



普通高等教育“十二五”规划教材 / 教辅

概率论与数理统计 典型例题和习题解答

韩 明 主 编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材/教辅

概率论与数理统计

典型例题和习题解答

韩 明 主编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书给出了《概率论与数理统计》第4版(韩明主编,同济大学出版社)中大多数习题的详细解答.作为补充,还给出了一些典型例题(与原教材中的例题、习题不重复),并选取近些年“全国硕士研究生入学统一考试数学试题”(概率统计部分)的“考研真题”,给出了详细解答.本书既可以与原教材配套使用,也可以单独使用.

本书可以作为高等院校各专业(非数学类)“概率论与数理统计”课程的学习辅导书,也可以作为“全国硕士研究生入学统一数学考试”(概率统计部分)的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计典型例题和习题解答/韩明主

编. —上海:同济大学出版社,2017.3

ISBN 978-7-5608-6787-8

I. ①概… II. ①韩… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料
IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042997 号

概率论与数理统计典型例题和习题解答

韩 明 主编

责任编辑 张 莉 助理编辑 蔡梦茜 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张 17.75

字 数 355 000

版 次 2017 年 4 月第 1 版 2017 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-6787-8

定 价 38.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

本书是为《概率论与数理统计》第4版(韩明主编,同济大学出版社)(以下简称“原教材”)编写的配套学习辅导书.它有以下特点:

(1) 按原教材的章节顺序编写,每节包括:内容概要、典型例题、习题解答;每章的后面还包括:复习题解答、“考研真题”及其解答.

(2) 原教材中大多数习题可以在本书中找到详细解答,并标注其在原教材中的题号,而且还增加了典型例题(与原教材中的例题、习题不重复)、“考研真题”及其解答.

(3) 在解题过程中,对一些初学者不容易理解的地方尽量详细,对少部分题目还给出了一题多解.

本书总题量共428道,题量分布具体如下:典型例题132道,习题解答208道(包括原教材每节“习题解答”140道、每章“复习题解答”68道,占原教材习题总量288道的72.2%),“考研真题”及其解答88道(另外还有少部分“考研真题”安排在典型例题、习题解答之中).

学习“概率论与数理统计”课程,做习题是必不可少的重要环节之一.尽管学习了一些概念、原理和方法,但要达到融会贯通、正确理解和灵活应用,还需要完成一定数量的习题.基于“概率论与数理统计”研究对象的特点,这门课程的习题中与实际应用联系的题目较多.初学者往往不知道如何入手,包括如何利用已知条件,如何对问题进行分析,如何表述求解过程等.编写本书的主要目的,一是为初学者在如何思考、分析和表达等方面提供学习辅导;二是为准备参加“全国硕士研究生入学统一数学考试”者提供复习指导.本书除讲解典型例题、“考研真题”及其解答外,对原教材中大多数习题给出了详细解答,供读者参考.希望读者在未经过独立思考前,不要轻易去看解答.虽然本书对一些题目还给出了一题多解,但更希望读者给出优于本书所给出的解答方法,并进行深入的思考.

怎样看待习题解答?让我们聆听大师的教导:陈希孺教授(中国科学院院士)在《数理统计习题教程》的“序言”中指出:“对《题解》一类的书,个人一贯的观点是:善用之则有益;若对它产生依赖心理,以之代替自己的思考,则不惟无益,甚至有害.”

原教材中有一些计算、画图是用MATLAB软件来实现的(相关MATLAB程序见原教材的附录B).本书中也有个别习题中的计算或画图部分是利用MATLAB软件来完成的,如直方图、散点图等,还有一些繁琐的计算,如参数估计、假设检验、回归分析中的计算等.

感谢原教材主审王家宝教授十多年来的指导和鼓励,对陈翠教授十多年前(编写

原教材初期)提供的习题表示感谢.在本书的编写过程中,曾与张积林副教授、陈翠教授进行讨论,并采纳了他们的一些建议,在此一并致谢.借此机会,感谢读者十多年来对《概率论与数理统计》(第1~4版)的关心和厚爱.愿本书的出版对广大师生在“概率论与数理统计”教与学的过程中有所帮助.由于作者水平所限,书中不当之处在所难免,恳请专家和读者批评指正.

韩 明

2017年1月

目 录

前言

第 1 章 随机事件与概率	1
1.1 随机事件及其运算	1
1.1.1 本节内容概要	1
1.1.2 典型例题	3
1.1.3 习题 1.1 解答	4
1.2 事件的概率及其性质	4
1.2.1 本节内容概要	4
1.2.2 典型例题	6
1.2.3 习题 1.2 解答	10
1.3 条件概率与贝叶斯公式	11
1.3.1 本节内容概要	11
1.3.2 典型例题	12
1.3.3 习题 1.3 解答	16
1.4 事件的独立性与伯努利概型	17
1.4.1 本节内容概要	17
1.4.2 典型例题	18
1.4.3 习题 1.4 解答	21
1.5 复习题 1 解答	23
1.6 “考研真题”及其解答	25
第 2 章 随机变量及其分布	29
2.1 随机变量的概念与离散型随机变量	29
2.1.1 本节内容概要	29
2.1.2 典型例题	31
2.1.3 习题 2.1 解答	33
2.2 随机变量的分布函数	35
2.2.1 本节内容概要	35
2.2.2 典型例题	36
2.2.3 习题 2.2 解答	39

