普通高等教育“十三五”规划教材

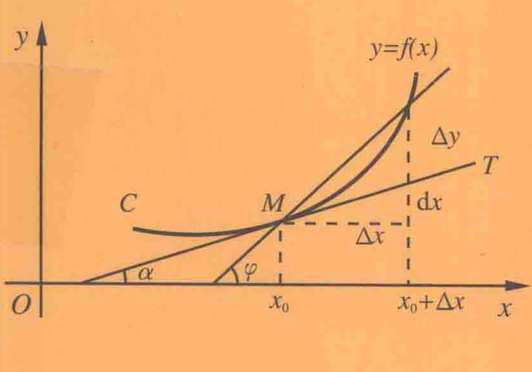
| 大学数学基础丛书 |

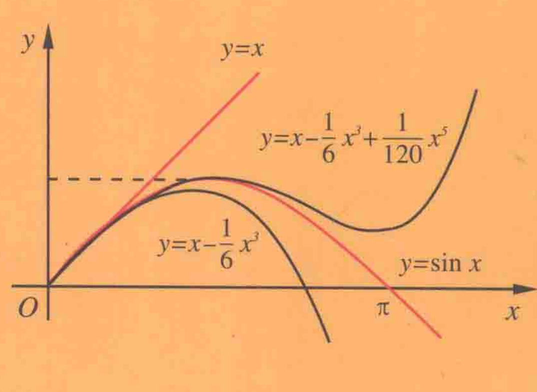
丛书主编 袁学刚 周文书 刘 满

高等数学

（上册）

袁学刚 张 友 主编





清华大学出版社

| 大学数学基础丛书 |

高等数学

（上册）

袁学刚　张　友　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本教材分为上、下两册。上册内容包括函数、数列及其极限、函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程。下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每节后都配有思考题、A类题和B类题，习题选配典型多样，难度层次分明。该课程基于学生的初等数学基础，引入高等数学的理念、思想和方法，提高学生学习高等数学的兴趣和应用高等数学知识解决相关问题的意识和能力.

本教材可以作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学专业的高等数学教材，也可作为相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/袁学刚，张友主编. 一北京：清华大学出版社，2017(2017.9重印)
(大学数学基础丛书)
ISBN 978-7-302-48058-7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①袁…　②张…　Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第205691号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：20.75　　**字　　数**：505千字
版　　次：2017年8月第1版　　**印　　次**：2017年9月第2次印刷
印　　数：2001～3000
定　　价：45.00元

产品编号：076497-01

前言

PREFACE

高等数学是高等学校的一门重要基础课程，更是理工科学生接受高等教育不可或缺的一部分。已获得公众认知的是：高等数学不仅为理工科学生学习后续专业课程提供所必需的数学知识；而且为工程技术人员处理科学问题提供必要的理论依据.然而，高等数学本身不仅仅是一门科学，更重要的是，通过分析、归纳、推理等各项数学素养的训练，能够使学生具备理性思维能力、逻辑推理能力以及综合判断能力.

为了适应高等教育的发展，顺利完成精英化教育向大众化教育的转型，本着“以人为本、因材施教、夯实基础、创新应用”的指导思想，大连民族大学理学院组织了具有丰富教学经验的一线教师编写本教材.

本书以教育部高等学校大学数学课程教学指导分委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据，在知识点的覆盖面与“基本要求”相一致的基础上，对课程内容体系进行了整体优化，强化了高等数学与后续专业课程的联系，使之更侧重于培养学生的基础能力和应用能力，以适应培养应用型、复合型本科人才的培养目标.与传统教材相比，我们在编写时特别注意了以下 3 个方面：

1. 在知识体系的编排上，突出基础的重要地位.对教材的内容进行了适当的优化和调整，减少课程内容的重复讲授.例如，在传统教材中，函数和数列极限是几乎被忽略的内容，只用很少的篇幅进行介绍，并且在授课时也只是泛泛讲解，这对学生学习高等数学是非常不利的.一方面，函数是微积分的研究对象，极限是微积分的研究工具，淡化了这些基础内容，不利于学生完成从初等数学到高等数学的思维方式的跨越；另一方面，学生从高考结束到进入大学学习，空闲了至少 2 个月的时间，淡化了这些内容，对学生学习后续的内容影响很大.本书中，我们将函数和数列极限分别作为一章讲述；将定积分及定积分的应用合并成一章；由于定积分在物理方面的应用与大学物理课程的内容重复，故将其删去；为了便于学生学习和掌握，将常微分方程一章中的所有应用题单列一节讲授.

