摘译

外国自然科学哲学

2

1975

摘　　译

外国自然科学哲学

上海外国自然科学哲学著作编译组编

2

1975

上海人民出版社

摘　译

外国自然科学哲学

一九七五年第二期(总四期)

上海外国自然科学哲学著作编译组编

上海人民出版社出版

(上 海 绍 兴 路 5 号)

新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 5.25　字数 129,000

1975 年 6 月第 1 版　1975 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—50,000

统一书号: 13171·148　定价: 0.41 元

内 部 发 行

目　录

数学基础理论问题

关于地震学

生物学基础理论研究

外国自然科学家的哲学观

数学基础理论问题

数学真理性的标准是什么？

舒　左

这里选译的《论无限》与《数学真理与时代有关吗？》两篇文章，虽然属于不同历史年代的著作，但它们提出的却是同一个问题：数学真理性的标准是什么？

《数学真理与时代有关吗？》的作者格拉比纳提出，数学真理性标准是随时代而不断改变的，例如十八世纪是用数学计算的结果作为衡量的标准，而十九世纪则要看数学体系本身逻辑论证的严格性。这就是说，数学的真理性是没有确定的标准的。这种观点在西方有一定的代表性。他们看到了数学本身的发展和变化，特别是十八世纪到十九世纪这两个世纪以来数学学科急遽变化和迅速发展的趋向。但是，他们仅仅是从数学理论发展的表现形式上看问题，只抓住了表面现象，作了某些形式上的比较，因此在探讨数学基础理论问题的时候，就无法得出正确的结论。

十八世纪，为什么数学家们特别重视数学计算的结果，而数学中也的确不断涌现出大量新成就呢？问题很清楚，这是在当时阶级斗争、生产斗争和科学实验的推动下，适应社会需要的结果。我们知道，适应资本主义生产需要而产生的微积分在十八世纪获得了广泛应用和迅速进展，在机械制造、光学、流体力学、天体力学等方面的计算中，都取得了许多精确的、重大的成果，因而带来了物理学面貌的改变。特别在天体力学中，哥白尼以来的成就由于微积分的出现而得以系统化，总结出了更一般的规律。法国数学

家拉普拉斯就曾应用微积分这个数学方法探讨了太阳系的起源及其运动规律。微积分所取得的辉煌成就，扫除了当时人们对它的怀疑。那时，虽然微积分的概念还蒙着一层神秘的网纱，它的本质还没有为数学家掌握，但是社会实践证实了它的真理性，使得人们不能不承认它，并且推动着人们去揭示它的本质。这恰恰从一个侧面证明："**只有人们的社会实践，才是人们对于外界认识的真理性的标准。**"但在数学领域里，对这个真理性的"标准"问题，却一直存在着争论。

真理性标准问题，是数学基础理论的一个根本问题。在这个问题上，唯物主义与唯心主义的斗争是特别尖锐的。辩证唯物主义认为，数学研究的是现实世界的空间形式和数量关系，"**但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边**"。(«反杜林论»)这就是说，它研究撇开了具体内容的1、2、3等抽象的"数"，研究撇开了具体内容的点、线、面等抽象的"形"，并且研究这种抽象的数和形的各种更加抽象的关系。这种科学的抽象，是完全必要的。但是，在抽象中就存在着走向唯心论的可能性。人的智慧"**有可能使抽象的概念、观念向幻想(最后＝神)转变(而且是不知不觉的、人们意识不到的转变)。**"(«哲学笔记»)这是产生数学唯心主义的认识论根源。而历史上的一切剥削阶级又总是利用这一点来加强它们的反动的思想体系对自然科学的统治。古代奴隶主阶级的代言人柏拉图曾把数学归结为关于"理念(共相)世界"的知识，近代资产阶级哲学家康德则把数学看作先验的直观形式的产物。在否认实践是数学的源泉和真理性的标准这一基本问题上，希尔伯特以及一切现代数学唯心主义者与他们是一脉相承的。

这里发表的《论无限》便是形式主义的主要代表人物希尔伯特的代表作。它阐述的形式主义理论，是近代数学"危机"的产物，是数学唯心主义歪曲数学发展的结果。十九世纪，数学发展在形式

