刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections in Mathemetics by Y.P.Liu

第廿编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu

第廿编

时代文化出版社

第 廿 编序

在文 20.01[256]—20.06[485] 中, 都是讨论, 如何从地图的计数, 引出函数的, 或泛函的方程.

文 20.01[256], 总结当时已经发现的, 几乎所有泛函方程，其中谈到这种泛函与 Blissad 算子, 以及 Rota 所用过的, 此后称为阴影泛函之间的关系. 因为这里的泛函, 与 Rota 的不同, 在此后的出版物中, 总称为介子泛函. 不过, 此文中的方程, 都只与平面地图有关.

文 20.02[474] 和文 20.06[485] 提供两个介子泛函方程, 它们都是从不同类地图, 在所有曲面上, 分类计数中, 发现的. 它们都从理论上, 间接地, 得到了解的所有系数, 都是无和显式.

文 20.03[481], 20.04[482] 和 20.05[484] 都与曲面关联, 分别提供所有亏格的偏微分方程, 小亏格的差分方程 和偏微分方程. 讨论了适定性, 以及解的正项和表示.

所有这些方程, 都为下面的专著, 提供了一些实例的素材.

我为数学系的建设, 曾提出过 “新基础, 深应用, 精教程, 广联系”. 专著 [500](20.07—20.21) 不仅可以视为基础数学的一种新内容, 还可以视为探索 “广联系” 的一种理论基础, 实施体验的, 尽可能多方位, 的尝试.

虽然这本书中, 所有方程, 可以不考虑, 任何实际背景, 但在组合构形的计数中, 确有实际意义. 由于这些方程, 定性理论的普遍性, 任何适于这些方程的对象, 都可以用书中的理论结果, 与求解方法, 甚至还可以, 借用组合构形计数中, 已经发现的事实. 这就为我们广联系, 提供寻找值得注意新方向, 无际可能的, 发展空间.

专著 [500]组合泛函方程论 (20.07—20.21) 的核心基础, 在于将方程置于一个整域扩张上, 在一个给定的区域内, 建立初值问题, 或边值问题的定性原理, 并且通过, 对于不同类型, 内在结构的分析, 以统一的形式, 求出解的所有系数, 均有限正项和的表示.

全书, 除 20.07—20.08 和 20.20—20.23 这些技术性的编排外, 分五个主要方面.

第一、即 20.10—20.11, 为全书所公用的, 特有的基础知识, 与有关介子泛函的来龙去脉, 以及在将会用到的, 各种运算下, 内在结构性质.

第二、即 20.12—20.16, 讨论一些典型性的, 各种一元, 或多元函数方程, 差分方程, 常微分方程, 以至偏微分方程. 特别需要指出的, 与小亏格曲面上, 有关四角化方程, 都是新的.

第三、即 20.17, 所讨论的介子泛函方程, 都是线性的. 从原则上, 可以通过无穷阶矩阵的幂, 导出解的一个显式. 虽然有的幂, 已经得到了简洁显式, 通常求这些幂的展开式, 过于复杂. 不过在此书理论体系下, 所得的解都不复

杂, 而且尤其利于程序化, 以便通过计算机实现.

第四、即 20.18, 这里所讨论的介子泛函方程, 除一个例外, 都是非线性的. 虽然通过地图理论, 可以间接地, 推测出它们解的显式, 由于形式过于复杂, 不能令人满意. 不过仍然在这一理论体系下, 所得的解都不复杂, 而且尤其利于程序化, 以便通过计算机实现.

第五、即 20.19, 虽然这些介子泛函方程, 既有线性, 也有非线性的, 却都间接地, 得到了所有系数, 都是无和, 或有限正项和, 的显式. 不过从中隐含, 需要首先知道, 在给定的地图集合中, 所有自同构群的阶. 在这一理论体系下, 所得的解都不复杂, 而且尤其利于程序化, 便于通过计算机实现.

从 20.12 到 20.19, 每一款的中, 所有方程完成求解之后, 提供一个, 甚至数个实例, 尤其是与地图计数有关的实例, 以检验所得解的正确性.

虽然这一理论本身, 尚存在很多有待深化和扩展的问题, 这里的总体结果, 都是我上推 20 余年来, 所蒙昧以求的.

刘彦佩
2015 年 9 月
於北京上园村

第 廿 编目录

信阳师范学院学报(自然科学版) Journal of Xinyang Teachers College
第15卷 第1期 2002年1月 (Natural Science Edition) Vol. 15 No. 1 Jan. 2002

· 基础理论研究 ·

组合学中的一些泛函方程

刘彦佩

(北方交通大学 数学所,北京 100044)

摘 要:旨在提出一些泛函方程,它们是作者近10年来陆续发现的.现在已可以看出,它们当中任何一个的解决,不仅对泛函方程理论,而且对当今组合计数理论(已被证实,物质结构论、量子场论以及统计力学等有密切关系)的发展,将会带来新的突破.同时,也提出一些可能的发展方向和新近进展,以便引起人们对于组合学(包括经典计数理论、组合设计、组合序论、图论以及组合多面形理论等)的注意.

关键词:图;地图;计数;泛函方程;反演

中图分类号:O157 **文献标识码**:A **文章编号**:1003-0972(2002)01-0001-11

0 引言

组合学作为数学的一个分支,主要研究数(shǔ)的方法和技巧.虽然数源于数(shǔ),但在数学发展的历史长河中,贯穿着对于数的极其丰富多采的研究.当然,形则视为数的体现.这一点,早已被 Pythagoras 所揭示.正是由于对数研究的充分发展,愈来愈显示了数的形态的多样性.数(shǔ)数的形态就愈来愈不可回避.由于有时识别两个形态是否相同都远非容易,更不用说数(shǔ)它们了.这就不能不研究数(shǔ)的方法和技巧.从而,组合学才开始了新的发展,以至联系到了数学的几乎所有经典分支而产生新的分支.诸如组合数论、代数组合学、组合拓扑、组合集合论、组合几何、组合分析、组合泛函方程等.

这里,不拟谈论组合学的总体发展,当然也是作者能力所不及,而是从一个侧面反映组合学与数学一些基本分支的不解之缘.

先从几个世纪以来未被人们足够注意的 Blissard 运算谈起.所谓 Blissard 运算,就是为便于对于序列的指数型生成函数进行运算而引进的一种符号,记为 Γ. 设 $A_n, n\geqslant 0$,是一个序列.它的生成函数为

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{A_n}{n!}x^n \tag{1}$$

这时,$\Gamma A_n=A^n, n\geqslant 0$. 因为 f 是 $A_n, n\geqslant 0$,的线性形式,Γ 可视为一个线性算子.从而有

$$\Gamma f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{A^n}{n!}x^n=e^{Ax} \tag{2}$$

由此,将生成函数间的运算可以转换成初等函数间的运算.

近代,首先注意到这个算子在组合学研究中的意义的是 Rota[Rota[1],1964]. 由它发起,自20世纪60年代以来,开始和正在形成着一种新的代数[Rota,et al[2],1975].

例如,用这种算子数(shǔ)一个集合的划分数就十分简捷.事实上,Γ 可以视为函数空间中的一个泛函.

设要数(shǔ)集合 S,$|S|=n$,有多少个划分,可以考虑 $S\to U$ 的所有单值映象的集合 U^S,$|U|=u$. 因为任何一个单值映象均确定 S 上的一个划分.然而反之,由 S 的一个划分 π,则可以产生 $(u)_{n(\pi)}=u(u-1)\cdots(u-n(\pi)+1)$ 个单值映象,其中 $n(\pi)$ 为划分 π 所含子集的数目.这样,有

$$\sum_{\pi}(u)_{n(\pi)}=u^n \tag{3}$$

利用 Blissard 算子 Γ,有 $\Gamma u^n=u_n, n\geqslant 0$. 由于 $1=(u)_0,(u)_1,(u)_2,\cdots(u)_n$ 形成 n 次多项式空间的一组基,总可取 $\Gamma(u)_i=1, i=0,1,\cdots,n$. 这样,即得 u_n 为 S 的划分数.

收稿日期:2001-07-02
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19831080)
作者简介:刘彦佩(1939-),男,天津人,教授,国评博导,主要从事数学运筹学、组合学与最优化等方面的研究.

