中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

高等数学·上

◉ 张鸿雁 任叶庆 刘碧玉 肖莉 编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

高 等 数 学 · 上

张鸿雁　任叶庆　刘碧玉　肖莉　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

大学数学系列课程学习辅导与同步练习/张鸿雁等编著.
—长沙:中南大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-5487-1892-5

Ⅰ.大... Ⅱ.张... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 200444 号

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

张鸿雁 等 编著

□责任编辑 谢贵良
□责任印制 易红卫
□出版发行 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482
□印 装 长沙市宏发印刷有限公司

□开 本 787×1092 1/16 □印张 44.5 □字数 680 千字
□版 次 2015 年 9 月第 1 版 □印次 2015 年 9 月第 1 次印刷
□书 号 ISBN 978-7-5487-1892-5
□定 价 90.00 元(共四册)

前　言

大学数学系列课程包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计等课程，它是高等院校各专业必修的基础理论课，是高等院校人才培养的关键环节。认真扎实学好大学数学系列课程有助于学生科学思维能力、数学运用能力、创新探索能力的培养，有利于后续课程的学习，并为进一步深造奠定必要的数学基础和科学素养。

2013 年，中南大学首批“开放式精品示范课堂建设计划”资助建设高等数学开放式精品示范课堂建设。课程建设团队经过 2 年的探索、研究与实践，形成了特色鲜明的大学数学开放式课堂教学模式，受到了学校领导与学生的肯定与支持，决定面向全校推广应用。

为配合开放式课堂教学模式改革的实践，适应学生自主研学、自由探索的需要，激发学生对本课程学习的积极性，有效地将课堂学习延伸到课外，方便师生互动、规范作业，大学数学系列课程教学团队经多年的经验积累、对课程教学的不断改革钻研，精心设计了《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，作为课程学习的配套资料，其内容主要包括课程知识结构、重点难点、知识点综合例题、课程导学、同步练习，内容设置加强了对课堂教学的针对性，力求达到课前预学、课后复习、作业练习、巩固提高的目的，通过课前、课间、课后环节自主性、探索性、讨论式、启发式学习，加深对教学内容的理解，培养学生独立运用理论知识、严密思考与科学计算的能力。

《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》涵盖了整个大学一年级两个学期及大学二年级上学期的所有大学数学系列(高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计)课程的内容，配套同步练习册代替了学生的大学数学作业本，每套同步练习含填空、选择、计算、证明题。填空、选择只要将答案填入即可，计算、证明题需在活页纸下方或反面空白处写出主要步骤。为方便教师批改、学生同步学习，课程导学、同步练习作为活页形式，课前完成下次课程的导学，课后完成上次课相应的一套同步练习，并交任课教师批阅，教师批阅后返回给学生，以备复习时使用。做好课程教学的导学和同步练习是学好大学数学系列课程的重要环节。教科书上的习题可作为同学们课外练习补充、复习之用。

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。希望同学们充分利用《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，自主学习，在科学的道路上不断进取、勇往直前，学有所成！

感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划的项目支持，感谢中南大学数学与统计学院大学数学系列课程教学团队全体教师的无私奉献，感谢中南大学出版社的大力支持。

中南大学

高等数学教学与研究中心

2015 年 9 月 20 日

目 录

第 1 章　函数与极限

Ⅰ. 学习内容要点与要求

1. 掌握基本初等函数的概念、性质及其图形;
2. 掌握极限四则运算法则;
3. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会求函数值及定义域;
4. 会建立简单实际问题中的函数关系;
5. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则), 会用两个重要极限公式求极限;
6. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念, 了解无穷小的运算性质及阶的比较, 会用等价无穷小求极限;
7. 理解函数在一点连续的概念, 会判断函数在某一点(包括分段函数在分段点处)的连续性;
8. 了解函数间断点的概念, 并会判断间断点的类型;
9. 了解反函数概念, 会求简单函数的反函数; 理解复合函数概念, 会分析复合函数的复合过程;
10. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;
11. 了解极限的概念(对极限的 $\varepsilon - N$, $\varepsilon - \delta$ 定义在学习过程中逐步加深理解, 对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过多的要求);
12. 了解初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理), 并会应用这些性质.

Ⅱ. 重点、难点与知识结构

重点

1. 极限的求法;
2. 函数连续性讨论、间断点的分类.