上有一个"逻辑鉴定"时期。这是不奇怪的。十八世纪数学在实践的基础上获得了大量成果，积累了大量材料，到了十九世纪，对它们进行系统整理就成为不可避免的了。正是在这种前提下，法国数学家哥西等人提出了以极限论为中心的现代数学分析理论，以后又不断地从逻辑论证上加以改善，逐渐过渡到"算术化"，以便建立严格的现代数学体系。这反映了数学理论向抽象化发展的一种必然趋势。但是，受形而上学支配的数学家们，在追求论证的严格性时，片面地夸大逻辑推理的作用，并加以绝对化，结果出现了所谓集合论"悖理"，建立无矛盾的严格数学基础的企图破产了，爆发了近代数学"危机"。于是，十九世纪末二十世纪初，在数学基础问题研究中就产生了形形色色的唯心主义思潮。形式主义、直观主义、逻辑主义便是其中的三个主要流派。从《论无限》一文可以看出，形式主义是以数学的形式化为宗旨，以逻辑上的无矛盾性为数学真理性的标准。这是企图从逻辑论证中寻找数学真理性标准的必然结果。

逻辑上的无矛盾性能否作为数学真理性的标准呢？诚然，无矛盾性是正确思维的必要条件。但是，逻辑上的无矛盾性只能说明逻辑上可以成立，而合乎形式逻辑并不就能解决数学真理性的问题。形式逻辑是不管大前提的，要管也管不了。或许有人说："我只要前提正确，结论也会正确。"可是怎么确定前提正确不正确呢？还是要到实践中去检验。特别在现代数学的形式化系统中，由于暂时地撇开了内容，仅研究纯形式的关系，它们究竟是不是正确地反映了现实世界的关系呢？这就必须赋予它们以具体的意义，在实践中加以考查。除此而外，是无所谓真理可言的。

马克思说：**"人的思维是否具有客观的真理性，这并不是一个理论的问题，而是一个实践的问题。人应该在实践中证明自己思维的真理性，即自己思维的现实性和力量，亦即自己思维的此岸性。"**（《关于费尔巴哈的提纲》）社会实践是数学真理性的唯一标准，这

是我们的结论，也是我们揭露和批判形形色色数学唯心主义的锐利武器，是任何时候都不能动摇的。

论 无 限

[德] D·希尔伯特①

〔内容提要〕②　作者在本文中系统地介绍了形式主义观点。他认为："在现实世界中是无处能找到无限的。"数学中的无限是"超乎一切经验之外"的"一种理性概念"。由此，作者认为数学中微积分悖论和集合论悖论的原因在"无限"，并为改变这种出现悖论的灾难性状况，开了一张形式主义药方。

作者提出"建立数学方法的明确可靠性"的目标，企图通过"用纯直观和有限的方法"来"获得能保证数学工具的可靠性的那些判断能力"，即采取"有限立场"来实现这个目标。为了摆脱数学命题的无限内容，他在公理法的基础上进一步实行形式化，将"用普通语言报道的内容上的数学科学"，变为"用数学符号和逻辑符号按一定法则排列的一堆公式"，叫做"形式系统"。希尔伯特认为，这样的形式系统的无矛盾性就是数学可靠性和真理性的标准。

韦尔斯特拉斯运用他卓越的严格批判给数学分析奠定了牢固基础。他澄清了诸如极小、函数、微商等概念，从而消除了仍然粘附在无限小计算上的种种缺点，扫清了关于无限小的一切模糊想

① D·希尔伯特(1862—1943)，德国著名数学家，哥廷根大学教授。本文是1925年6月4日威斯特发里亚数学学会在闵斯德城为纪念韦尔斯特拉斯所举办的数学家集会上所作的讲演。

② 本书各篇的"内容提要"均为译者所加。

法，而且在这过程中终于克服了由无限小概念所产生的各种困难。如果今天在遵循基于无理数概念乃至基于极限概念的推理方式中，在分析里面出现完全的一致和可靠性；以及在有关微分方程和积分方程的最复杂的问题中，尽管最果敢、最多样地应用了重极限、累次极限和极限交换而还是能够使所有的结果相一致；那末，这主要是韦尔斯特拉斯科学活动的一个功绩。