第 15 卷 第 1 期　　信阳师范学院学报(自然科学版)　　2002 年 1 月

另一方面，由于 $\Gamma u(u-1)_l=\Gamma(u)_{l+1}, l=0,1,\dots,n$，可以看出对任意多项式 $P(u)$，均有

$$\Gamma u P(u-1)=\Gamma P(u) \tag{4}$$

若取 $P(u)=(u+1)^n$，则可得

$$\Gamma u^{n+1}=\Gamma(u+1)^n \tag{5}$$

由这个泛函的线性性，即有

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k \tag{6}$$

若约定 $u_0=1$，则有这个递推公式，即可求出 $u_n, n\geqslant 1$. 这就是

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
u_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	$\cdots$

进而，还可以求出 u_n 的显式. 因为

$$\mathrm{e}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{(k)_n}{k!}$$

对任何整数 $n\geqslant 0$ 成立，可知

$$1=\Gamma(u)_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(k)_n}{k!}.$$

又，因为 $(u)_l, l\geqslant 0$，为函数空间的一组基和 Γ 的线性性，有 $\Gamma P(u)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k\geqslant 0}\frac{P(k)}{k!}$，其中 $P(u)$ 可为 u 的任一多项式. 只要取 $P(u)=u^n$，即可得

$$u_n=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^n}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^{n-1}}{(k-1)!} \tag{7}$$

这就是 Dobinski 公式[Dobinski[1].1877]，其中 u_n 被称为 Bell 数，因为它是由 Bell 首先对这个数作过系统的研究[Bell[1~3].1934~1938].

现在，将这种泛函从多项式拓广到无穷级数所组成的空间. 令 $\mathscr{L}$ 为由 $\{1,y_1,y_2,\dots\}$ 在整数环 R 上生成的向量空间和 $\mathscr{Y}$ 为由 $\{1,y,y^2,\cdots\}$ 在 R 上生成的函数空间. 记 $\int_y$ 为从 $\mathscr{Y}$ 到 $\mathscr{L}$ 的一个泛函使得

$$\int_y y^i=\begin{cases}y_i, i\geqslant 1;\\ 1, i=0.\end{cases} \tag{8}$$

对此，近 10 年来，从组合构形，主要是地图的计数中发现了一批带这种泛函的方程. 有些已经给出了解法. 然而，也有一批看上去求解十分困难. 可以预料，只要它们当中任何一个可以确定出解的显式，则将对其余的产生本质的影响. 从中，体现了组合学与数论、代数、几何、拓扑以及泛函等基础数学分支的不可分割的联系. 反映了数学本身的一体性.

1 一个范例

下面，用一个例子来说明本文拟提出并需要进一步解决的一系列问题. 若函数 $f=f(\underline{y}), \underline{y}=(1,y_1,y_2,\dots)$，满足方程

$$f=1+\int_y\frac{y^2f}{1-yf} \tag{9}$$

则试问如何求解出 f 的形式. 注意，在泛函下的 f 不是 y 的函数.

所谓 f 的形式是指确定出 $F(\underline{n})\in R, \underline{n}=(n_1,n_2,\dots)\in R^\infty$，使得

$$f=\sum_{\underline{n}\in R^\infty}F(\underline{n})\underline{y}^{\underline{n}} \tag{10}$$

其中，$\underline{y}^{\underline{n}}=\Pi_{i\geqslant 1}y_i^{n_i}$.

当然，首先要论证方程(9)对于形式(10)的解之适定性. 这一点可以做到. 尔后，就是如何求出这些系数.

由于(9)可展开成

$$f=1+\sum_{j\geqslant 1}y_{j+1}f^j, \tag{11}$$

可用 Lagrange 反演[Whittaker.E.T.et al[1]]，得

$$f=1+\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\xi^{m-1}}\Big(\sum_{k\geqslant 1}y_{k+1}\xi^k\Big)^m\Big|_{\xi=1} \tag{12}$$

因为在(12)中的 $m-1$ 阶导数在 $\xi=1$ 处之值为

$$\sum_{\substack{\underline{n}\in R_{s-m+1}\\ s\geqslant m-1}}\frac{m!s!}{(s-m+1)!\underline{n}!}\underline{y}^{\underline{n}}. \tag{13}$$

其中，$\underline{n}!=n_1!\,n_2!\dots$ 和 $\mathscr{R}_{s-m+1}=$

$$\{\underline{n}\in R^\infty\mid\sum_{j\geqslant 1}n_j=m, \sum_{j\geqslant 1}jn_{j+1}=s, 0\leqslant n_j\leqslant m, j\geqslant 1\}, \tag{14}$$

可得

$$F(\underline{n})=\begin{cases}\dfrac{s!}{(s-m+1)!\ \underline{n}!}, \underline{n}\in\mathscr{R}_{s-m+1}\\ 0, 否则.\end{cases} \tag{15}$$

从而，方程(9)的形式如(10)的解就得到了.

如此看来，似乎带泛函 $\int_y$ 的方程均可以用如上的思路求解. 事实上，虽然这种思路具有一定的一般性，不过通常由于将它展开之后十分复杂，以及即使不甚复杂也难用反演法求出明显的表达式. 这就不能不研究如何将之转化为可以用上述过程，或者能确定出解的意义而用间接的方法以求其解.

下面，我们还会看到方程(9)可以通过研究在平面上的一种地图的计数函数而求得它的解.

2 地图

所谓一个地图，可以看作是在某类有限集上具有特定性质的置换．令集合

$$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$$

被称为基准集．记

$$K=\{1,\alpha,\beta,\delta\}(\delta=\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha\alpha=\beta\beta=1),$$

为 Klein 四元群．由此，可得

$$\chi=\bigcup_{i=1}^{n}Kx_i \tag{16}$$

被称为基本集．其中，$Kx_i=\{x_i,\alpha x_i,\beta x_i,\delta x_i\}$，被称为四元胞腔．令 $\mathscr{J}$ 为 χ 上的一个置换使得对任何 $x\in\chi$ 不存在整数 i，$\mathscr{J}^i x=\alpha x$. 若 $\mathscr{J}$ 满足如下的二个公理，则称之为一个地图．或更准确地，记为 $M=(\chi_{\alpha,\beta}(X),\mathscr{J})$.

公理 1 $\mathscr{J}\alpha\mathscr{J}=\alpha$.

公理 2 $J=\{\mathscr{J},\alpha,\beta\}$ 的生成群，记为 Ψ_J，在 χ 上可迁．

由于任何一个置换均可以表示为循环（置换）的乘积，依公理 1 可知，若

$$(x,\mathscr{J}x,\mathscr{J}^2x,\cdots,\mathscr{J}^t x)$$

表示 $\mathscr{J}$ 的一个循环，则

$$\begin{aligned}&(\alpha x,\alpha\mathscr{J}^{-1}x,\alpha\mathscr{J}^{-2}x,\cdots,\alpha\mathscr{J}^{-t}x)\\&=(\alpha x,\mathscr{J}\alpha x,\mathscr{J}^2\alpha x,\ldots,\mathscr{J}^t\alpha x)\end{aligned}$$

也表示 $\mathscr{J}$ 的一个循环．由对称性，称这样的二个循环为共轭对．

性质 1 对任何地图 $(\chi_{\alpha,\beta}(X),\mathscr{J})$，表示置换 $\mathscr{J}$ 的循环由共轭对组成．

由于 α 和 β 本身可以看作为 χ 上的置换，可见 $\mathscr{J}\alpha\beta$ 也是 χ 的一个置换．可以验证，$\mathscr{J}\alpha\beta$ 不是地图．事实上，$\mathscr{J}\alpha\beta$ 不满足公理 1. 这就使我们称 α 为第一运算和 β 为第二运算．相仿地，可以证明

性质 2 对任何地图 $(\chi_{\alpha,\beta}(X),\mathscr{J})$，表示 $\mathscr{J}\alpha\beta$ 的循环由共轭对组成．

根据性质 1，我们可以称 $\mathscr{J}$ 的每个共轭对为一个顶点．和根据性质 2，将 $\mathscr{J}\alpha\beta$ 的每个共轭对称为面，或区域．$\chi_{\alpha,\beta}(X)$ 中的每个四元胞腔称为边，或棱．一条边 Kx，若 βx 或 δx 与 x 同出现在一个顶点中，则称它为环；否则，为杆．例如，由一条环组成的地图只可能有如下 2 个：

$$\mathscr{J}_1=(x,\beta x)(\alpha x,\delta x)\text{和}\ \mathscr{J}_2=(x,\delta x)(\alpha x,\beta x).$$