2.3 连续型随机变量及其概率密度	41
2.3.1 本节内容概要	41
2.3.2 典型例题	44
2.3.3 习题 2.3 解答	48
2.4 随机变量函数的分布	49
2.4.1 本节内容概要	49
2.4.2 典型例题	50
2.4.3 习题 2.4 解答	54
2.5 复习题 2 解答	57
2.6 “考研真题”及其解答	61
第 3 章 多维随机变量及其分布	68
3.1 二维随机变量及其分布	68
3.1.1 本节内容概要	68
3.1.2 典型例题	70
3.1.3 习题 3.1 解答	72
3.2 边缘分布	75
3.2.1 本节内容概要	75
3.2.2 典型例题	75
3.2.3 习题 3.2 解答	78
3.3 随机变量的独立性	80
3.3.1 本节内容概要	80
3.3.2 典型例题	81
3.3.3 习题 3.3 解答	83
3.4 两个随机变量函数的分布	85
3.4.1 本节内容概要	85
3.4.2 典型例题	86
3.4.3 习题 3.4 解答	89
3.5 复习题 3 解答	92
3.6 “考研真题”及其解答	98
第 4 章 随机变量的数字特征	107
4.1 数学期望	107
4.1.1 本节内容概要	107
4.1.2 典型例题	108
4.1.3 习题 4.1 解答	110

4.2 方差	112
4.2.1 本节内容概要	112
4.2.2 典型例题	113
4.2.3 习题 4.2 解答	115
4.3 协方差、相关系数与矩	118
4.3.1 本节内容概要	118
4.3.2 典型例题	119
4.3.3 习题 4.3 解答	121
4.4 复习题 4 解答	123
4.5 “考研真题”及其解答	128
第 5 章 大数定律及中心极限定理	136
5.1 大数定律	136
5.1.1 本节内容概要	136
5.1.2 典型例题	138
5.1.3 习题 5.1 解答	138
5.2 中心极限定理	140
5.2.1 本节内容概要	140
5.2.2 典型例题	141
5.2.3 习题 5.2 解答	142
5.3 复习题 5 解答	145
5.4 “考研真题”及其解答	148
第 6 章 数理统计的基本概念	151
6.1 几个基本概念	151
6.1.1 本节内容概要	151
6.1.2 典型例题	152
6.1.3 习题 6.1 解答	153
6.2 三个重要分布与抽样定理	156
6.2.1 本节内容概要	156
6.2.2 典型例题	160
6.2.3 习题 6.2 解答	163
6.3 复习题 6 解答	166
6.4 “考研真题”及其解答	169

第7章 参数估计	174
7.1 点估计	174
7.1.1 本节内容概要	174
7.1.2 典型例题	177
7.1.3 习题7.1解答	180
7.2 估计量的评选标准	182
7.2.1 本节内容概要	182
7.2.2 典型例题	182
7.2.3 习题7.2解答	184
7.3 区间估计	186
7.3.1 本节内容概要	186
7.3.2 典型例题	189
7.3.3 习题7.3解答	190
7.4 复习题7解答	193
7.5 “考研真题”及其解答	197
第8章 假设检验	209
8.1 假设检验的基本思想与步骤	209
8.1.1 本节内容概要	209
8.1.2 典型例题	211
8.1.3 习题8.1解答	214
8.2 单个正态总体均值与方差的检验	217
8.2.1 本节内容概要	217
8.2.2 典型例题	218
8.2.3 习题8.2解答	220
8.3 两个正态总体均值与方差的检验	222
8.3.1 本节内容概要	222
8.3.2 典型例题	223
8.3.3 习题8.3解答	225
8.4 分布拟合检验	227
8.4.1 本节内容概要	227
8.4.2 典型例题	229
8.4.3 习题8.4解答	231
8.5 复习题8解答	234
8.6 “考研真题”及其解答	239

第 9 章 回归分析	240
9.1 一元线性回归	240
9.1.1 本节内容概要	240
9.1.2 典型例题	243
9.1.3 习题 9.1 解答	245
9.2 可线性化的回归方程	249
9.2.1 本节内容概要	249
9.2.2 典型例题	250
9.2.3 习题 9.2 解答	252
9.3 复习题 9 解答	254
附录 概率论与数理统计附表	257
附表 1 正态分布表	257
附表 2 泊松分布表	258
附表 3 t 分布表	260
附表 4 χ^2 分布表	262
附表 5 F 分布表	264
附表 6 相关系数临界值 r_α 表	273
参考文献	274

第1章 随机事件与概率

本章主要包括:随机事件及其运算,事件的概率及其性质,条件概率与贝叶斯公式,事件的独立性与伯努利概型,习题 1.1—习题 1.4 解答,复习题 1 解答,(与本章有关的)“考研真题”及其解答.