2. 在课程内容的编写上，注重知识点的使用方法和技巧.在给出重要的定义和定理时，对其进行必要的说明，指出了在使用定义和定理解决相关问题时的误区，列举了一些典型反例；对典型例题进行先分析提示，再引导求解，逐步使学生在学习“规则”时，能够正确理解并合理使用这些“规则”，做题时有理可依、有据可查.

3. 在例题、习题的选配上，注重不同的层次和类别.为了满足不同专业、不同层次学生的需求，将例题分为三个层次.第一层次注重的是定义和定理，使学生能够正确合理使用这些知识点解决一些基本问题；第二层次注重的是数学的方法和技巧，使学生能够灵活运用这

些知识点解决一些相对复杂的问题，培养学生的逻辑推理和计算能力；第三层次注重的是应用，使学生能够综合运用所学的知识解决一些较为困难的问题，从而提高学生的数学素质.此外，对于同一类型题，我们选配了多个例题，教师可以有选择地讲授，其余的学生可以自学.将习题分为A和B两类，学生通过学习第一、第二层次的例题便可以解决A类题中的内容，而B类题的内容相对复杂，求解较为困难，主要是为了满足部分专业和部分考研学生对高等数学的实际需求.

本书在编写过程中，各位参与编写的教师能够统一思想、团结协作，历经了充分调研、反复论证、独立撰写、相互审阅、及时修补等环节，使本书从初稿、统稿到定稿能够分阶段顺利完成.其中，第1,9章由谢丛波编写；第2,3,8章由焦佳编写；第4,5,11,12章由董丽编写；第6,7,10章由张文正编写；第13章由楚振艳编写.谢丛波为本书绘制了图形.最后由袁学刚和张友负责全书的统稿及修改定稿，并对各个章节及课后习题进行了适当的修改.

本书的顺利出版，离不开大连民族大学各级领导的关心和支持，在此表示感谢.还要特别感谢清华大学出版社的刘颖编审，他对本书的初稿进行了认真的审阅，给予了具体的指导，提出了宝贵的建议.本书在编写过程中，我们参阅了大量的国内外各种版本的同类教材，并借鉴了这些教材的一些经典例题和习题，由于难以一一列举出处，深感歉疚，只能在此一并表示由衷的谢意.

尽管我们投入了大量的精力，但由于水平有限，书中还会存在某些不足或错误，恳请广大同行、读者批评指导，以期进一步修正和完善.

编　者

2017年7月

目录 CONTENTS

第 1 章

函 数

Functions

在中学数学中，我们虽然已经学习了函数的概念以及一些简单的函数，但都是基于初等数学的范畴. 在以微分学和积分学为核心的高等数学中，各类函数及其变化性态是主要的研究对象. 为了更好地学习微积分学的知识，本章将首先介绍与函数相关的一些基本概念和必备知识；然后列出基本初等函数及其特性；最后引入函数的几种常用表示方法以及一些特殊函数.

1.1 基本概念

Basic concepts

在给出函数的定义之前，首先简要地介绍集合、区间、绝对值和邻域等一些基本概念.

1.1.1 集合、区间、绝对值和邻域

1. 集合

由于函数都是定义在某些集合上的，因此讨论函数离不开集合这个概念. 一般地，具有某种特定性质的事物汇集的总体称为一个**集合(set)**，组成这个集合的事物被称为集合的**元素(element)**. 如：一个班级可以认为是一个集合，班级的每一位同学就是这个集合的元素；直线方程 $y=x+2$ 上的所有点组成了一个集合. 通常情况下，集合用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

集合与元素之间的关系为：若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，即把集合的全体元素一一列举出来，如由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可以表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；另一种是描述法，即利用集合的某种特征来描述其元素，如 xOy 平面中单位圆周上点的集合 B 可以表示为 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

若一个集合的元素个数有限，则称这个集合为**有限集(finite set)**，否则称为**无限集(infinite set)**. 不含任何元素的集合称为**空集(empty set)**，记作 $\varnothing$.

最常遇到的数集有：

全体**自然数**(natural number)的集合，记作 $\mathbf{N}$；全体**整数**(integer)的集合，记作 $\mathbf{Z}$；全体**有理数**(rational number)的集合，记作 $\mathbf{Q}$；全体**实数**(real number)的集合，记作 $\mathbf{R}$；全体**复数**(complex number)的集合，记作 $\mathbf{C}$.

