普通高等教育“十二五”规划教材／教辅

概率论与数理统计
典型例题和习题解答

韩明　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材/教辅

概率论与数理统计
典型例题和习题解答

韩 明 主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书给出了《概率论与数理统计》第4版(韩明主编,同济大学出版社)中大多数习题的详细解答.作为补充,还给出了一些典型例题(与原教材中的例题、习题不重复),并选取近些年"全国硕士研究生入学统一考试数学试题"(概率统计部分)的"考研真题",给出了详细解答.本书既可以与原教材配套使用,也可以单独使用.

本书可以作为高等院校各专业(非数学类)"概率论与数理统计"课程的学习辅导书,也可以作为"全国硕士研究生入学统一数学考试"(概率统计部分)的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计典型例题和习题解答/韩明主编. --上海:同济大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-5608-6787-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第042997号

概率论与数理统计典型例题和习题解答

韩 明 主编

责任编辑 张 莉 **助理编辑** 蔡梦茜 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 17.75
字 数 355 000
版 次 2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-6787-8

定 价 38.00元

前　　言

本书是为《概率论与数理统计》第4版(韩明主编,同济大学出版社)(以下简称为"原教材")编写的配套学习辅导书.它有以下特点:

(1) 按原教材的章节顺序编写,每节包括:内容概要、典型例题、习题解答;每章的后面还包括:复习题解答、"考研真题"及其解答.

(2) 原教材中大多数习题可以在本书中找到详细解答,并标注其在原教材中的题号,而且还增加了典型例题(与原教材中的例题、习题不重复)、"考研真题"及其解答.

(3) 在解题过程中,对一些初学者不容易理解的地方尽量详细,对少部分题目还给出了一题多解.

本书总题量共428道,题量分布具体如下:典型例题132道,习题解答208道(包括原教材每节"习题解答"140道、每章"复习题解答"68道,占原教材习题总量288道的72.2%),"考研真题"及其解答88道(另外还有少部分"考研真题"安排在典型例题、习题解答之中).

学习"概率论与数理统计"课程,做习题是必不可少的重要环节之一.尽管学习了一些概念、原理和方法,但要达到融会贯通、正确理解和灵活应用,还需要完成一定数量的习题.基于"概率论与数理统计"研究对象的特点,这门课程的习题中与实际应用联系的题目较多.初学者往往不知道如何入手,包括如何利用已知条件,如何对问题进行分析,如何表述求解过程等.编写本书的主要目的,一是为初学者在如何思考、分析和表达等方面提供学习辅导;二是为准备参加"全国硕士研究生入学统一数学考试"者提供复习指导.本书除讲解典型例题、"考研真题"及其解答外,对原教材中大多数习题给出了详细解答,供读者参考.希望读者在未经过独立思考前,不要轻易去看解答.虽然本书对一些题目还给出了一题多解,但更希望读者给出优于本书所给出的解答方法,并进行深入的思考.

怎样看待习题解答?让我们聆听大师的教导:陈希孺教授(中国科学院院士)在《数理统计习题教程》的"序言"中指出:"对《题解》一类的书,个人一贯的观点是:善用之则有益;若对它产生依赖心理,以之代替自己的思考,则不惟无益,甚至有害."

原教材中有一些计算、画图是用MATLAB软件来实现的(相关MATLAB程序见原教材的附录B).本书中也有个别习题中的计算或画图部分是利用MATLAB软件来完成的,如直方图、散点图等,还有一些繁琐的计算,如参数估计、假设检验、回归分析中的计算等.

感谢原教材主审王家宝教授十多年来的指导和鼓励,对陈翠教授十多年前(编写

原教材初期)提供的习题表示感谢.在本书的编写过程中,曾与张积林副教授、陈翠教授进行讨论,并采纳了他们的一些建议,在此一并致谢.借此机会,感谢读者十多年来对《概率论与数理统计》(第1～4版)的关心和厚爱.愿本书的出版对广大师生在“概率论与数理统计”教与学的过程中有所帮助.由于作者水平所限,书中不当之处在所难免,恳请专家和读者批评指正.

韩　明

2017年1月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

本章主要包括：随机事件及其运算，事件的概率及其性质，条件概率与贝叶斯公式，事件的独立性与伯努利概型，习题 1.1—习题 1.4 解答，复习题 1 解答，(与本章有关的)“考研真题”及其解答.

首先按原教材列出每节**内容概要**，然后是每节**典型例题**、每节**习题解答**、**复习题 1 解答**，最后是**“考研真题”及其解答**.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　本节内容概要

1. 随机试验

如果一个试验同时满足下列条件：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称“可重复性”)；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果(简称“不唯一性”)；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称“不确定性”)；

则称这样的试验为**随机试验**. 有时把随机试验简称为**试验**(experiment)，用 E 来表示.

2. 样本空间

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的元素，即试验 E 的每个结果，称为**样本点**，用 ω 来表示.

3. 随机事件

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**(或“随机试验的某些样本点组成的集合”)，简称**事件**(event). 在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

(1) **基本事件**

由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**.