难点

1. 函数极限的求法；
2. 闭区间上连续函数的性质的运用.

本章知识点网络图

- 函数与极限
  - 结构框图
    - 函数的定义
    - 极限的概念
    - 连续的概念
  - 内容简略
    - 定义与性质
    - 求极限的常用方法
    - 求极限的常用结果
    - 判定极限不存在的常用方法
    - 常见题型
  - 典型习例

Ⅲ. 典型例题分析

一、函数定义域的求法、函数符号的运用、函数的基本性质

例 1 求函数 $y = \arccos \dfrac{3x}{x^2+2}$ 的定义域.

解 当 $\left|\dfrac{3x}{x^2+2}\right| \leqslant 1$ 时，函数有定义. 由此解得 $x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 2$，$x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant -1$.

故函数的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

小结：求函数的定义域基本原则是：

(1) 函数 $y = f(x)$ 的定义域是使表达式 $f(x)$ 有意义的实数值的全体；

(2) 在实际问题中，除遵循上述原则外，还需根据所研究问题的实际意义确定函数的定义域.

例 2 设函数 $F(x)$ 的定义域为 $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0, 1\}$ 且满足 $F(x) + F\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1 + x$，求 $F(x)$ 的表达式.

解 因
$$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \tag{1}$$

在式(1)中用 $\dfrac{x-1}{x}$ 取代 x，得，
$$F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{2x-1}{x}, \tag{2}$$

在式(1)中用 $\dfrac{-1}{x-1}$ 取代 x，得，
$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right) + F(x) = \frac{x-2}{x-1}, \tag{3}$$

式(1) + 式(3) − 式(2)，得 $2F(x) = 1 + x + \dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x}$，故 $F(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$.

小结：解这类问题的关键是对函数概念，特别是对符号 f 的正确理解与掌握.

例3 设实数 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意实数 x，满足

$$f(a-x)=f(a+x),\ f(b-x)=f(b+x).$$

证明：$f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的函数.

证 因 $f(a-x)=f(a+x),\ f(b-x)=f(b+x)$，故

$$f(-x)=f(x+2a),\ f(-x)=f(x+2b),$$

因此

$$f(x+2b-2a)=f(-x+2a)=f(x),$$

由周期函数的定义知：$f(x)$ 是以 $2b-2a$ 为周期的函数.

小结：单调性、有界性、奇偶性及周期性是函数的基本性质. 单调性与有界性既可根据定义，也可利用导数方法判别，而奇偶性与周期性一般根据定义判别.

二、函数极限的求法

函数的极限，根据自变量的变化趋势可以分为6种不同的情形：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$； (2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$； (3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$； (5) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$； (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

其中(1)，(4)两种形式是基本的.

如果根据函数值的变化情形来分类，那么函数的极限又可分为未定式与非未定式两种类型. 未定式极限共有7种类型：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，1^∞，0^0，∞^0. 由于求非未定式极限远比确定未定式的值要简单得多，因此，下面主要讨论求未定式极限的方法与技巧.

1. 初等变换法

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$.

解 这是"$\infty-\infty$"型未定式，提取公因子 $\sqrt{x}$，并令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，化为"$\dfrac{0}{0}$"型未定式，然后将分子有理化，即可消除"不定"的因素，将未定式的极限化为定式极限，再用极限的四则运算法则即可求得.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt{1+t}+1)}{t(\sqrt{1+t}+1)}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t}+1}=\frac{1}{2}.$$

例2 $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}$

解 这是"1^∞"型未定式，可利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 来计算.

$$\lim_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}\cdot3}=\mathrm{e}^3.$$

例3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 这是非未定式极限，利用三角恒等变形.

$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$，因 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0.$

小结：初等变换法是用于求未定式极限的一种基本方法，基本思想是：通过使用代数或三角恒等变形，以及变量替换等技巧，或者消除产生“不定”的因素，将未定式转化为非未定式的极限来计算；或者将所求极限转化为可利用重要极限$\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\right)$来计算.

2. 无穷小替换法

例1　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x)(1-\cos3x)}{(\tan x-x)\cdot\ln(1+x)\cdot\sin2x}$.