为简便，常用 $\mathscr{J}$ 的每一对共轭循环取个代表来表示它．例如，上面二地图可分别写为

$$\mathscr{J}_1=(x,\beta x)\text{和}\ \mathscr{J}_2=(x,\delta x).$$

若用 V，E 和 F 分别记为一个地图 $M=(\chi_{\alpha,\beta}(X),J)$ 的顶点集，边集和面集，则

$$\chi(M)=|V|-|E|+|F| \tag{17}$$

被称为 M 的 Euler 示性数．

性质 3 任何一个地图 M，均有

$$\chi(M)\leqslant 2. \tag{18}$$

当 Euler 示性数为 2 时的地图，被称为平面的．记 $L=\{\mathscr{J},\delta\}$ 和 Ψ_L 为由 L 生成的群．

性质 4 在 $\chi_{\alpha,\beta}(X)$ 上，若 Ψ_L 不可迁，则必有 2 个轨道．

据此，可以将地图分为 2 类．一曰，可定向的，当有 2 个轨道时；不可定向的，否则．

由于可以证明，任何可定向地图 M 均有

$$\chi(M)=0(\mathrm{mod}\ 2), \tag{19}$$

可定义 $p(M)=(2-\chi(\mathrm{M}))/2$ 为 M 的可定向亏格．在 M 为不可定向之情况下，

$$q(M)=2-\chi(M)$$

定义为不可定向亏格．由性质 3 和(19)可知 $p(M)$ 和 $q(M)$ 均为非负整数．

由于可以验证，对任何一个地图 $M=(\chi_{\alpha,\beta}(X),\mathscr{J})$，均可派生一个地图

$$M^*=(\chi_{\beta,\alpha}(X),\mathscr{J}\alpha\beta).$$

称 M^* 为 M 的对偶．而且，M 也是 M^* 的对偶，其理由是

$$(\mathscr{J}\alpha\beta)\alpha\beta=\mathscr{J}\alpha\beta^2\alpha=\mathscr{J}\alpha^2=\mathscr{J}.$$

性质 5 一个地图是平面的，当且仅当，它的对偶是平面的．

两个地图 $(\chi_{\alpha,\beta}(X_1),\mathscr{J}_1)$ 和 $(\chi_{\alpha,\beta}(X_2),\mathscr{J}_2)$，之谓同构，即指存在一个双射（或者说 1－1 映象）

$$\tau:\chi_{\alpha,\beta}(X_1)\to\chi_{\alpha,\beta}(X_2),$$

使得如下之形式

$$\begin{tikzcd}
\chi_{\alpha,\beta}(X_1) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \chi_{\alpha,\beta}(X_2) \arrow[d, "\gamma_2"] \\
\chi_{\alpha,\beta}(X_1) \arrow[r, "\tau"'] & \chi_{\alpha,\beta}(X_2)
\end{tikzcd}$$

对于 $\gamma_1=\gamma_2=\alpha$，$\gamma_1=\gamma_2=\beta$ 和 $\gamma_1=\mathscr{J}_1$，$\gamma_2=\mathscr{J}_2$ 均是可交换的．当 $M_1=M_2$ 时的同构被称为自同构．易验证，一个地图 M 的所有自同构形成一个群．我们称之为 M 的自同构群，一般记为 $\mathrm{Aut}(M)$. 若 $\mathrm{Aut}(M)$ 只含单位元，则意味 M 只有一种表示．一般而言，$\mathrm{Aut}(M)$ 不只含单位元．从而，M 有多种表示，如何区分 M 的所有表示呢？这就使我们将 M 的基本集 χ 中的一个元素给以特别的标识，称之为 M 的根，用 r 表示，两个带根的地图 M_1 和 M_2 之谓

第 15 卷 第 1 期 信阳师范学院学报(自然科学版) 2002 年 1 月

同构是指它们的基本集之间有双射 τ 不仅满足(20)而且满足 $\tau(r_1)=r_2$. 其中 r_1 和 r_2 分别为 M_1 和 M_2 的根.

性质 6 对于任何一个带根地图 M,均有 $\mathrm{Aut}(M)=1$,即仅由单位元组成的群.

由此可见,带根地图的表示是唯一的.

3 泛函方程

3.1 一个地图被称为外平面的,是指它是平面的,而且存在一个面使得所有节点均与此面关联.所谓关联是指有公共基本元.若一个地图 M,它的基准图(由 M 的顶点作为节点和四元胞腔为边所构成的图)是不可分离的,即无割点,则称 M 是不可分离的.令 $\mathrm{Out}(\mathscr{M})$ 为所有带根的不可分离外平面地图的集合.对于 $M\in\mathrm{Out}(\mathscr{M})$,令 $n(M)$ 为与根关联的顶点,简称根点的度(与之关联的基准元之数目).用 $n_i(M)$ 表示度为 i 的非根顶点的数目,$i\geqslant 2$. 为方便,且不失一般性,规定节点地图(只一个节点而无边之退化情形)和杆地图(只有一边且为杆) $L=(Kx,(x)(\alpha\beta x))$ 不在,但环地图 $L_0=(Kx,(x,\alpha\beta x))$ 确在 $\mathrm{Out}(\mathscr{M})$ 中.研究函数

$$f_{\mathrm{Out}(M)}(x,\underline{y})=\sum_{M\in\mathrm{Out}(M)}\mathrm{x}^{n(M)}\underline{y}^{\underline{n}(M)}. \tag{21}$$

其中,$\underline{n}(M)=(n_1(M),n_2(M),\ldots)$, $\underline{y}=(y_2,y_3,\ldots)$ 和

$$\underline{y}^{\underline{n}(M)}=\prod_{i\geqslant 2}y_i^{n_i(M)} \tag{22}$$

由(21)所定义的被称为这类地图的第一类计数函数.

定理 1 关于 f 的泛函方程

$$f=x^2+x\int_y\frac{y}{1-xy}\partial_{x,y}f, \tag{23}$$

其中

$$\partial_{xy}f(z)=\frac{yf(x)-xf(y)}{x-y} \tag{24}$$

定义为 f 的 $\langle x,y\rangle$-差分,在整级数环中是适定的.并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Out}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

方程(23)被称为第一类外平面方程[Liu[10],1987].

虽然(23)可将 $f(x,\underline{y})|_{x=y}$ 视为空间 $\mathscr{Y}$ 中之元素而求得 y^i 的系数 F_i 用仅与 $\underline{y}$ 有关的矩阵表示的显式.但由此如何得到 F_i 中 $\underline{y}^{\underline{n}}$ 的系数 $F(\underline{n})$ 之显式确非易事.

另一方面,若考虑 $\mathrm{Out}(\mathscr{N})$ 作为所有不可分离外平面地图之集合.但,它不含环地图 L_0 和节点地图而含杆地图 L. 不用(21)所确定的函数 $f_{\mathrm{Out}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 而用

$$h_{\mathrm{Out}(\mathscr{N})}(x,\underline{y})=\sum_{N\in\mathrm{Out}(\mathscr{N})}x^{m(N)}\underline{y}^{\underline{m}(N)}, \tag{25}$$

其中 $m(N)$ 和 $m_i(N)$, $i\geqslant 2$, $\underline{m}(N)=(m_2(N),m_3(N),\ldots)$,分别为根面之度和度为 i 的非根面之数目.这时,称(25)为这类地图的第二类计数函数.

定理 1′ 关于 h 的泛函方程

$$h=x^2+x\int_y\frac{y^2h}{x-yh} \tag{26}$$

在整级数环中是适定的.并且,其解为 $h=h_{\mathrm{Out}(\mathscr{N})}(x,\underline{y})$.

方程(26)被称为第二类外平面方程[Liu[13],1989].

如果不考虑根面的次,即 $h_{\mathrm{Out}(N)}(1,\underline{y})$ 恰当上一节方程(9)的解.对于(26),只要引进 $g=h/x$ 替代 h,可得适用于 Lagrange 反演而求出解之显式.

3.2 令 $\mathrm{Gen}(\mathscr{M})$ 为一般带根平面地图的集合.之谓一般是指环与重边均被允许的.自然,节点地图含在内作为退化之情形.