然而尽管韦尔斯特拉斯为微积分奠定了基础，但对分析基础的讨论并未就此结束。

其所以如此的原因在于，对数学来说，无限的意义还没有完全得到澄清。在韦尔斯特拉斯的分析中，虽然通过把有关无限小和无限大方面的叙述归结为有限量之间的关系，从而消除了无限小和无限大；但是这个无限仍然出现在定义实数的那些无限的数列中，并且此外还出现在实数系统这个概念中，从而这实数系统就被理解为好象是一个既完成又闭合的整体。

这种理解就表现在逻辑推理的形式之中——也就是当人们例如讨论到具有某种特性的一切实数，或者讨论到存在着具有某种特性的实数的时候。然而恰恰在韦尔斯特拉斯对分析的奠基工作中要完全无限制地求助于这些逻辑推理形式，并且总是要再三反复地应用到它们。

这样一来，无限又能以隐蔽的方式在韦尔斯特拉斯的理论中起着作用，但却避开了韦尔斯特拉斯的批判锋芒。由此可见，就是这个无限问题我们对它还有必要在前所指出的意义下完整地加以说明。正象在无限小计算的取极限过程中无限在无限小和无限大这个意义上表明其仅仅是一种口头语那样，我们也必须把无限在无限整体这个意义上，也就是在我们现今还在推理方式中遇到它的地方，看作仅仅是一种外表的东西。正象对无限小的运算将由有限范围内的过程来代替，而这些过程能做完全同样的事情，并导致完全一样雅致的形式上的关系那样，对无限的推理方法，也必须

根本由有限的过程来代替，而这些过程，恰恰能做同样的事情，也就是说，能使我们得到同样的证明步骤，和得到同样的获得公式和定律的方法。

这就是我的理论的意图。它的目的在于建立数学方法的明确可靠性，而且这种可靠性是微积分批判时期所尚未达到过的；所以，它要完成韦尔斯特拉斯在他为分析的奠基工作中所曾努力追求，且已为之跨出了必要和重要的一步的东西。

但是就澄清无限的概念这问题而论，那末在这里还有一个更普遍的观点应该加以考虑。如果注意一下数学文献，就可发现许多的不合理和许多的轻率在那里泛滥成灾。这多数应归咎于无限。例如当人们在作为一个限制条件这种意义下，强调要求在严格的数学里一个证明中只允许有有限数目的结论的时候——好象曾经有人能够作出过无限多的结论似的。

人们认为早已消除掉的陈旧的反对意见，也披上新装重新出现了。比如新近散布如下的论点：尽管可以无危险地，也就是说不发生矛盾地引进一个概念，而且可以把它证明，但不能就此认为它就有了根据。这不正是当时人们反对复数而提出的非难吗？那时人们说，我们固然不会因为复数而招致矛盾，但它的引进还是没有任何根据的；因为虚数实际并不存在。不，如果对于一种措施来说，在证明它无矛盾以外，认为其是否合理的问题还有一定意义的话，那末，这种意义仅仅在于它是否有相应的成果伴随而来。事实上，成果是必要的；它在这里也是最高法院，任何人都得向它低头。

另一位作者即使在根本没有人作出任何论断的情况下，似乎在那具体的、其“无矛盾地发生作用”被看作是一个特殊假定的感觉世界自身中也看到了——象魔鬼一样的——矛盾。可是我认为，只有命题以及通过推理能导致命题的那种假设，才会互相发生矛盾，而且在我看来，这种认为事实以及事件本身能够处于互相矛盾之中的看法，是做事轻率的一个典型例子。

通过以上这些叙述，我只想说明，关于无限的本质的最后阐明，远远超出了专门科学的兴趣范围，而成为人类理智的荣誉本身所应做的事情。

没有任何其他的问题能象无限那样，从来就深深地触动着人的情感，没有任何其他的观念能象无限那样，对人的理智起了如此激励和有成效的作用，然而也没有任何其他的概念，能象无限那样需要加以阐明了。

