2004年上海大学博士学位论文 51

大气环流方程组性质研究及准确解计算

作　者：何幼桦
专　业：流体力学
导　师：施惟慧

上海大学出版社
·上海·

2004 年上海大学博士学位论文

大气环流方程组性质研究及准确解计算

作　者：何幼桦
专　业：流体力学
导　师：施惟慧

上海大学出版社
・上　海・

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

On the Properties of Atmospheric Circulation Equation and Analytic Solution Computation

Candidate: He You-hua
Major: Fluid Mechanics
Supervisor: Prof. Shi Wei-hui

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单:

主任:	李邦河	院士，中国科学院数学与系统研究院	100080
委员:	戴世强	教授，上海大学应用数学和力学研究所	200072
	周锦诚	教授，Univ. de Perpinan, FRANCE	F66000
	J.A.Marti	教授，Univ. des Antilles et de La Guyane	F97159
	张 铭	教授，中国人民解放军理工大学	211101
	黄思训	教授，中国人民解放军理工大学	211101
	盛万成	教授，上海大学数学系	200436
导师:	施惟慧	教授，上海大学	200072

评阅人名单：

李雅卿	研究员，中国科学院数学与系统研究院	100080
张　铭	教授，中国人民解放军理工大学	211101
黄思训	教授，中国人民解放军理工大学	211101

评议人名单：

周锦诚	教授，Univ. de Perpinan, FRANCE	F66000
郑　权	教授，上海大学数学系	200444
石钟锐	教授，上海大学数学系	200444
李　乔	教授，上海交通大学应用数学系	200030

答辩委员会对论文的评语

何幼桦同学的博士论文“大气环流方程组性质研究及准确解计算”运用分层理论研究了正压原始方程、大气环流方程组，对它们分别进行分层，得出大气环流方程组压力方向的边值问题是适定的；大气环流方程组广义初值问题适定的充要条件，侧边值问题适定的充要条件，混合问题解的存在唯一性的讨论. 对两种坐标系下大气环流方程组及其初值问题的性质进行比较. 在此基础上，给出适定的正压原始方程及大气环流方程组广义初值问题解析解的计算程序、大气环流方程组混合问题形式解的计算程序，且给出具体例子.

对大气环流方程组性质的研究以及对其定解问题适定性的讨论涉及到相应的大气模式的合理性、可解性以及天气的可预报性等前沿问题，所以说该论文的选题是具有重要的理论意义和潜在的应用价值.

该论文的研究结果在以下方面有所创新：

1. 应用拓扑学的方法来研究非线性偏微分方程的性质，不同于一般的经典方法.

2. 完整地描述了大气环流方程组的拓扑学性质。

3. 讨论大气环流方程组的各类定解问题，并得到了有意义的结论.

4. 实现了复杂拟线性偏微分方程组定解问题的计算机符号求解.

从论文反映出作者具有扎实的基础理论以及系统深入的专业知识，显示了该生已具有相当强的独立科研能力，论文立论正确，论据充分，条理清晰，层次分明，结果合理. 在答辩中，回答问题正确，思想清晰、敏捷，逻辑性强. 评委一致认为本论文是一篇优秀的博士论文.

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过何幼桦同学的博士学位论文答辩，并建议授予其博士学位.

答辩委员会主席：李邦河

2004 年 5 月 26 日

摘　要

从正压原始方程开始，运用分层理论研究大气环流方程组定解问题的适定性，以及适定的定解问题（包括初值问题、边值问题和混合问题）在解析函数类空间准确解的求解方法. 本文的研究主题是直角坐标系下的正压原始方程组和 P 坐标系下的大气环流方程组，所得结果如下：

1. 正压原始方程组的 $(2,k-1)$阶（$k\geq 1$）典则分层为：

$$W_{2,k-1}(R^3,R^3)=S^t_{2,k-1}(D)\cup S^1_{2,k-1}(D)\cup T_{2,k-1}(D)$$

2. 大气环流方程组的$(3,k-1)$阶（$k\geq 2$）典则分层为：

$$W_{3,k-1}(R^4,R^5)=S^t_{3,k-1}(D)\cup S^2_{3,k-1}(D)\cup S^5_{3,k-1}(D)\cup T_{3,k-1}(D)$$

3. 大气环流方程组压力方向的边值问题总是适定的.