定理 2 关于 f 的泛函方程

$$f=1+x^2f^2+x\int_y(y\delta_{x,y}(zf)), \tag{27}$$

其中

$$\delta_{x,y}f=\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \tag{28}$$

被称为函数 f 的 (x,y)-差分,在整级数环中是适定的.并且,其解为 $f=f\mathrm{Gen}(\mathscr{M})(x,\underline{y})$.

这就是所谓第一类泛平面方程 Liu[35], 1989.

3.3 若一个地图没有一条边是环,则称之为无环的.记 $\mathrm{Nol}(\mathscr{M})$ 为所有带根无环平面地图的集合(规定包含节点地图),和 $f_{\mathrm{Nol}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 为这个地图集合的第一类计数函数.

定理 3 若令 $f=f(x)=f(x,\underline{y})$, $\underline{y}=(y_1,y_2,\ldots)$,是一个表示为整系数无穷级数形式的函数,则泛函方程[Liu[14],1990]:

$$f=\int_y\frac{1}{1-\partial_{x,y}(z^2f)} \tag{29}$$

是适定的.并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Nol}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

方程(29)被称为第一类无环方程.

3.4 一个地图,之谓简单是指既无环又无重边.为方便,将节点地图 v 视为简单的.令 $\mathrm{Sim}(\mathscr{M})$ 为所有带根简单平面地图的集合,和 $f_{\mathrm{Sim}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 为 $\mathrm{Sim}(\mathscr{M})$ 的第二类计数函数.

定理 4 关于 f 的泛函方程[Liu[5],1987]

$$\left(\int_y((1+xy)f)-x^2f\right)f=\int_y(f+xy\delta_{x,y}(zf)) \tag{30}$$

在整级数环中是适定的. 并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Sim}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

方程(30)被称为第二类简单方程. 自然,在上式中,泛函下的 $f=f(y)$ 和运算 $\delta_{x,y}$ 下的 $f=f(z)$. 它虽然并不比到这里为止所遇到的其它方程简单. 但由于此方程与简单平面地图的计数密切相关,故而得名.

3.5 令 $\mathrm{Nes}(\mathscr{M})$ 为所有带根不可分离平面地图的集合. 当然,节点地图不在这里考虑. 为便利,规定环地图 $L_1=(Kr,(r,\delta r))$ 在其中,而杆地图 $L=(Kr,(r)(\delta r))$ 确不在. 记 $f_{\mathrm{Nes}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 为 $\mathrm{Nes}(\mathscr{M})$ 的第一类计数函数.

定理 5 关于 f 的方程

$$f=x^2+x\int_y\frac{y\partial_{x,y}f}{1-\partial_{x,y}f} \tag{31}$$

在整级数环中是适定的. 并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Nes}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

方程(31)被称为第一类不可分离方程[Liu[7],1985].

3.6 所谓泛 Euler 方程是指一般 Euler 平面地图依节点或面剖分计数函数满足的泛函方程. 同样,前者为第一类的,而后者为第二类的. 不过,为方便,记第一类的计数函数为

$$f_{\mathrm{Eul}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})=\sum_{M\in\mathrm{Eul}(\mathscr{M})}x^{2n(M)}\underline{y}^{\underline{n}(M)}, \tag{32}$$

其中 $2n(M)$ 为根点度, $\underline{n}(M)=(n_0(M),n_2(M),\ldots,n_{2i}(M),\ldots)$, $n_{2i}(M)$ 是 M 中度为 $2i$ 的非根节点的数目, $i\geqslant 0$.

一个地图,若每个节点的度均为偶数则称之为 Euler 的. 一般 Euler 地图是指环和重边都是允许的. 同时,为方便规定节点地图 υ 含在其中. 记 $\mathrm{Eul}(\mathscr{M})$ 为所有带根一般 Euler 平面地图的集合.

定理 6 关于 f 的方程

$$f=1+x^2f^2+x^2\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}f(\sqrt{z}) \tag{33}$$

其中 $f(\sqrt{z})=f(\sqrt{z},\underline{y})$,在整级数环中是适定的. 并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Eul}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

方程(33)被称为第一类泛 Euler 方程[Liu[35],1989].

然而,沿用这里之分解以及对偶形式,看来难以确定出第二类一般 Euler 带根平面地图的计数函数所应满足的方程,即第二类泛 Euler 方程.

十分有趣地,Tutte 已提供了第一类一般 Euler 带根平面地图计数函数之形式[Tutte[2],1962]. 事实上,若 $2n$ 为根点度和 n_{2i} 为度为 $2i$ 的非根节点的数目,则这种一般带根 Euler 平面地图的数目为

$$\frac{(\varepsilon-1)!}{(\varepsilon-\upsilon+2)!}\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\prod_{i\geqslant1}\frac{1}{n_{2i}!}\left(\frac{(2i-1)!}{i!(i-1)!}\right)^{2n_i} \tag{34}$$

其中 $\varepsilon=n+\sum_{i\geqslant1}in_{2i}$ 和 $\upsilon=\sum_{i\geqslant1}n_{2i}$ 分别为地图的度(边数)和阶(节点数).

若记(34)给出的数为 $E(n,\underline{n})$,则可以猜想方程(33)之解为

$$f_{\mathrm{Eul}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})=\sum_{n\geqslant0,\underline{n}\geqslant0}E(n,\underline{n})x^{2n}\underline{y}^{\underline{n}}, \tag{35}$$

其中 $\underline{n}=(n_0,n_2,n_4,\ldots)$.

不管怎样,如何从方程(33)直接解出(35)来,仍是一个未解之迷[Liu[29],1993].

3.7 令 $\mathrm{Ens}(\mathscr{M})$ 为所有带根不可分离 Euler 平面地图的集合. 在 $\mathrm{Ens}(M)$ 中,最小的地图为 $L_1=(Kr,(r,\delta r))$,环地图. 记 $f_{\mathrm{Ens}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 如为(32)形式的第一类计数函数.

定理 7 关于 f 的方程

$$f=x^2+x^2\int_y\frac{y^2\delta_{x^2,y^2}f}{(1-\partial_{x^2,y^2}f)^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f)^2}, \tag{36}$$

其中在运算 ∂ 和 δ 之下 $f=f(\sqrt{z})=f(\sqrt{z},\underline{y})$,在整级数环中是适定的. 并且,其解为 $f=f_{\mathrm{Ens}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

这就是所谓不可分离 Euler 方程. 当然它还是第一类的[Liu[9],1986].

因为不可分离 Euler 地图自然是不可分离地图,而且 Euler 性仅由节点度刻划. 这就可以看出从不可分离方程(31)的解可以直接得到(30)的解,但反之并非然. 因此,方程(36)具有独立性.

同样,因为至今尚不能通过计数确定出这个函数. 对(36)解的形式,仍未可知. 当然,更未发现方程(36)的直接求解方法,

3.8 令 $\mathrm{Enl}(\mathscr{M})$ 为所有带根无环 Euler 平面地图的集合,和 $f_{\mathrm{Enl}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$ 为它的第一类计数函数. 其形式如(32)所示.

定理 8 下面关于函数 f 的泛函方程已被证明在整(系数无穷)级数环中是适定的:

$$f=\int_y\frac{1}{1-\dfrac{\partial_{x^2,y^2}(zf)+x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(zf^2)}{1-\partial_{x^2,y^2}(zf)}} \tag{37}$$

其中，δ_{x^2,y^2}和∂_{x^2,y^2}分别为(x^2,y^2)-差分和(x^2,y^2)-差分，如(36)．并且，其解为$f=f_{\mathrm{Eul}(\mathscr{M})}(x,\underline{y})$.

