种表示法的主要优点是严密.

② 图示法：如用直角坐标（或极坐标等）平面的一条曲线表示，这种表示法的主要优点是直观.

③ 表格法：如三角函数表、对数表、正态分布表等，这种表示法的主要优点是能进行函数值的查询.

若函数 $f(x)$在定义域不同的区间上用不同解析式来表示，则称函数 $f(x)$为分段函数．如 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$和符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，都是定义域在$(-\infty, +\infty)$内的分段函数，其图形分别如图 1.3 和图 1.4 所示.

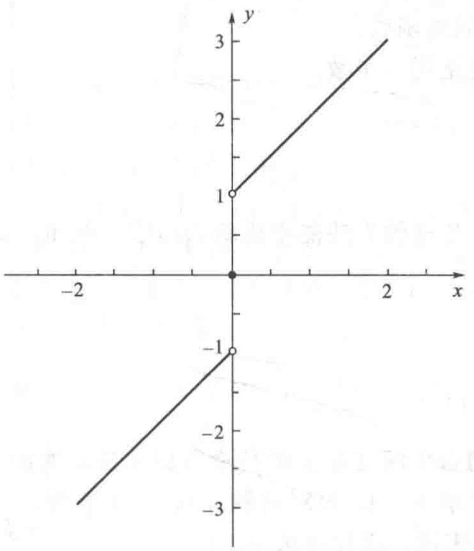


图 1.3

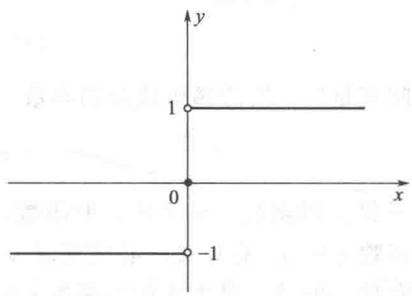


图 1.4

对于给定的一个二元方程 $F(x, y)=0$，只要给定 x 的值，就能确定出与之对应的 y 值，从而确定一个或几个（自变量 x 的）函数 y. 例如方程 $xy-2x+3y-1=0$ 就确定一个函数 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$，而方程 $x^2+y^2-1=0$ 则可以确定两个函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 在很多情形中，由给定方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数不可能像所举例的两个简单例子那样把 y 解出来，例如 $xy-e^y=0$, $xe^y+\sin xy=0$ 等．因此，不管表达式如何，只要在 x 的取值范围内，满足方程 $F(x, y)=0$ 的每一个函数 $f(x)$都称为是由这个方程所确定的隐函数，而把以前提到过的形如 $y=f(x)$的函数表达形式称为显函数.

【例 1.1】 设 $f(x+1)=2x^2+3x-1$，求 $f(x)$.

解 设 $x+1=t$ 得 $x=t-1$，则 $f(t)=2(t-1)^2+3(t-1)-1=2t^2-t-2$，所以 $f(x)=2x^2-x-2$.

【例 1.2】 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

解 由$\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$，即$|x-1|\leqslant 5$ 且$|x|<5$，得$-4\leqslant x\leqslant 6$ 且$-5<x<5$.

故所求定义域是$[-4, 5)$.

【例 1.3】 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域.

解 要使函数有定义，即有

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\ \left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 3\text{ 或 }x\leqslant -2\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow\quad -3\leqslant x\leqslant -2\text{ 或 }3\leqslant x\leqslant 4$$

于是，所求函数的定义域是：$[-3,-2]\cup[3,4]$.

【例 1.4】 判断以下函数是否是同一函数，为什么？

（1）$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$　　（2）$\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$

解 （1）两函数的定义域不同，因此不是相同的函数.

（2）两函数的对应法则和定义域均相同，因此是同一函数.

1.1.3 复合函数与反函数

1.1.3.1 复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓“中间变量”传递的方法能生成新的函数．例如，函数

$$z=\ln y \text{ 与 } y=x-1$$

由“中间变量”y 的传递生成新的函数

$$z=\ln(x-1)$$

在这里 z 是 y 的函数，y 又是 x 的函数．于是，通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数．为了使函数 $z=\ln y$ 有意义，必须要求 $y>0$，即要求 $x>1$. 仅对函数 $y=x-1$ 来说，x 可取任意实数．但是，对生成的新函数 $z=\ln(x-1)$来说，必须要求 $x>1$.

定义 1.2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$为 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$的复合函数．x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

【例 1.5】 若 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$，则其复合而成的函数为

解 $y=\sqrt{\sin x}$，要求 $u\geqslant 0$ 所以 $\sin x\geqslant 0$，$x\in[2k\pi,\ \pi+2k\pi]$.

【例 1.6】 分析下列复合函数的结构．

（1）$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$；　　（2）$y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 （1）$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$.

（2）$y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2+1$.