4. 大气环流方程组广义初值问题适定的充分必要条件是：$\dfrac{\partial g}{\partial p}\neq 0$，其中 $g=g(x,y,p)$ 是初始超曲面.

5. 得到了大气环流方程组侧边界问题适定的充分必要条件.

6. 大气环流方程组混合问题解的存在唯一性讨论.

7. 对两种坐标系下的大气环流方程组及其初值问题的性质进行比较.

8. 适定的正压原始方程组广义初值问题解析解的计算程序.

9. 适定的大气环流方程组广义初值问题解析解的计算程序.

10. 大气环流方程组混合问题形式解的计算程序.

关键词 大气环流方程，正压原始方程，分层理论，初值问题，边值问题，混合问题，适定性，不适定问题

Abstract

Based on stratification theory, begin with the barotropic primitive equation, some theoretical problems of atmospheric equations are discussed, including the well posedness of their initial value problem, boundary value problem and mixed problem. The methods and the programs of how to get the analytic solution of a well-posed problem are also presented. In this thesis, the barotropic primitive equation under the rectangular coordinate system and atmospheric circulation equation under p coordinate system are mainly researched. I obtain following results:

1. Barotropic primitive equations'(2,k−1)order ($k \geq 1$) canonical stratification is:

$$W_{2,k-1}(R^3, R^3) = S_{2,k-1}^t(D) \cup S_{2,k-1}^1(D) \cup T_{2,k-1}(D)$$

2. Atmospheric circulation equations' $(3, k-1)$ order ($k \geq 2$) canonical stratification is:

$$W_{3,k-1}(R^4, R^5) = S_{3,k-1}^t(D) \cup S_{3,k-1}^2(D) \cup S_{3,k-1}^5(D) \cup T_{3,k-1}(D)$$

3. Atmospheric circulation equations' boundary value problem in p direction is always well posed.

4. The sufficient and necessary condition for a well-posed general initial value problem of atmospheric circulation equations is: $\frac{\partial g}{\partial p} \neq 0$, in which $g = g(x, y, p)$ is an initial hypersurface.

5. Obtained the sufficient and necessary conditions for well-posed lateral boundary value problems of atmospheric circulation equations.

6. Discussed the existence and uniqueness of the analytic solution of the atmospheric circulation equations' mixed problem.

7. Compare the properties of atmospheric circulation equations in z and p coordinate system and their initial value problems.

8. Present the computer program for finding an analytic solution of well-posed barotropic primitive equations' general initial value problem.

9. Present the computer program for finding an analytic solution of well-posed atmospheric circulation equations' general initial value problem.

10. Present the computer program for finding formal solution of atmospheric circulation equations' mixed problem.

Key words atmospheric circulation equation, barotropic primitive equation, stratification theory, initial value problem, boundary value problem, mixed problem, well-posedness, ill-posed problem

目　录

绪 论

1. 描述大气环流运动的原始方程组

大气环流是指大气层具有一定稳定性的各种气流运动的综合现象. 它既包括平均现象，也包括瞬时现象. 其流场的水平尺度达 10^6 米量级，垂直尺度则只有 10^4 米量级，时间尺度一般在两天以上. 大气环流的主要表现形式有全球规模的东西风带、三圈环流(即出现在低纬度和高纬度的两个正环流圈和中纬度地区的一个逆环流圈)、常定分布的平均槽脊、行星尺度的高空急流、西风带中的大型扰动以及世界气候带的分布等. 大气环流构成全球大气运行的基本形势，是全球气候特征和大范围天气形势的主导因素，也是各种尺度天气系统活动的背景. 太阳辐射能在地球上的非均匀分布，是大气环流的原动力，本文第 4 章例 4.2 描述了温度在空间分布上的不均匀性所导致大气环流运动这样一个事实.