如果我们现在来阐明无限的本质这个问题，那末，我们必须简短地回顾一下，在现实世界中无限具有那些内容上的意义；首先让我们来看在这方面我们从物理学里得到那些经验。

对于自然现象和物质的最初的素朴的印象，是它们的不间断性，即连续性。如果我们有一块金属，或者一定容量的液体，那末就使我们联想到它们是无限可分的，而且它们之中无论怎样小的一块，总是具有这种无限可分的性质。然而无论何处，尽管人们在这里把对物质的物理研究方法弄得足够地精密，但可分性总是要碰到一个限度。这不是由于我们的实验不够妥善，而是由于事物的本性。因此人们也许可以直截了当地认为，现代科学倾向于从无限小中解放出来，而且也许现在可用“自然界在作跳跃”这句话来代替与之相反的陈旧的“自然界不作跳跃”（“natura non facit saltus”）。

如所周知，一切物质都由小的构造物即原子所组成，通过它们的组合和结合而产生各种各样的宏观物体。

但是，物理学并不停留在物质的原子说上。上世纪末，除原子说外还出现了其作用最初看来要比它奇特得多的电的原子说。直到那时为止，电被看作是一种流体并且是一种持续起作用的原动力的典型，现在却证明它自己也由正的和负的电子所构成。

在物理学中，除物质和电而外，还有另一种实体，对它来说，同样也适用守恒定律，这就是能量。如今天已确定的那样，甚至于能量也是不可以简单而不受限制地无限分下去的；普朗克发现

了能量子。

无论如何，事实是：一个不断可分的，因而在小的方面可以实现无限的均匀连续体，在现实世界中是无论何处都碰不到的。一个连续体的无限可分性，只是一种存在于思维中的处理方法，只是一种已为我们对自然界的观察和来自物理和化学的经验所否定了的观念。

自然界中我们碰到无限问题的第二个地方，是在我们把宇宙作为整体来考察的时候。这里我们必须对宇宙的广延性进行研究，看其中是否有一个无限大的东西。

宇宙是无限的这种想法，长期以来曾占着统治的地位；直到康德并且在他以后，人们对于空间的无限性根本未曾抱过任何怀疑。

这里又是现代科学，尤其是天文学，重新提出了这个问题，并且不是用形而上学的思辨这种不充分的辅助工具，而是根据为经验所支持的、以及基于对自然定律的应用的一些理由，来设法判断这个问题的。而结果是对无限提出了严重的指责。欧几里得几何学必然导致空间是无限的这个假定。欧几里得几何学固然是一个本身没有矛盾的体系和概念系统；但是并不能由此得出结论说，它在现实世界中是成立的。情况是否这样，只能由观察和经验来判断。在试图用思辨来证明空间的无限性时，无意中也混进了一些明显的错误。在一片空间之外总是还有空间。从这事实出发，只能得出空间的无界性，而决不能得出其无限性来。但是，无界性和有限性是并不互相排斥的。在所谓椭圆几何学中，数学研究为有限宇宙提供了一个天然模型。在今天看来，放弃欧几里得几何学，已不单单出于一种纯粹数学的或者哲学的思辨，而从另外一个原先与宇宙有限性问题完全无关的方面，我们也得出了这个结论。爱因斯坦指出了放弃欧几里得几何学的必要性。在他的引力论基础上他也着手研究宇宙问题，并且指出宇宙有限的可能性，而天文学

家所发现的一切结果也完全和椭圆宇宙的假设相一致。

现在我们已从两方面断定了现实世界的有限性：向无限小的方面和向无限大的方面。尽管如此，无限仍然很可能在我们思维中占有合法的地位，而且起着一个不可缺少的概念的作用。我们要研究一下，它在数学科学中的情况如何，而且先来询问一下人类精神的最纯最素朴的产物数论。让我们在这里从许多各式各样的基本公式中任意取出一个，例如取公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

由于我们在这公式里可用任一整数来代替 n，例如 $n=2$ 或 $n=5$，所以这公式包含着无限多个命题，这显然是它主要的一点，而且这样它才表示一个算术问题的解，并使一个本来意义下的证明企图成为必要。而特殊的数字等式

$$1^2+2^2=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 5,$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 6\cdot 11$$