此方程首见于 Liu[30]，1992．但，在那里有重复部分．在这里，已给出了纠正．

事实上，可以证明$f(x)$中所有x的幂均为偶数．这个方程被称为无环 Euler 方程．当然，也是属于第一类的．

4 已经取得的进展

4.0 由于上面的泛函方程一般而言直接求解尚没有有希望的思路．致使对于这些方程的主要研究均围绕着这个一般函数之各种变异甚至特殊情形下之形态．通常是通过探求解函数方程的方法来确定出相应的计数函数．多数情形是成功的．总而言之，讨论对于地图集合M的第一类计数函数$f_{\mathscr{M}}(x,\underline{y})$之如下有关一般情形．

(*a*)最简单的是通过替换$y_i=\sqrt{y^i}$，$i\geqslant 0$．这时，$\underline{y}=(1,\sqrt{y},\sqrt{y^2}),\cdots$，记这个$x$和$y$的函数为

$$\Phi_{\mathscr{M}}(x,y)=f_{\mathscr{M}}(x\sqrt{y},\underline{y})=\sum_{M\in\mathscr{M}}x^{n(M)}y^{l(M)} \tag{38}$$

其中$n(M)$为M的根点度和$l(M)=\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 0}in_i(M)$为$M$的总边数．特别地，当$x=1$时$\Phi^{*}_{\mathscr{M}}(y)=\Phi_{\mathscr{M}}(1,y)$为$\mathscr{M}$的依边数的计数函数．

(*b*)若取所有$y_i=y$，$i\geqslant 0$，则记这时的函数

$$\Psi_{\mathscr{M}}(x,y)=\sum_{M\in\mathscr{M}}x^{n(M)}y^{s(M)} \tag{39}$$

其中，$s(M)=\sum_{i\geqslant 1}n_i(M)$为非根节点的数目．特别是当$x=1$时，$\Psi^{*}_{\mathscr{M}}(y)=\Psi_{\mathscr{M}}(1,y)$是$\mathscr{M}$的以非根节点数为参数的计数函数．

(*c*)若取$y_i=y\delta_{ik}$，$i\geqslant 1$，δ_{ik}为 Kronecker 符号，其中k为给定的一个正整数，则这时$f_{\mathscr{M}}(x,\underline{y})$变为

$$\Lambda^{(k)}_{\mathscr{M}}(x,y)=\sum_{M\in\mathscr{M}}x^{n(M)}y^{s(M)}, \tag{40}$$

即近k-正则地图的计数函数．且，$n(M)$和$s(M)$分别为根点度和非根节点数．特别地，

$$\bar{\Lambda}^{(k)}_{\mathscr{M}}=\partial_x^k\Lambda^{(k)}_{\mathscr{M}}(x,y),$$

即k-正则地图的计数函数．其中，∂_x^k表示取$\Lambda^{(k)}_{\mathscr{M}}(x,y)$中$x^k$项之系数的运算．

(*d*)当然，还可研究参数更多的计数函数，如根点度，根面度，非根节点数和非根面数 4 个参数的，或者从它们中取 3 个作为参数，或者取根点度，根面度和边数为参数．

(*e*)关于怎样的结果算作进展，自然不会有绝对的标准，而是随研究的发展而变化．在初期即使是发现一个单参数的式子都可称为是一次突破．到今天已经发现了一批方程使得问题之解决途径愈来愈多．从而，重点转向 2，3 个甚至 4 个参数的情形．当然，最重要的当是对于上述提出的一系列泛函方程的研究．就结果本身的价值，首要的是确定出计数函数系数的无和表示．然后正项和的表示．或尽量简单的递推式．最无碍的就是交错和之显式．为了求得好的结果，重要的是发现合适的参数表达式，以便直接反演而求出显式，甚至理想的显式(Liu[29]，[35-36])．

4.1 关于一般平面地图，带根情形依边数的无和表示首先是 Tutte[3](1963)给出的．它就是$m\geqslant 0$条边的带根一般平面地图的数目为

$$\frac{2\cdot 3^m(2m)!}{(m+2)!\ m!} \tag{41}$$

从经验上找出这个公式，尔后予以证明．之后，Liu[12](1982)，先导出函数方程，通过求解而得到．其方程如下式：

$$x^2y(1-x)f^2-(1-x+x^2y)f+xy^{*}-x+1=0. \tag{42}$$

同时，也给出了 2 个参数的公式，但相当复杂．Cori[1](1969)从括号系统之角度进行这种计数．进而，Tutte[2](1963)，Mullin 和 Schellenberg[1](1968)，从不同角度讨论了 3-连通的情形却得到相同的递归公式．之后，Liu[1](1984)提供了正项和显式．

近来，蔡俊亮得到了一些更简单的结果[Cai[1],1998]．

4.2 在一般无环的情形，Liu[30](1992)提供了一个带三个变量函数的方程

$$\begin{aligned}x^2zf^2+(1-x-xzf^{*}+x^2(y-z))f\\+x-x(y-z)f^{*}-1=0.\end{aligned} \tag{43}$$

它的解应该是

$$\Omega_{\mathscr{L}}(x,y,z)=\sum_{M\in\mathscr{L}}x^{n(M)}y^{s(M)}z^{q(M)} \tag{44}$$

使得$n(M)$，$s(M)$和$q(M)$分别为M的根点度，非根节点数和非根面数．这里，$\mathscr{L}$表示带根无环平面地图的集合．

若取$y=z$在(43)中，则可以导致依根点度和边数计数函数所满足的方程 Liu[6](1984)．由此，可得依边数的无和显式(Liu[4](1985)和 Liu[14](1987))．这 2 篇用的是间接的方法．这就是带根无环具有$m\geqslant 1$条边的平面地图的数目为

$$\frac{6(4m+1)!}{(3m+3)!\ m!}. \tag{45}$$

同时,Bender 和 Wormald[1](1985)也得到了此式.

4.3 关于简单地图的情形,Liu[6](1984)首先是间接地确定了带根简单具有 $m\geqslant1$ 条边平面地图的数目为

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{4(2m+3)!\ (2m-i-2)!}{i!\ (m-i-1)!\ (2m-i+3)!} \tag{46}$$

这是一个正项和的形式.然而,至今尚未发现无和的单项式.之后,他发现了这种地图集合 M_{sim} 的计数函数 $\Omega_{\mathscr{M}\text{sim}}(x,y,z)$ 满足如下对于 $f=f(x,y,z)$ 和 $f^*=f(1,y,z)$ 的方程:

$$\begin{aligned}&x^2(1-x)yf^2-((1-x)(1-z)\\&\quad+x^2z+(1-x^2)zf^*)f\\&\quad+(1-x)(1-z)+zf^*=0.\end{aligned} \tag{47}$$

在 Liu[5](1985),进而 Liu[15](1987)中,他还导出了这种地图依根面度与边数的计数函数 $\Phi_{\mathscr{M}\text{sim}}(x,y)$ 连同

$$\Phi^*_{\mathscr{M}\text{sim}}(y)=\Phi_{\mathscr{M}\text{sim}}(1,y)$$

满足关于 f 和 f^* 的方程:

$$\begin{aligned}&x^2y(1-x)f^2-(x^2y+(1-x)(1+xy)f^*)f\\&\quad+(1-x+xy)f^*=0.\end{aligned} \tag{48}$$

由此出发也可推出(47).

4.4 至于一般不可分离平面地图,第一个显式是带一个参数的.由 Tutte[3](1963)用的经验方法发现的.即,给出了具有 $m\geqslant1$ 条边的带根不可分离平面地图的数目为

$$\frac{2(3m-3)!}{(2m-1)!\ m!}. \tag{49}$$

之后,Liu[6](1984)从他所建立的方程出发又得到了此式.

二个参数,节点数和面数,通过双参数的 Lagrange 反演,首先由 Brown&Tutte[1](1964)给出.若记 $i+1$ 和 $j+1$ 分别为节点数与面数,则此公式为

$$\frac{(2i+j-2)!\ (2j+i-2)!}{i!\ j!\ (2i-1)!\ (2j-1)!} \tag{50}$$

事实上,由这类地图对节点与对面的对称性,从节点数与面数之和与边数差 2,(49)已暗示为

$$\frac{2(3i+3j-3)!}{(2i+2j-1)!\ (i+j)!} \tag{51}$$

从而,可知(51)与(50)对所有 $i,j\geqslant0$ 使得 $i+j=k$ 的求和是相等的.不过反之,如何从(51)推断出(50),尚待研究.

4.5 对于一般 Euler 地图,Liu[20](1989)发现了这种地图的对偶,一般二部地图集合 $\mathscr{B}$ 依根面度与边数的计数函数 $\Phi_{\mathscr{B}}(x,y)$ 与 $\Phi^*_{\mathscr{B}}(y)=\Phi_{\mathscr{B}}(1,y)$ 满足如下关于 f 和 f^* 的方程

$$\begin{aligned}&yx^2(x-1)f^2+(yx^2-x^2+1)f\\&\quad+x^2-1-x^2yf^*=0.\end{aligned} \tag{52}$$

由此方程出发,得到了边数为 $m\geqslant1$ 的这种地图的数目:

$$\frac{3\cdot2^{m-1}(2m)!}{m!\ (m+2)!} \tag{53}$$

之后,Bender 和 Canfield[1](1993);[2](1994)重得了这个公式.