整个大气系统的动力学和热力学运动是由一组流体力学方程组控制，这组流体力学方程组实际上是由若干个非线性偏微分方程(包括运动方程、连续方程、热力学能量方程、水汽方程以及状态方程)所构成的复杂系统. 在不考虑地形、海洋等因素影响，并略去了分子粘性力的情况下，在局地直角坐标中所描述的各控制方程为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+fv+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho\nu_v\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\\
\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}-fu+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho\nu_v\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\\
\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}-g+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho\nu_h\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho\nu_v\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\\
\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0\\
\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=S_\theta+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\mu_h\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho\mu_h\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho\mu_v\dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right)\right]\\
\dfrac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t}=S_n+\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\lambda_{h,n}\dfrac{\partial q_n}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\rho\lambda_{h,n}\dfrac{\partial q_n}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\rho\lambda_{v,n}\dfrac{\partial q_n}{\partial z}\right)\right]\\
p=p(\rho,\theta,q_n), \qquad\qquad n=1,2,3
\end{cases}
\tag{0.1}
$$

其中 u，v，w 分别为风速三个空间坐标方向的分量，ρ 是空气密度，p 是空气压强，θ 是位温，q_1，q_2，q_3 分别代表固态、液态、和汽态水的比湿. S_θ 为非绝热加热汇源项，S_n 则为水汽的汇源项. ν_h 和 ν_v 分别代表水平湍流粘性系数和垂直湍流粘性系数，μ_h 和 μ_v 代表水平湍流导热系数和垂直湍流导热系数，$\lambda_{h,n}$ 和 $\lambda_{v,n}$ 则分别代表水汽的水平湍流扩散系数和垂直湍流扩散系数.

根据大气环流系统在空间上的大尺度以及时间上的较大跨度的特性，本文首先忽略水汽的影响，即仅考虑干的大气环流系统，这样方程组(0.1)中将去除第 6~8 个(水汽)方程，状态方程也

将变成 $p=p(\rho,\theta\ )$(理想气体的状态方程为 $p=\rho RT$， R 为干空气气体常数，T 是绝对温度，它与位温的关系为 $\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}}$，$p_0$ 是某一标准状态 (p_0,T_0) 时的压力，定义此标准状态的熵为零，C_p 是定压比热). 其次在作大尺度研究时，可假设重力与气压的垂直梯度力近似相平衡，即有静力平衡方程

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{0.2}$$

引入重力位势 $\Phi=gz$，可得

$$\mathrm{d}\Phi=-RT\,\mathrm{d}(\ln p) \tag{0.3}$$

即压强 p 与重力位势 Φ 之间有关系

$$p=p_S\,\mathrm{e}^{-\lim\limits_{\delta x\to 0}}=p_S\,\mathrm{e}^{-\frac{gz}{RT}} \tag{0.4}$$

或

$$\Phi=RT\ln\left(\frac{p_S}{p}\right) \tag{0.4'}$$

p_S 是 $z=0$ 时(即地面)压强. 将(0.4)式代入原方程组即得到所谓的原始方程模式. 原始方程模式保留了重力惯性波(而风、压场的适应过程主要依赖于重力惯性波). 此外，它还考虑了非地转风、平流速度、散度等的作用. 因此原始方程模式与滤波模式相比较更接近于实际大气. 为了得到一个相对简洁的原始方程形式，引入 p 坐标体系. 在 z 坐标中， p 是空间和时间的函数 $p=p(x,y,z,t)$，解出 z 得 $z=z(x,y,p,t)$. 由重力势函数的定义以及根据静力平衡方程得到的(0.4)式，得到 p 坐标下的静力平衡方程

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{RT}{p}=0 \tag{0.5}$$

现设p坐标下的一个$F=F(x,y,p,t)$，则有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \tag{0.6a}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_z=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \tag{0.6b}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_z=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{0.6c}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z=\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z \tag{0.6d}$$

由此得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)_z &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_z+u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z+v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_z+w\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_z \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z+u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p+u\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+ \\
&\quad v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p+v\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p+ \\
&\quad \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z+u\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z+v\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z+w\frac{\partial p}{\partial z}\right]\frac{\partial F}{\partial p} \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_p+u\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p+v\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p+\omega\frac{\partial F}{\partial p} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)_p
\end{aligned} \tag{0.7}$$