则可通过计算来加以验证，因而对每一个式子本身就没有多大兴趣。

从理想元素这个非常重要和极有成效的方法那里，我们认识到了无限这个概念的一个全然不同、完全特殊的解释和原则性的含义。理想元素方法在初等平面几何中就已用到。在那里，原先只有点和平面上的直线才是实在的真正存在着的对象。对于这些对象来说，在许多公理中有一条结合公理：过两点总有一条而且只有一条直线。由此可以得出结论说：两条直线至多只能交于一点。可是两条直线总能交于一点这样一条定理是不成立的；两条直线也可以互相平行。然而如所周知，在引进了理想元素，即无限远点和一条无限远直线之后，就能使两条直线总在一点而且只在一点

相交这条定理普遍成立了。

这些理想的“无限远”元素给我们带来了好处，它们使结合定律系统变得尽可能简单明了。由于点和直线之间的对称性，从此就如所共知的那样，产生了几何学中富有成果的对偶原理。

代数学中通常的复虚数，同样是利用理想元素的一个例子；它们在这里有助于那些有关一个方程的根的存在和根的数目的定理得以简化。

如同在几何学中用无限多的直线，即相互平行的线来定义一个理想的点那样，在高等算术中把某些由无限多的数组成的系统总括为一个数理想，而在这里确实体现了理想元素原理的一个也许是最天才的应用。如果这是在一个代数数体的内部一般地发生的，那末我们在这里面又会发现那些简单而为人们所熟知的可除性定律，如同它们对于通常的整数 1,2,3,4,…所成立的那样。这里我们已经进入到了高等算术的领域。

现在我们转到分析这个数学科学中艺术性最强和分支最多的结构上来。你们大家都知道，无限在这里起了怎样的决定性作用，数学分析又如何好比是唯一的一曲有关无限的交响乐。

在无限小计算中所获得的巨大进展，大部分是基于用无限多元素的数学系统来进行运算的结果。由于无限很容易与“非常大”等同起来，所以不久就产生了一些矛盾，即所谓无限小计算的悖论，其中一部分早在古代就为诡辩学派哲学家所知悉。许多在有限范围内适用的定理，例如部分小于整体，极小和极大的存在，和式的各项或连乘式的各因子次序的可交换性等，都不能直接照搬到无限那里去，这是一个基本的认识。我在我这讲演之初已经提到，这些问题尤其通过韦尔斯特拉斯的锐敏感觉而完全得到了阐明，而在今天，分析已在它领域内成为应用无限的一个不可或缺的指南，同时也是应用无限的一种实用工具。

但是单靠分析还不能使我们深入地洞察到无限的本质。这只

有通过一门和一般的哲学思考方法相近，而又负有责任对有关无限的整个问题从新的方面来加以说明的学科才能做到。这门学科便是集合论，它的创造者是格奥尔格·康托尔，而且对我们来说，这里所涉及的仅仅是那个确实杰出的和独创的、构成康托尔学说实际内核的东西，即他的超限数理论；在我看来，这理论是数学精神最值得惊叹的花朵，而且根本是人类纯理智活动的一个至高成就。那末事实情况是怎样的呢？

如果要简单说明一下康托尔所引入的关于无限的新的见解，那末大概可以这样说：在分析里，我们只是同这样的无限小和无限大打交道，它们是作为一种极限概念，作为一种变化着的、成长着的、被产生出来的东西来理解的，也就是如人们所说的那样，只是同潜在无限打交道。但这不是实际的无限本身。而当我们例如把数 1,2,3,4,…的整体本身看作一个现成的单位，或者把一线段上的许多点看作许多事物的一个现成的整体时，这才是实际的无限。这类的无限称为实在无限。

两位给数学基础作出很大贡献的数学家弗雷格和戴德金已经——互不相关地——用到过实在无限，而且确是为了这样一个目的，想不依赖于任何的直观和经验而纯粹把算术建立在逻辑之上，并且单从逻辑中把它演绎出来。戴德金的努力甚至于达到了这种地步，他不是从直观中去得出有限的数目，而是主要在利用无限集合这个概念下纯粹从逻辑上把它推导出来。然而康托尔却系统地发展了实在无限的概念。如果我们看一下上述两个关于无限的例子：

1. 1,2,3,4,…；
2. 线段上 0 到 1 的那些点，或者与此相同，0 和 1 之间实数的整体，

那末很容易使人从纯粹的浓度观点去考察它们，而且在这里会发现许多今天已为每一位数学家所熟悉的惊异事实。比如，倘若我