此外，正整数、正有理数和正实数的集合分别记作 $\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$. **如果没有特殊声明，本书中用到的数都是实数.**

下面给出集合间的关系和运算.

设 A 和 B 是两个集合，若集合 A 的所有元素都属于集合 B，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作 A 包含于 B(或者 B 包含 A). 若 $A\subseteq B$，且存在元素 $a\in B$ 且 $a\notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**(proper subset)，记作 $A\subset B$(或者 $B\supset A$). 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称集合 A 和 B **相等**(equality)，记作 $A=B$.

规定：空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

对于前面给出的各种数集，显然有如下关系成立：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}\quad 和\quad \mathbf{Z}_+\subset\mathbf{Q}_+\subset\mathbf{R}_+.$$

给定两个集合 A 和 B，可以定义如下运算：

交集(intersection of sets)　$A\cap B=\{x\,|\,x\in A 且 x\in B\}$；

并集(union of sets)　$A\cup B=\{x\,|\,x\in A 或 x\in B\}$；

差集(difference of sets)　$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A 且 x\notin B\}$；

余集(complementary set)　$B_A^c=A\backslash B$，其中 $B\subset A$.

集合间的各种运算及其结果可以用图 1.1 来表示，其中阴影部分表示运算的结果.

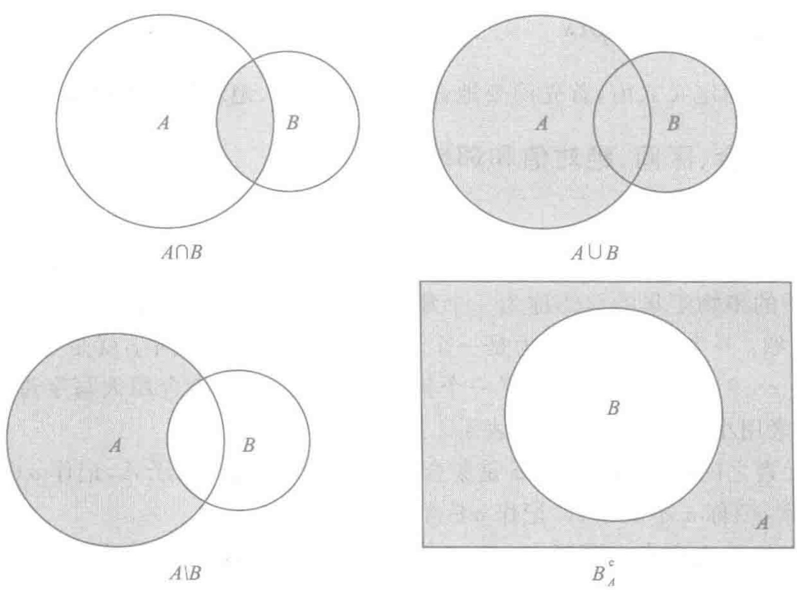
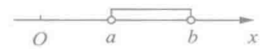
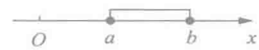
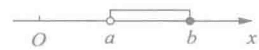
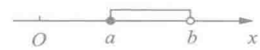
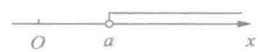
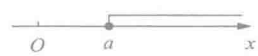
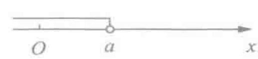
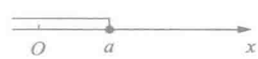


图　1.1

2. 区间

区间(interval)是高等数学课程中经常遇到的一类数集. 各种区间的符号、名称、集合表示及在数轴上的图形表示如表 1.1 所示.

表 1.1

符号	名称		集合表示	图形表示
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$	
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid x>a\}$	
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid x\geqslant a\}$	
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$	
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$	

关于表中记号的几点说明：

(1) 表中的各个区间与集合的记法是严格对应的，不能混淆，特别是**开区间**(**open interval**)和**闭区间**(**closed interval**)的记法.

(2) 在**有限区间**(**finite interval**)和**无限区间**(**infinite interval**)中，$a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，它们是确定的数.