至于 f 本身之形式,在 Liu[23](1992)中给出了.虽然是无和形式但比较复杂.不好占这里之篇幅.

关于 Euler 平面地图,Liu[18](1992)通过二参数之 Lagrange 反演给出了具有 m 个非根节点和 n 个非根面的一般 Euler 平面地图之数目为

$$\begin{aligned}&2^{n-1}\frac{(m-1)(n-1)}{(m+1)(n+1)}\binom{m+n+2}{m-1}\binom{m+n}{m}\\&+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{2^i}{m}\binom{m+i-1}{i}\binom{2n+m-i-2}{n-i-1}\binom{m+n-1}{m-1}A_i^{m,n},\end{aligned} \tag{54}$$

其中

$$\begin{aligned}A_i^{m,n}=&\frac{m}{m+1}\frac{(3i+2-2n)m+2n+i(i-2)}{n+1}\\&+\frac{4n-i(i+3)-2}{(n+1)(m+1)}.\end{aligned} \tag{55}$$

然,这种情形下,节点与面无对称性.虽从(54)也可得(53),但(54)不是 m 和 n 的对称函数.

4.6 对于无环 Euler 地图的集合 ε,在 Liu[20](1989)中讨论的是对偶情形,给出了方程但未得到甚至一个参数的好的显式.之后,在 Liu[30](1992)中,得到 $\Phi_\varepsilon(x,y)$ 和 $\Phi^*_\varepsilon(y)=\Phi_\varepsilon(1,y)$ 满足如下对于 f 和 f^* 的 3 次方程:

$$\begin{aligned}&x^4y^2f^3+2x^2yf^2\\&+(1-x^2-x^2y-2x^2yf^*-x^2y^2f^{*2})f\\&=1-x^2-x^2yf^*.\end{aligned} \tag{56}$$

并且,用间接方法确定出了 f^*.从而,得到有 $l\geqslant1$ 条边的这种地图之数目 Liu[28](1992):

$$3\sum_{j=0}^{\lfloor(l-2)/2\rfloor}\frac{(2l+1-j)(4j-l+4)-2}{n(n+1)(n+2)}\binom{2l+j}{j}\binom{2l-2j-2}{l}. \tag{57}$$

这个和是否可以求出尚未可知.

4.7 关于不可分离 Euler 地图的集合 $\mathscr{N}$,首先是

第 15 卷 第 1 期　　信阳师范学院学报(自然科学版)　　2002 年 1 月

通过其对偶性而得到所满足的方程(Liu[20](1989)). 然后，在 Liu[29](1993)中，对于计数函数

$$\Omega_{\mathcal{N}}(x,y,z)=\sum_{M\in\mathcal{N}}x^{m(M)}y^{n(M)}z^{s(M)} \tag{58}$$

找到一个确定 f 和 f^* 的方程：

$$f=x^2z+x^2y\frac{f-f^*}{x^2(1+f^*)^2-(1+f)^2} \tag{59}$$

若取 $y=z$，则有

$$f=x^2y\left(1+\frac{f-f^*}{x^2(1+f^*)^2-(1+f)^2}\right) \tag{60}$$

它也是一个三次方程．虽然，得到了 $\Phi^*_{\mathcal{N}}(y)$，即依非根节点数之计数．但结果是一交错项和之式子．在 Liu[28](1989)中，没有给出简单的表达式．

近来，蔡俊亮取得了新的进展[Cai[1]1998].

4.8　就泛函方程而论，除前二节指出的已经完满地解决的情形外，对于树的情形也得到了完满地解决．不过，最早的结果是由直接计数而得到的(Harary&Tutte[1](1964)，Harary，Prins&Tutte[1](1964)，Tutte[4](1964)，Kozyrev[1](1986)). 而从方程直接解出，则是在二十年之后(Liu[8](1985)). 另外，冬梅地图也完满地解决了．关于各种外平面地图的第一类方程，均给出了矩阵显式(Liu[10](1987)，[16](1989)). 在这些文章中，以及董峰明与彦基义[1](1989)还提供了一些一至三个参数的无和显式．

4.9　三角剖分早在 20 世纪 60 年代初 Tutte[1](1962)就开始研究．后来经过 Mullin[2](1964)；[1](1965)作了进一步简化．所得结果至多带 2 个参数．然之后，Liu[2](1986)，及董峰明与刘彦佩又进一步扩展与简化(Dong&Liu[1](1993)).

近来，任韩也有不少新的研究进展[Ren[1],1999].

4.10　目前蔡俊亮和任韩在多参数的方程研究上取得了可喜的进展，特别在通过 Lagrange 反演解决 2 个甚至 3 个参数之方程方面．

5　问题与发展前景

5.1　方程(52)是否有显式解使得其中之系数为无和形式值得进一步研究，因为(54～55)虽为正项和也并不简单．

5.2　虽然 Euler 地图的第一类计数可以从与之相应的一般地图的第一类计数直接得到．如第一类一般 Euler 地图之计数函数可以从一般地图函数限定根点度为偶数，即

$$\underline{n}=(n_0,0,n_2,0,n_4,0,\ldots)$$

之情形．相仿地，对于无环以及不可分离 Euler 地图也可以从相应的一般情形导出．不管怎样，这里所提供的关于各种 Euler 地图的方程均导致独立的第一类计数．反之，由这些出发如何推断一般之情形尚待研究．特别是如何从(33)和(34)出发研究方程(27)的解仍未见明显进展．当然，对于第二类计数函数则完全不同了．

5.3　除方程(9)以及各种类型外平面地图以及树已可以直接求解外，本文提到的其它方程除(33)有(34)形式之猜想解外，连猜想解之形式均未发现．如何从计数研究中求得这些猜想形式似应为今后不可回避之问题．

5.4　如何通过对反演形式研究直接解那些尚未得解之方程，无疑将对泛函方程的研究以及相应的计数具有极重要的意义

5.5　虽然这里只讨论平面地图，因为一般曲面上的地图计数与平面地图有密切关系，故并不失一般性．在 Liu[34](1999)中，提供了基本的框架，以讨论更一般曲面上地图的计数问题．

5.6　还可考虑更一般的计数函数

$$f_{\mathcal{M}}(x,y;\underline{x},\underline{y})=\sum_{M\in\mathcal{M}}x^{n(M)}y^{m(M)}\underline{x}^{\underline{n}(M)}\underline{y}^{\underline{m}(M)}. \tag{61}$$

其中，$n(M)$和 $m(M)$分别为 M 的根点与根面的度，$\underline{n}(M)=(n_1(M),n_2(M),\ldots)$和 $\underline{m}(M)=(m_1(M),m_2(M),\ldots)$，使得 $n_j(M)$和 $m_j(M)$分别是度为 j 的非根节点和非根面的数目，$j\geqslant 0$. 对于一般地图，由对偶性它是 x 与 y 和 $\underline{x}$ 与 $\underline{y}$ 的对偶函数．相仿地，可考虑不可分离地图(这时，环和杆地图均需约定在其中)，双 Euler 地图(即 Euler 二部图)，双无环(即既无环又无割边)，以及双简单(即双无环且既无重边又无二面有二条以上公共边界边)地图等，均具有这种对称性．

5.7　若将(61)所定义的函数进一步推广，设 $P(M)$为地图的一个多项式，例如色多项式，范色多项式，流多项式等，以至更一般的多项式，研究

$$g_{\mathcal{M}}(x,y,\underline{x},\underline{y};P)=\sum_{M\in\mathcal{M}}P(M)x^{n(M)}y^{m(M)}\underline{x}^{\underline{n}(M)}\underline{y}^{\underline{m}(M)} \tag{62}$$

对给定的地图类 $\mathcal{M}$ 应满足的泛函方程．自然，(61)就是(62)的当 $P(M)=1$ 时的特例．这样的泛函方程是什么样的．目前也许只对树可以想象．事实上，这时之多项式容易确定．更一般地，就没什么研究了．

5.8　开始时，宁愿从简单一些的情形入手．例如，

考虑函数

$$g_{\mathscr{M}}(x,y,u,v;P)=\sum_{M\in\mathscr{M}}P(M)x^{n(M)}y^{m(M)}u^{s(M)}v^{t(M)}. \quad (6.3)$$

其中的参数,除根点度 $n(M)$ 和根面度 $m(M)$ 外,还有非根节点数 $s(M)$ 和非根面数 $t(M)$.