解　因 $\mathrm{e}^{\tan x-x}-1\sim\tan x-x(x\to0)$，$1-\cos3x\sim\dfrac{1}{2}(3x)^2(x\to0)$，$\ln(1+x)\sim x(x\to0)$，$\sin2x\sim x(x\to0)$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x)(1-\cos3x)}{(\tan x-x)\cdot\ln(1+x)\cdot\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)(1-\cos3x)}{(\tan x-x)\cdot\ln(1+x)\cdot\sin2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x(\tan x-x)\cdot\frac{1}{2}(3x)^2}{(\tan x-x)\cdot x\cdot2x}=\frac{9}{4}.$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^{3x-2}-x)\sin2(x-1)}{(x-1)^3}$.

解　因当 $x\to1$ 时，

$x^{3x-2}-x=x(\mathrm{e}^{3(x-1)\ln x}-1)\sim3x(x-1)\ln x=3x(x-1)\ln[1+(x-1)]\sim3x(x-1)^2$，

$\sin2(x-1)\sim2(x-1)$，所以

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^{3x-2}-x)\sin2(x-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{3x(x-1)^2\cdot2(x-1)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}6x=6.$$

例3　已知当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，试求常数 a 的值.

解　因当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$. 又由题设条件可知：$-\dfrac{2}{3}a=1$，故 $a=-\dfrac{3}{2}$.

例4　已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　因当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\sin x$，$\mathrm{e}^{2x}-1\sim2x$，所以

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2}=3$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

小结：无穷小替换法是求未定式极限的一种很好的方法．恰当地运用无穷小替换，可以大大地简化未定式极限的计算．常用的等价无穷小有：

(1) $\sin x \sim x(x\to 0)$；　(2) $\arcsin x \sim x(x\to 0)$；　(3) $\tan x \sim x(x\to 0)$；

(4) $\arctan x \sim x(x\to 0)$；　(5) $\ln(1+x) \sim x(x\to 0)$；　(6) $e^x-1 \sim x(x\to 0)$；

(7) $a^x-1 \sim x\ln a(x\to 0)$，$a>0$；　(8) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2(x\to 0)$；

(9) $(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x(x\to 0)$．

3．极限的局部逆问题

例1　试确定常数 λ,μ 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$．

解　因 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu}{x}=0$，

即
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}-\lambda-\frac{\mu}{x}\right)=0,$$

故　$\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}-1}=-1$，

$$\mu=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+1}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=0.$$

例2　试确定常数 a，b，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2-x+3}-2x)=b$．

解　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2-x+3}-2x)=b$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{a-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-2\right)=b$，

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{a-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-2=0$，所以 $\sqrt{a}-2=0$，即 $a=4$．将 $a=4$ 代入原极限式得

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-x+3}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+3}{\sqrt{4x^2-x+3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}=-\frac{1}{4}.$$

小结：如果已知函数的极限存在，但是在函数的表达式中含有一个或多个待定的参数，要求确定待定参数的值，这就是函数极限的局部逆问题．

4．讨论极限的存在性

例1　设函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$．

解　因 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

例 2 设 $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{n-1}}$，试证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

证 显然 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2+(-1)^{2k}}{3+(-1)^{2k-1}}=\dfrac{2}{3}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2+(-1)^{2k+1}}{3+(-1)^{2k}}=\dfrac{1}{4}$，

故 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}\neq\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}$，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

小结：讨论极限的存在性是十分典型又经常遇到的问题，特别是在研究分段函数的连续性时，往往归结为求解这类问题. 常用命题：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$.

结论：求函数的极限除了以上常用的方法之外，还有一些比较重要的方法要涉及后面的知识. 比如：利用 L'Hospital 法则、Taylor 中值公式、导数的定义、定积分的定义与积分中值定理等.

三、数列极限的求法

因为数列可以看作定义在正整数集合上的函数，所以数列的极限也属于函数极限的范畴. 但是由于数列有其自身的特点，所以求数列极限就相应地有一些特殊的方法与技巧.

主要方法有：(1) 单调有界准则；(2) 夹逼原理.

1. 利用单调有界准则

例 1 设 $x_1=1$，$x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，$n=2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因 $x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，$x_2-x_1=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}=\dfrac{1}{2}>0$，即 $x_2>x_1$.