(3) 无限区间中的 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷”和“负无穷”，它们仅仅是一种符号，并不表示数，可以分别想象为沿着数轴的正向和负向无限延伸. 详细的定义将在后面章节中给出. 特别地，全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 记为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

3. 绝对值

实数 a 的**绝对值**(**absolute value**)记作 $|a|$，它的定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

该定义表明，实数 a 的绝对值 $|a|$ 是非负的，它的几何意义是数轴上的点到原点的距离. 对于任意给定的实数 $a,b,c\in\mathbf{R}$，不难证明如下等式或不等式成立：

(1) $|a-b|\geqslant 0$； (2) $|a-b|=|b-a|$； (3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；

(4) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$； (5) $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$（三角不等式）；

(6) $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$.

4. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 称为以点 a 为中心，δ 为半径的**邻域（neighborhood）**，简称 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表示为 $U(a)$，简称点 a 的邻域.

在后面的应用中，有时需要把邻域中心去掉，这时的数集表示为 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，并称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},$$

如图 1.2 所示. 同样，当不需要注明去心邻域的半径 δ 时，常将它表示为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的**去心邻域（deleted neighborhood）**. 将 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的**左邻域（left neighborhood）**和**右邻域（right neighborhood）**. 有时点 a 的左邻域和右邻域分别用 $\mathring{U}(a^-)$ 和 $\mathring{U}(a^+)$ 表示.

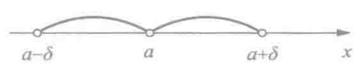


图 1.2

1.1.2 函数的定义

当我们研究某个自然现象的运动规律或分析社会现象的发展过程时，在同一过程中碰到的各种量，常常有几个量同时变化，它们之间存在某种依赖关系，其中一个量的变化常常引起其他量的变化. 例如，在考虑距离地面高度为 h 的物体作自由落体运动时，在忽略空气阻力的情况下，物体到达地面所需的时间 t 和高度 h 应满足关系 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，其中 g 是重力加速度. 又如，半径为 r 的球与它的体积 V 应满足的关系为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$r\in[0,+\infty)$，其中 π 是圆周率. 再如，一定质量的理想气体的压强 p 和其体积 V 及温度 T 的关系为 $p=\dfrac{RT}{V}$，其中 R 为常数.

由上述例子不难看出，当高度 h、半径 r、体积 V 及温度 T 变化时，落体的时间 t、球体的体积 V 和理想气体的压强 p 都随之而变化，这种依赖关系称为**函数关系（functional relationship）**. 于是有如下关于函数的定义.

定义 1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 如果按照对应法则 f，对 D 中的每一个 x，均有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数（function）**，函数关系记作

$$f: D\to\mathbf{R}.$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域(domain)**，函数值的集合 $R(f)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域(range)**，有时 f 的值域也记为 $f(D)$. 一般地，定义在集合 D 上的函数记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

关于定义 1.1 的几点说明.

(1) 在函数的定义中出现了两个变量，即 x 和 y，这两个变量的联系是通过函数关系 f 建立起来的. 其中 x 是主动变化的，故称为**自变量(independent variable)**；y 随着 x 被动地变化，故称为**因变量(dependent variable)**.

(2) 根据函数的定义，虽然函数都存在定义域，但是在不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域时，该函数的定义域是使函数有意义的实数 x 的集合 $D=\{x\mid f(x)\in\mathbf{R}\}$，即**自然定义域(natural domain)**. 当不需要指明函数 f 的定义域时，函数又可以简写为“$y=f(x)$”. 但对于具有实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束. 例如，自由落体的高度 h 和球体的半径 r 的定义域都应该是区间 $[0,+\infty)$.

(3) 由函数的定义可以看到，构成函数的两个基本要素是定义域 D 和对应法则 f. 因此，可以把定义域相同并且对应法则相同的两个函数认为是相同的；而把定义域或对应法则不完全一样的两个函数称为是不同的函数. 换句话说，两个函数是否相同，与自变量、对应法则及因变量使用的符号是没有关系的. 例如，如下两组函数

$$y=f(x)=x,\quad x\in D=\{x\mid x\geqslant 0\}\quad 和\quad y=g(t)=\sqrt{t^2},\quad t\in D=\{t\mid t\geqslant 0\},$$

$$y=f(x)=\sqrt[3]{x^4+x^3}\quad 和\quad y=g(x)=x\sqrt[3]{x+1}$$

是相同的函数. 又如，如下两组函数

$$y=f(x)=1\quad 和\quad y=f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x,$$

$$y=f(x)=\ln x^2\quad 和\quad y=g(x)=2\ln x,$$

因为定义域不同，所以它们是不同的函数.