1.1.3.2 反函数

在高中已经学习了反函数，如对数函数是指数函数的反函数，反三角函数是三角函数的反函数．鉴于反函数的重要性，我们将复习反函数的概念．

圆的面积公式　　$S=\pi r^2$

中，半径 r 是自变量，面积 S 是因变量，即对任意半径 $r\in(0,+\infty)$，对应唯一一个面积 S. 反之，对任意面积 $S\in(0,+\infty)$，按此对应关系，也对应唯一一个半径 r（正数），即

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 就是函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

定义 1.3　设 $y=f(x),x\in D(f),y\in Z(f)$. 如果对于每一个 $y\in Z(f)$，都有唯一确定的而且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则用 f^{-1} 表示，这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数（或称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数）.

由定义知函数 $y=f(x)$ 的自变量是 x，因变量是 y，定义域是 $D(f)$，值域是 $Z(f)$. 而函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量是 y，因变量是 x，定义域是 $Z(f)$，值域是 $D(f)$.

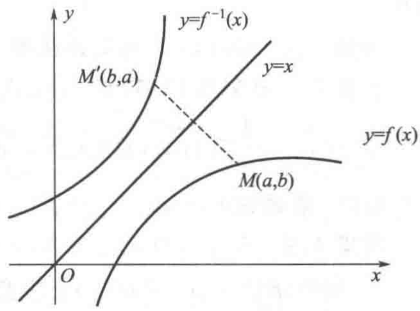


图 1.5

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量. 因此可以将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$，就是说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

从几何上看，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一图形，由于 x 和 y 互换，于是 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1.5 所示.

【例 1.7】　求 $y=2x-1$ 的反函数.

解　由 $y=2x-1$ 求出 $x=\frac{y+1}{2}$. 用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $y=2x-1$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{2}$.

【例 1.8】　$y=x^2,x\in[0,+\infty)$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$，而 $y=x^2,x\in(-\infty,0]$ 的反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

一个函数如果有反函数，它的定义域 $D(f)$ 与值域 $Z(f)$ 之间必定是一一对应的，即每一个 x 值确定一个 y 值，并且每一个 y 值仅取决于一个 x 值. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，它没有反函数.

【例 1.9】　设 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

解　求分段函数的反函数，只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y=x,-\infty<x<1$ 得 $x=y,-\infty<y<1$，于是反函数为

$$y=x,\ -\infty<x<1,$$

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant 4$ 得 $x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 16$，于是反函数为

$$y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16,$$

由 $y=2^x,4<x<+\infty$ 得 $x=\log_2 y,16<y<+\infty$，于是反函数为

$$y=\log_2 x,\ 16<x<+\infty,$$

综上所述，
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}.$$

1.1.4 函数的基本性质

1.1.4.1 有界性

定义 1.4 若存在正数 M，对一切 $x\in D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 为有界函数.

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个实数轴上均有界.

事实上，$\exists M=1>0, \forall x\in\mathbf{R}$，有 $|\sin x|\leqslant 1$ 与 $|\cos x|\leqslant 1$.

而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界，而在区间 $(\varepsilon, 1)(\varepsilon>0)$ 内是有界的.

1.1.4.2 单调性

定义 1.5 对 $y=f(x), x\in D(f)$，对任意两点 $x_1, x_2\in D(f)$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $D(f)$ 上单调递增，区间 $D(f)$ 称为 $f(x)$ 的单调递增区间；当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 $D(f)$ 上单调递减，区间 $D(f)$ 称为 $f(x)$ 的单调递减区间.

单调递增区间或单调递减区间统称为单调区间.

【例 1.10】 说明 $y=a^x$，$y=\log_a x$ 在其定义域区间内的单调性.

解 $y=a^x$，当 $a>1$ 时，定义域 R 为单调递增区间；当 $0<a<1$ 时，定义域 R 为单调递减区间. $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，定义域 $(0, +\infty)$ 为单调递增区间，当 $0<a<1$ 时，定义域 $(0, +\infty)$ 为单调递减区间.

【例 1.11】 判断 $y=3x^2$ 的单调性.

解 $y=3x^2$ 的定义域是 $D=(-\infty, +\infty)$，对于任意的 $x_1, x_2\in D$，$f(x_1)-f(x_2)=3x_1^2-3x_2^2=3(x_1^2-x_2^2)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，因此 $y=3x^2$ 是单调递减.

在 $(0, +\infty)$ 内，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此 $y=3x^2$ 是单调递增.

1.1.4.3 奇偶性

定义 1.6 对 $y=f(x), x\in D(f)$，若对任意 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的几何图形关于原点对称，而偶函数的几何图形关于 y 轴对称.

【例 1.12】 判断 $y=\cos x(e^{-x}+e^x)$ 的奇偶性.

解 因为 $y=\cos x(e^{-x}+e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是关于原点对称的，并且
$$f(-x)=\cos(-x)(e^x+e^{-x})=\cos x(e^{-x}+e^x)=f(x)$$
故此函数为偶函数.

显然，函数 $y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

1.1.4.4 周期性

定义 1.7 对 $y=f(x), x\in D(f)$，若存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D(f)$ 有 $(x\pm T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 是 $f(x)$ 的周期. 通常