最早讨论这种函数的是 Tutte. 他所讨论的是平面上的三角化,或者说三角地图. 对于这种地图无需同时考虑 u 和 v 而是用 $z^{l(M)}$ 代替 $u^{s(M)}v^{t(M)}$. 其中,$l(M)$ 可以为非根节点数,面数,或者边数. 他的一系列的研究(Tutte[6~17](1970~1995)),最终导致了发现对四色之情形下,函数

$$h(z)=\sum_{T\in\mathscr{T}}P(T)z^{l(M)} \quad (64)$$

所满足的微分方程. 其中,$\mathscr{T}$ 为所有带根不可分离三角地图的集合,$P(T)$ 为 T 的节点着色的色多项式当色数为 4 时之值,和 $l(T)$ 为 T 的面数之半.

若取 $H=z^2h(z)$,则它应满足如下的方程:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2H}{dz^2}(2z+5H-3z\dfrac{dH}{dz})=48z;\\ H(0)=0,\dfrac{dH}{dz}\Big|_{z=0}=0.\end{cases} \quad (65)$$

看起来它并不复杂,但时至今日尚未发现其解的显式. 这时之着色问题就是四色问题.

若将 $P(T)$ 改用面着色的色多项式,则这时的 h 满足的方程比节点着色复杂得多. 然而,此时之着色问题确是容易的(Liu[20~25](1986~1990)).

5.9 更一般的情形,当(63)中的 $\mathscr{M}$ 取带根不可分离平面地图时,Liu[25](1990)发现 $g_{\mathscr{M}}(x,y,u,v;P)$ 所满足的方程. 由此出发,也可以导出 5.8 中提到了 Tutte 的方程(65). 然,只是一些特殊情形给出了解(Liu[26](1990)). 关于 P 取其它多项式,Tutte[8](1971)讨论过范色多项式对一般平面地图和 Liu[25](1990)对于不可分离平面地图. 也是只给出了特殊情形下之结果.

5.10 关于对更一般的多项式则是很少有人问津. 目前,发现了一种既可导出图的一些多项式(Liu[32](1995))又能导出扭结的现有几个多项式的更一般多项式,如何对比讨论(63)中所定义的函数(Liu[34](1999)),它将不仅在图论上而且在拓扑学和量子场论中场是有意义的Witten[1].1989.

参考文献:

Bell, E. T.

[1]*Exponential polynomials*[J]. Ann Math, 1934, 35: 258-277.

[2]*Exponential numberss* [J]. AMS Monthly, 1934, 41: 411-419.

[3]*The iterated exponential integers*[J]. Ann Math, 1938, 39: 539-557.

Bender, E. A. and E. R. Canfield

[1]*Enumeration of degree restricted maps on the sphere* [J]. DIMACS Ser in Disc Math & Theor Comp Sci, 1993, 9: 13-16.

[2]*The number of degree-restricted rooted maps on the sphere*[J]. SIAM J Discrete Math, 1994, 7: 9-15.

Bender, E. A. and N. C. Wormald

[1]*The number of loopless planar maps*[J]. Discrete Math, 1985, 54: 526-545.

Brown, W. G.

[1]*Enumeration of quadrangular dissections of the disc* [J]. Canad J Math, 1965, 17: 302-317.

[2]*Enumeration of triangulations of the disc*[J]. Proc London Math Soc, 1964, 14: 746-768.

Brown, W. G. and W. T. Tutte

[1]*On the enumeration of rooted nonseparable planar maps*[J]. Canad J Math, 1964, 16: 572-577.

Cai, J. L. (蔡俊亮)

[1]关于平面地图的计数问题[D]. 北京:北方交通大学, 1998.

Cori, R.

[1]*Graphes planaires et systemes deparentheses*[M]. Center National de la Rocher-che Scientifique, Institut Blaise Pascal, 1969.

Dobinski, G.

[1]*Grunert's Archiv*[J]. 1877, 61: 333-336.

Dong, F. M. (董峰明) and Y. P. Liu (刘彦佩)

[1]*Counting rooted near-triangulations on the sphere, Preprint, Institute of Applied Math*[M]. Academia Sinica, 1990. Also in Discrete Math., 1993 123: 35-45.

Dong, F. M. (董峰明) and Yan, J. Y. (颜基义)

[1]关于有根外平面地图的计数[J]. 数学学报, 1989, 32: 501-55.

Harary, F. and W. T. Tutte

[1]*The number of plane trees with given partition*[J]. Mathematika, 1964, 11: 99-101.

Harary, F., G. Prins and W. T. Tutte

[1]*The number of plane trees*[J]. Akad van W, Proc., 1964, 67: 319-329.

Kozyrev, V. P. and S. V. Maisrii

[1]*Enumeration and generation of plane rooted trees with given parameters (Russian)* [M]. Proc. All-Union Sem Disc Math Appls (Russian), Moskov, Gos Uni, Mekl-Mat Fak, 1986. 92-99.

Liu, Y. P. (刘彦佩)

第15卷 第1期 信阳师范学院学报(自然科学版) 2002年1月

[1]*On the number of rooted c- nets*[J]. Comb Optim CORR83-35, Uni. Waterloo, 1983; Also in J. Comb. Theory, 1984, B36:118- 123.

[2]有根三角平面地图数目的一个注记 [J]. 应用数学学报, 1986,11(2): 146- 148.

[3]*Enumeration of rooted separable planar maps*[J]. Comb Optim CORR82- 4, Uni Waterloo, 1982; Also in Utilitas Math. , 1984,25: 77- 94.

[4]*Enumerating rooted loopless planar maps*[J]. Comb Optim CORR 83- 4, Uni Waterloo, 1983; Also in Acta Math. Appl. Sinica, LEng. Series , 1985, 2: 14-26.

[5]*Enumeratig rooted simple planar maps*[J]. Comb Optim CORR 83- 9, Uni. Waterloo, 1983; Also in Acta Math Appl Sinica, Eng Series, 1985, 2: 101-15.

[6] *Counting rooted planar maps*[J]. Comb Optim CORR83 26, Uni. Waterloo, 1983; Also in J Math Res Expos, 1984,3(4):37- 46.

[7]*A functional equation for enumerating non- separable planar maps with vertex partition*[J]. 科学通报, 1985,10:, 646- 649; Or see Chin Sci Bull,1986,31: 73- 77.

[8]*Some enumerating problems of maps with vertex partition,*[J]. 科学通报, 1985,30: 1531- 1525; Or see Chin Sci Bull, 1986,31: 1009- 1014.

[9]*A functional equation for enumerating nonseparable Eulerian planar maps with vertex partition*[J]. 科学通报, 1986,31: 81- 84. Or see Chin Sci Bull, 1986, 31: 941- 945.

[10]*Enumeration of rooted outerplanar maps with vertexpartition* [J]. 科学通报,1986,31:1045-1048; Or see Chin Sci Bull, 1987,32: 295- 299.

[11] *Enumeration of rooted nonseparable outerplanar maps*[J]. 科学通报,1988,33:473; Or see Chin Sci Bull, 1988,33: 1140- 1141.

[12]*The enumeration of simple planar maps*[J]. RUTCOR Research Report RRR 37- 87, Rutgers Uni, 1987; Also in Utilitas Math, 1988,34: 97- 104.

[13]On face partition of rooted outerplanar maps[J]. 科学通报, 1988, 34: 1441- 1444; Or see Chin Sci Bull, 1989,34: 365- 369.

[14]*On the vertex partition equation of rooted loopless planar maps*[J]. RUTCOR Research Report, RRR 17-89, Rutgers Uni, 1987; Also in Acta Math. Scientia, 1990,10: 167- 172.

[15]*An enumerating equation of simple planar maps with face partition*[J]. RUTCOR Research Report, RRR36- 87, Rutgers Uni. , 1987;*Main part also in* [J]. 应用数学学报,1989,12:292- 295.

[16]*Enumeration of rooted non- separable outerplanar maps* [J]. Acta Math Appl Sinica, Eng Series 1989,5: 169- 175.

[17]有根无环平面地图节点剖分计数方程[J]. 应用数学学报, 1989,12: 210-214.

[18]*On the number of Eulerian planar maps*[J]. Research Report Series A, No. 24, Department of Statistics, Uni. Rome "La Sapienza", 1989. Also in Acta Math. Scientia, 1992,12: 418- 423.