(4) 函数的定义指出：对于每个自变量 $x\in D$，按照对应关系 f，对应唯一一个因变量 $y\in\mathbf{R}$，这样的对应就是所谓的单值对应. 反之，一个因变量 $y\in R(f)$ 就不一定只有一个自变量 $x\in D$ 与之对应，例如正弦函数 $y=\sin x$ 就是如此.

(5) 在函数的定义中，要求与自变量 x 对应的因变量 y 是唯一确定的，这种函数也称为**单值函数(single valued function)**. 如果取消唯一这个要求，即对应于 x 的值，可以有两个以上确定的 y 值与之对应，这种函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数(multivalued function)**. 例如，函数 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ 是多(双)值函数. 今后如果没有特别声明，所讨论的函数都限于单值函数.

(6) 设有函数 $y=f(x)$，对于给定的 $x\in D$，其对应的函数值为 $y=f(x)$，在平面直角坐标系 xOy 中可以画出点 $(x,f(x))$，当自变量 x 在函数 $y=f(x)$ 的定义域内变动并取遍定义域中所有值时，动点 $(x,f(x))$ 的轨迹，即点集

$$\{(x,f(x))\mid x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形(figure)**或称为函数 $y=f(x)$ 的**图像(graph)**.

1.1.3 具有某种特性的函数

在讨论一些简单的函数时，它们有时表现出了各自不同的特性. 掌握这些特性，在处理一些相对复杂的函数时是非常有用的. 为了更好地刻画这些特性，下面介绍奇函数、偶函数、

周期函数、有界函数、单调函数等概念.

1. 奇函数与偶函数

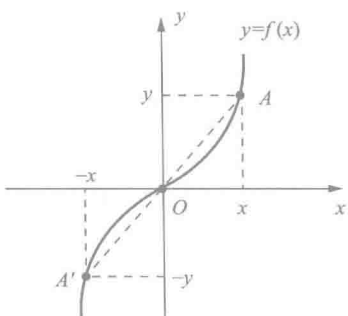
有这样一些函数,它们的定义域是关于原点对称的,并且函数图形也具有对称性,如关于原点对称或关于 y 轴对称,具有这种对称性的函数称为奇函数或偶函数.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即对于任意的 $x\in D$,都有 $-x\in D$. 如果 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是**奇函数(odd function)**;如果 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是**偶函数(even function)**.

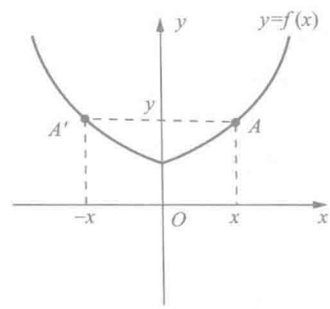
如果函数 $y=f(x)$ 是奇函数,则对于函数图形上的点 (x_0, y_0),即 $y_0=f(x_0)$,有

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0.$$

也就是说,$(-x_0,-y_0)$ 也在函数 $y=f(x)$ 的图形上. 由此可知,奇函数的图形关于原点对称,如图 1.3(a)所示. 同理可知,偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1.3(b)所示.



(a)



(b)

图 1.3

不难验证,函数 $y=x^4+3x^2+2$,$y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=\frac{\sin x}{x}$ 皆为偶函数;函数 $y=\frac{1}{x}$,$y=x^3$ 和 $y=x^2\sin x$ 皆为奇函数.

2. 周期函数

在自变量变化过程中,有些函数经过一定阶段后又重复原来的状态,这样的函数称为具有周期性的函数,如中学物理中做简谐振动的弹簧振子、单摆等.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义. 若存在正数 T,对于任意的 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,并且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数(periodic function)**,T 称为该函数的一个**周期(period)**. 周期函数的图形如图 1.4 所示.

用数学归纳法不难证明,若 T 是函数 $y=f(x)$ 的一个周期,则 $2T,3T,\cdots,nT,\cdots$ 也是它的周期,其中 n 是正整数. 因此,周期函数的周期不是唯一的. 若函数 $y=f(x)$ 存在一个最小的正周期,通常将这个最小正周期称为该函数的**基本周期(fundamental period)**,简称为周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数. 再如,常值函数 $y=f(x)\equiv 1$ 也是