(2) **必然事件**

样本空间 Ω 包含所有样本点，它是自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**.

(3) **不可能事件**

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发

生,称为**不可能事件**.

4. 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间 Ω,而 A, B, $A_i(i=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$,则称事件 B **包含**事件 A,这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) 事件 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A, B 中至少有一个事件发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$ 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅当 A, B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. 事件 A 与事件 B 的积事件,简记作 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, $\cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生,B 不发生时,事件 $A-B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B=\Omega$ 且 $A \cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**(**或逆事件**). 记事件 A 的对立事件为 $\bar{A}$, $\bar{A}=\Omega-A$.

(6) 若 $A \cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**(**或互斥**). 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 显然,同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.

5. 事件的运算性质

设 A, B, C, $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为事件,则有

交换律:$A \cup B=B \cup A$, $A \cap B=B \cap A$.

结合律:$A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$, $A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$.

分配律:$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$, $A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$.

德摩根(De Morgan)**律**:

$$\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i.$$

6. 在集合论、概率论中符号与意义的对照

在集合论、概率论中符号与意义的对照,如表 1-1 所示.

表 1-1 在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件

（续表）

符号	集合论	概率论
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交集	事件 A 与 B 的积事件
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与 B 的差集	事件 A 与 B 的差事件
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

1.1.2 典型例题

例 1.1.1 从一批产品中任意取 4 件进行检查，用 A_i 表示“发现 i 件次品”$(i = 0, 1, \cdots, 4)$，请用 $A_i(i = 0, 1, \cdots, 4)$ 表示下列事件：

(1) 最多发现 2 件次品；(2) 未发现次品；(3) 至少发现 1 件次品.

解 (1)“最多发现 2 件次品”可以表示为 $A_0 \cup A_1 \cup A_2$；

(2)“未发现次品”可以表示为 A_0；

(3)“至少发现 1 件次品”可以表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

例 1.1.2 在分别标有 1，2，3，4，5，6，7，8 的 8 张卡片中任取一张，设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”；事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”；事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”. 请用样本点表示如下事件：$A \cup B$，AB，$\bar{B}$，$A - B$，$B - A$，BC，$\overline{B \cup C}$，$(A \cup B)C$.

解 根据题意，$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{2, 4, 6, 8\}$，$C = \{1, 3, 5, 7\}$，则有：

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$，$AB = \{2, 4\}$，$\bar{B} = \{1, 3, 5, 7\} = C$，$A - B = \{1, 3\}$，$B - A = \{6, 8\}$，$BC = \varnothing$，$\overline{B \cup C} = \varnothing$，$(A \cup B)C = \{1, 3\}$.

例 1.1.3 设 A，B，C 为任意三个随机事件，则以下命题中正确的一个是(　　).

(A) $A \cup B - B = A - B$　　(B) $(A - B) \cup B = A$

(C) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$　　(D) $A \cup B = A\bar{B} \cup B\bar{A}$

解 A.

由于 $A \cup B - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} = A - B$，因此选(A).

例 1.1.4 设 A，B 为两个事件，证明：(1) $B = (AB) \cup (\bar{A}B)$；(2) AB 与 $\bar{A}B$ 互

不相容.

证明 (1) 根据题意,有 $(AB) \cup (\bar{A}B) = (A \cup \bar{A})B = \Omega B = B$.

(2) 由于 $(AB)(\bar{A}B) = (A\bar{A})B = \varnothing$, 所以 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

1.1.3 习题 1.1 解答

注:"**习题 1.1.3**"表示原教材中习题 1.1 的第 3 题,下同.

习题 1.1.3 一名射手向某个目标射击 3 次,事件 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标 $(i = 1, 2, 3)$, 试用文字叙述下列事件:(1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$; (2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; (3) $\bar{A}_1 A_2$; (4) $A_2 \cup \bar{A}_3$.

解 根据题意,由于 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标 $(i = 1, 2, 3)$, 则有

(1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$: 前两次射击中至少有 1 次未击中目标;

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$: 3 次射击中至少有 1 次击中目标;

(3) $\bar{A}_1 A_2$: 第 1 次射击未击中目标,第 2 次射击击中目标;

(4) $A_2 \cup \bar{A}_3$: 第 2 次射击击中目标或第 3 次射击未击中目标.

习题 1.1.6 下列说法是否正确,为什么? (1) 若 $A \cup B = \Omega$, 则 A, B 互为对立事件; (2) 若 $ABC = \varnothing$, 则 A, B, C 两两互不相容.

解 (1) 不正确. 因为 A, B 互为对立事件需要满足两个条件 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$.

(2) 不正确. 例如在抛掷 2 颗骰子的随机试验中, $A = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $C = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$, 则有 $ABC = \varnothing$, 但 $AB = \{(1, 1)\}$, $BC = \{(2, 2)\}$, 所以 A, B, C 不是两两互不相容.

1.2 事件的概率及其性质

1.2.1 本节内容概要

1. 频率及其性质

定义 1.2.1 在相同条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A,称为事件 A 发生的**频数**,比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**(frequency),并记作 $f_n(A)$.