[19]关于简单平面地图面剖分计数方程[J]. 应用数学学报, 1989,12: 292- 295.

[20]有根平面偶地图的计数[J]. 数学物理学报, 1989, 9: 21- 28.

[21]*On chromatic sum equations for rooted cubic planar maps*[J]. 科学通报, 1986,31: 1285- 1289; Or see Chin Sci Bull, 1987,32: 1230- 1235.

[22] *Chromatic sum equations for rooted cubic planar maps* [J]. Acta Math Appl Sinica, Eng Series, 1987,3: 136- 167.

[23] *Correction to "Chromatic sum equations for rooted cubic planar maps"* [J]. Acta Math Appl Sinica, Eng Series 1986,4:95- 96.

[24]*On chromatic equation for rooted outerplanar maps* [J]. 科学通报, 1988,33: 1261- 1265; Or see Chin Sci Bull, 1989,34: 812- 817.

[25]*On chromatic and dichromatic sum equations for planar maps*[J]. Discrete Math, 1990,84: 167-179.

[26]*Chromatic enumeration for rooted outerplanar maps* [J]. Chin Ann Math, 1990,11B: 491- 502.

[27]*A note on the number of cubic planar maps*[J]. Acta Math Scientia, 1992,12: 282- 285.

[28]关于无环 Euler 平面地图数目的一个注记[J]. 数学研究与评论, 1992,12: 165- 179.

[29]On functional equations arising from map enumerations[J]. Discrete Math, 1993,123: 93- 109.

[30]*On the vertex partition equation of loopless Eulerian planar maps*[J]. Acta Math Appl Sinica, English Series 1992,8: 45- 85.

[31]*Dichromatic sum equations for outer planar maps* [J]. Appl Math(JCU), 1993,8: 64- 68.

[32]*Combinatorial invariants on graphs*[J]. Acta Math. Sinica,1995,11: 211- 220.

[33] *A note on the number of bipartite planar maps*[J]. Acta Math Scientia, 1992,12: 85- 88.

[34]*Enumerative Theory of Maps*[M]. Kluwer, 1999.

[35]关于平面地图的计数方程[J]. 数学进展, 1989,18: 446-460.

[36]有根平面地图的节点剖分计数[J]. 应用数学与计算数学学报, 1991,5: 1-20.

Mullin, R.C.

[1] *On counting rooted triangular maps* [J]. Canad J Math., 1965,7: 373-382.

[2] *The enumeration of rooted triangular maps* [J]. Amer Math Monthly, 1964,71: 1007-104.

Mullin, R.C. and P.J. Schellenberg

[1] *The enumerationof c-nets via quadrangulations*[J]. J Comb Theory, 1968,4: 259-276.

Ren, H.(任韩)

[1]论曲面上地图的计数[D]. 北京:北方交通大学, 1999.

Rota, G. C.

[1] *The number of partitions of a set*[J]. Amer Math Monthly, 1964,71: 498-504.

[2] *Finite Operator Calculus* (*Ed. with P. Doubilet* {*et al*})[M]. Acad Press, 1975.

Tutte, W. T.

[1] *A Census of planar triangulations*[J]. Canad J Math, 1962,14: 21-38.

[2] *A census of slicings*[J]. Canad J Math, 1962,14: 708-722.

[3] *A census of planar maps*[J]. Canad J Math, 1963,15: 294-271.

[4] *The number of planted plane trees with a given partition*[J]. Amer Math Monthly, 1964,71: 272-277.

[5] *On dichromatic polynomials*[J]. J Comb Theory, 1967,2: 301-320.

[6] *On the enumeration of two-coloured rooted and weighted plane trees*[J]. Aequationes Math, 1970, 4: 143-156.

[7] *On chromatic polynomials and the golden ratio*[J]. J Comb Theory, 1970,9: 289-296.

[8] *Dichromatic sums for rooted planar maps*[A]. Proc Symp in Pure Math [C]. XIX (combinatorics) (1971), 235-245.

[9] *Chromatic sums for rooted planar triangulations: the cases* $\lambda=1$ *and* $\lambda=2$[J]. Canad J Math, 1973,25: 426-447.

[10] *Chromatic sums for rooted planar triangulations II: the case* $\lambda=\tau+1$ [J]. Canad J Math, 1973,25: 657-671.

[11] *Chromatic sums for rooted planar triangulations III: the case* $\lambda=3$ [J]. Canad J Math, 1973,25: 780-790.

[12] *Chromatic sums for rooted planar triangulations IV: the case* $\lambda=\infty$[J]. Canad J Math, 1973,25: 309-325.

[13] *Chromatic sums for rooted planar triangulations V: special functions*[J]. Canad J Math, 1974,25: 893-907.

[14] *On a pair of functional equations of mathematical interest* [J]. Aequationes Math, 1978, 17: 121-140.

[15] *Chromatic solutions*[J]. Canad J Math, 1982,34: 741-758.

[16] *Chromatic solutions II*[J]. Canad J Math, 1982,34: 952-960.

[17] *Chromatic sums revisited*[J]. Aequatione Math, 1995,50: 95-134.

Whittaker, E. T. and G. N. Watson

[1] *A Course of Modern Analysis*[M]. Cambridge Uni Press, 1940.

Witten, E.

[1] *Quantum field theory and the Jones polynomial*[J]. Comm Math Phys, 1989,121: 351-399.

Some functional equations in combinatorics

LIU Yan-pei

(Institute of Mathematics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The purpose of this paper is to provide a number of functional equations which were discovered by the author in the past fifteen years. They are now known to have the significants not only in mathematics but also in the substance structure, quantum fields and statistical mechanics. Meanwhile, recent developments related are mentioned for those who would like to do some further research.

Key words: graph; map; enumeration; functional equation

责任编辑:郭红建

第37卷 第1期 昆明理工大学学报(自然科学版) Vol. 37 No. 1
2012年2月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Natural Science Edition) Feb. 2012

doi:10.3969/j.issn.1007-855x.2012.01.016

On a Meson Equation of Surface Type

LIU Yan-pei
(Institute of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: This paper provides a meson functional equation which is extracted from counting end-cut free maps (rooted) on all orientable surfaces with vertex partition vector given. The well-defindness of its solution is shown in an extension of integral domain. Then the solution is explicitly expressed in a compact form via considering graph symmetry.

Key words: Meson functional; equation; end-cut free map; surface; embedding; graph symmetry
CLC Number: O157.5 **Document Code**: A **Article ID**: 1007-855X(2012)01-0082-08

论一类曲面型介子泛函方程

刘彦佩
(北京交通大学 数学研究所，北京 100044)

摘要：本文提供了一个介子泛函方程. 它是从以节点向量为参数，在所有可定向曲面上，数无割端根地图的过程中导出来的. 证明了它在整域扩张中的适定性. 并且，借助图的对称性，给出了其解的一个紧凑的显式.

关键词：介子泛函；方程；无割端地图；曲面；嵌入；图对称

0 Introduction

Let V and F be, respectively, the vector space spanned by the basis $\{1, y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots\}$ and the function space by the basis $\{1, y^1, y^2, \cdots, y^i, \cdots\}$ over the real field R.

The transformation denoted by $\int_y$ from F to V is called a meson functional. The shadow functional used by Rota[6], is the case of the meson functional when $\{1, y^1, y^2, \cdots, y^i, \cdots\}$ is replaced by $\{(y)_0, (y)_1, (y)_2, \cdots, (y)_i, \cdots\}$ where

$$(y)_i = \begin{cases} 1, & \text{when } i = 0; \\ \prod_{j=0}^{i-1} (y - j), & \text{when } i \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

The both functionals are as a type of Blissard operator[1]. An equation involving with the meson functional is called meson equation.

Although such an equation has been used for enumerating maps with vertex partition as parameter since the 80s of last century[2], the word "meson functional" did not distinguished from Blissard operator or shadow functional until 2010[4]. However, Tutte's enumerating maps with vertex partition appeared in literature much early without use of an equation[7]. In [3] and [4], there are a number of meson equations, particularly in surface

收稿日期：2011-10-21. 基金项目：国家自然科学基金(11171020).
作者简介：刘彦佩(1939-)，男，教授，博导. 主要研究方向：图论与组合优化. E-mail: ypliu@bjtu.edu.cn