假设 $x_k-x_{k-1}>0$，则

$$x_{k+1}-x_k=\left(1+\frac{x_k}{1+x_k}\right)-\left(1+\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right)=\frac{x_k}{1+x_k}-\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 又 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}<2$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}$，即 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，故 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，负的不合题意舍去，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 2 设 $x_1=a$，$y_1=b$，且 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n\geqslant 2)$，其中 $a>0$，$b>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 由不等式 $\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，知 $x_{n+1}\leqslant y_{n+1}$，于是有

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geqslant\sqrt{x_nx_n}=x_n,\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leqslant\frac{y_n+y_n}{2}=y_n,$$

从而有 $a\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant b$，因此数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是单调有界的，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_ny_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)}$，即$\alpha=\sqrt{\alpha\beta}$，所以$\alpha=\beta$.

小结：利用单调有界准则求数列的极限步骤：

(1) 由数列$\{x_n\}$的通项确定递推关系式 $x_{n+1}=f(x_n)$；

(2) 利用递推式证明$\{x_n\}$单调有界，从而可设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(3) 对递推式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限，得到关于未知数 a 的方程 $a=f(a)$，然后解此方程，求得符合题意的 a 值.

2. 利用夹逼原理

例1　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

解　因$0\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$，由夹逼原理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)=0.$$

例2　证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

证　由于$0<\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1=\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，故由夹逼原理，有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

小结：利用夹逼原理求极限的关键：根据数列$\{x_n\}$通项的特点，充分利用不等式的缩放技巧，找到符合夹逼原理两边的数列$\{y_n\}$，$\{z_n\}$.

四、讨论函数的连续性

常用命题：

(1) 基本初等函数在其定义域内都是连续的；

(2) 初等函数在其定义区间内都是连续的；

(3) $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

例1　设$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=b$，若函数$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 连续，求常数 A.

解　因 $F(x)$ 在点 $x=0$ 连续，所以

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}+a\frac{\sin x}{x}\right)=b+a=F(0)=A,$$

即
$$A=a+b.$$

例 2 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0.\end{cases}$ 求 a, b 的值使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 由于当 $x>0$ 时, $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a$ 为初等函数, 显然连续; 同理, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}$ 为初等函数连续. 故要使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可, 即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$,

因 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a\right)=a+\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=a+\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{x}=a+2$,

故当 $a+2=0=b$, 即 $a=-2$, $b=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 3 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数, 试确定常数 a, b 的值.

解 因当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, 当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$, 故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|<1\\ ax^2+bx, & |x|<1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\end{cases},$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=a+b$, 所以 $a+b=1$,

又因 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=a-b$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$, 所以 $a-b=-1$, 由此解得

$$a=0,\ b=1.$$

五、确定函数的间断点及其类型

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(x+1)}$ 的间断点, 并判别其类型.

解 显然 $x=0$, $x=-1$ 为间断点. 因

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{|x|(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{|x|(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{|x|}=-2,$$

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{|x|(x+1)}=\infty$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

例2　求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 的间断点，并指出类型.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，由 $\sin\pi x=0$，解得 $x=-1,-2,-3,\cdots$;

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}$，由 $x^2-1=0$ 且 $x>-1$，解得 $x=1$，

所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=1,-1,-2,-3,\cdots$，还有在分段点 $x=0$ 处可能间断.

$f(x)$ 在除去以上点的区间上是初等函数，故连续.

因为在 $x=-2,-3,\cdots$ 处，$\lim\limits_{x\to -n}f(x)=\lim\limits_{x\to -n}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$，$n=2,3,\cdots$，

所以 $x=-2,-3,\cdots$ 均是 $f(x)$ 的第二类无穷间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)x(x-1)}{-\sin\pi(x+1)}=-\dfrac{2}{\pi}$，

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x^2-1)}{\sin\pi x}=-\dfrac{1}{\pi}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]=-\sin 1$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]$ 不存在，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

例3　求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点.

解　显然 $f(x)$ 有间断点 $x=-1,0,1$，

由于 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}\cdot\sqrt{2}=\infty$，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}\text{不存在},$$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $f(x)$ 只有一个无穷间断点 $x=-1$.

小结：如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，则点 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点，通常分为两类.

(1) 如果左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则点 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 进一步，如 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$x_0$ 是可去间断点；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$x_0$ 是跳跃间断点；

(2) 不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点，常见的有无穷间断点与振荡间