根据定义 1.2.1,易知频率具有下述基本性质:

(1) 对于任意事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) 对于必然事件 Ω, $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

2. 概率的统计定义

定义 1.2.2(概率的统计定义) 在大量重复试验中,若事件 A 发生的频率稳定地在某一个常数 p 附近摆动,则称该常数 p 为事件 A 发生的**概率**(probability),记作 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

应该指出,频率是变动的,而概率(频率的稳定值)则是常数.

3. 古典概型

具有以下两个特点的试验,称为**古典型试验**:

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素;

(2) 试验中的每一个基本事件发生的可能性相同.

定义 1.2.3(概率的古典定义) 设随机试验 E 为古典型试验,它的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,事件 A 包含 k 个基本事件,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}, \tag{1.2.1}$$

式中,$k=$ 事件 A 包含的基本事件数,$n=\Omega$ 中基本事件的总数.

称满足定义 1.2.3 的概率模型为**古典概型**.显然,在古典概型中基本事件发生的概率都相等,因此古典概型又称为**等可能概型**.

4. 几何概率

定义 1.2.4(几何概率) 如果试验 E 的样本点有无限多个,其样本空间 Ω 可用一个有度量的几何区域来表示,并且样本点落在 Ω 内任意一点处都是等可能的,其中 A 是 Ω 中的一个区域,样本点落在区域 A 的概率与 A 的测度(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置和形状无关,则样本点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{1.2.2}$$

式中,$m(A)$为区域 A 的测度,$m(\Omega)$为区域 Ω 的测度.称上述概率为**几何概率**.

5. 概率的公理化定义

定义 1.2.5(概率的公理化定义) 设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间.若对于试验 E 的每一个事件 A,都有一个实数 $P(A)$与之对应,并且满足下列 3 个公理,则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

(1) **非负性**公理:对于任意一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性**公理:对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性**公理:对于可列个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i).$$

6. 概率的性质

性质 1.2.1 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2.2(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件,则有
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

性质 1.2.3(减法公式和概率的单调性) 设 A, B 是两个事件,若 $A \subset B$, 则有 (1) $P(B-A)=P(B)-P(A)$; (2)$P(A) \leqslant P(B)$.

注:(1) 若 $A \subset B$, 则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$, 称为减法公式(后面还有"加法公式").

(2) 若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$, 称为概率的单调性.

性质 1.2.4 对于任意一个事件 A,则 $P(A) \leqslant 1$.

性质 1.2.5(对立事件的概率) 对于任意一个事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 1.2.6(加法公式) 对于任意两个事件 A, B,有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质 1.2.6 可以推广到多个事件的情形.

设 A_1, A_2, A_3 是任意 3 个事件,则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2) \\ &-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

一般地,对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$, 有

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ =&\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n). \end{aligned}$$

1.2.2 典型例题

例 1.2.1 已知 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$, $P(A \cup B)=0.6$, 求 $P(AB)$.

解 根据题意,有 $0.6=P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7-P(AB)$, 则 $P(AB)=0.1$.

例 1.2.2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$, 求(1) A, B, C 中至少发生一个的概率;(2) A, B, C 都不发生的概率.

解 (1) 由于 $ABC \subset AB$, 且 $P(AB)=0$, 根据概率的单调性,有 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB)=0$,则 $P(ABC)=0$.

根据加法公式,有

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)$

$$+P(ABC)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}.$$

(2) A, B, C 都不发生的对立事件是 A, B, C 中至少发生一个,所以有

$$P(A, B, C\text{都不发生})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

例 1.2.3 若 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, $P(AB)=\frac{1}{6}$, $P(BC)=\frac{1}{4}$, $P(AC)=0$,求 $P(A\cup B\cup C)$.

解 根据题意,有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-0+0\\&=\frac{11}{12}.\end{aligned}$$

上述计算过程中用到如下事实: $ABC\subset AC\Rightarrow 0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AC)=0\Rightarrow P(ABC)=0$.

例 1.2.4 在 1~2 000 的整数中随机地取一个数,问取到的整数既不能被 6 整除,又不能被 8 整除的概率是多少?

解 设 $A=$"取到的整数能被 6 整除", $B=$"取到的整数能被 8 整除",则所求概率为

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

由于 $333<\frac{2\,000}{6}<334$,所以 $P(A)=\frac{333}{2\,000}$;由于 $\frac{2\,000}{8}=250$,所以 $P(B)=\frac{250}{2\,000}$.

由于一个数同时能被 6 和 8 整除,就相当于能被 24 整除,则 $83<\frac{2\,000}{24}<84$,于是 $P(AB)=\frac{83}{2\,000}$.

因此,所求概率为

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\frac{333}{2\,000}-\frac{250}{2\,000}+\frac{83}{2\,000}=\frac{3}{4}.$$

例 1.2.5 从[0, 1]区间中随机取得 2 个数,求其积不小于 $\frac{3}{16}$,其和不大于 1 的