首先按原教材列出每节内容概要,然后是每节典型例题、每节习题解答、复习题 1 解答,最后是“考研真题”及其解答.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 本节内容概要

1. 随机试验

如果一个试验同时满足下列条件:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称“可重复性”);

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果(简称“不唯一性”);

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称“不确定性”);
则称这样的试验为**随机试验**.有时把随机试验简称为**试验**(experiment),用 E 来表示.

2. 样本空间

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,用 Ω 来表示.样本空间 Ω 中的元素,即试验 E 的每个结果,称为**样本点**,用 ω 来表示.

3. 随机事件

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**(或“随机试验的某些样本点组成的集合”),简称**事件**(event).在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

(1) 基本事件

由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

(2) 必然事件

样本空间 Ω 包含所有样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**.

(3) 不可能事件

空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发

生,称为不可能事件.

4. 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间 Ω , 而 $A, B, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B 包含事件 A , 这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$.

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A, B 中至少有一个事件发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.

类似地, 称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件, 称 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生. 事件 A 与事件 B 的积事件, 简记作 AB .

类似地, 称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件, 称 $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生, B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件). 记事件 A 的对立事件为 $\bar{A}$, $\bar{A} = \Omega - A$.

(6) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥). 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 显然, 同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.

5. 事件的运算性质

设 $A, B, C, A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为事件, 则有

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德摩根(De Morgan)律:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

6. 在集合论、概率论中符号与意义的对照

在集合论、概率论中符号与意义的对照, 如表 1-1 所示.

表 1-1 在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间, 必然事件
$\emptyset$	空集	不可能事件

(续表)

符号	集合论	概率论
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交集	事件 A 与 B 的积事件
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与 B 的差集	事件 A 与 B 的差事件
$A \cap B = \emptyset$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

1.1.2 典型例题

例 1.1.1 从一批产品中任意取 4 件进行检查,用 A_i 表示“发现 i 件次品”($i = 0, 1, \dots, 4$), 请用 $A_i (i = 0, 1, \dots, 4)$ 表示下列事件:

(1) 最多发现 2 件次品; (2) 未发现次品; (3) 至少发现 1 件次品.

解 (1) “最多发现 2 件次品”可以表示为 $A_0 \cup A_1 \cup A_2$;

(2) “未发现次品”可以表示为 A_0 ;

(3) “至少发现 1 件次品”可以表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

例 1.1.2 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的 8 张卡片中任取一张, 设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”; 事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”; 事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”. 请用样本点表示如下事件: $A \cup B$, AB , $\bar{B}$, $A - B$, $B - A$, BC , $\overline{B \cup C}$, $(A \cup B)C$.

解 根据题意, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, 则有:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $AB = \{2, 4\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7\} = C$, $A - B = \{1, 3\}$, $B - A = \{6, 8\}$, $BC = \emptyset$, $\overline{B \cup C} = \emptyset$, $(A \cup B)C = \{1, 3\}$.

例 1.1.3 设 A, B, C 为任意三个随机事件, 则以下命题中正确的是().

(A) $A \cup B - B = A - B$

(B) $(A - B) \cup B = A$

(C) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$

(D) $A \cup B = A\bar{B} \cup B\bar{A}$

解 A.

由于 $A \cup B - B = (A \cup B) \bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} = A - B$, 因此选(A).

例 1.1.4 设 A, B 为两个事件, 证明: (1) $B = (AB) \cup (\bar{A}B)$; (2) AB 与 $\bar{A}B$ 互

不相容.

证明 (1) 根据题意, 有 $(AB) \cup (\bar{A}B) = (A \cup \bar{A})B = \Omega B = B$.

(2) 由于 $(AB)(\bar{A}B) = (A\bar{A})B = \emptyset$, 所以 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

1.1.3 习题 1.1 解答

注: “习题 1.1.3”表示原教材中习题 1.1 的第 3 题, 下同.

习题 1.1.3 一名射手向某个目标射击 3 次, 事件 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标 ($i = 1, 2, 3$), 试用文字叙述下列事件: (1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$; (2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; (3) $\bar{A}_1 A_2$; (4) $A_2 \cup \bar{A}_3$.

解 根据题意, 由于 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标 ($i = 1, 2, 3$), 则有

(1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$: 前两次射击中至少有 1 次未击中目标;

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$: 3 次射击中至少有 1 次击中目标;

(3) $\bar{A}_1 A_2$: 第 1 次射击未击中目标, 第 2 次射击击中目标;

(4) $A_2 \cup \bar{A}_3$: 第 2 次射击击中目标或第 3 次射击未击中目标.

习题 1.1.6 下列说法是否正确, 为什么? (1) 若 $A \cup B = \Omega$, 则 A, B 互为对立事件; (2) 若 $ABC = \emptyset$, 则 A, B, C 两两互不相容.

解 (1) 不正确. 因为 A, B 互为对立事件需要满足两个条件 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$.

(2) 不正确. 例如在抛掷 2 颗骰子的随机试验中, $A = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $C = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$, 则有 $ABC = \emptyset$, 但 $AB = \{(1, 1)\}$, $BC = \{(2, 2)\}$, 所以 A, B, C 不是两两互不相容.

1.2 事件的概率及其性质

1.2.1 本节内容概要

1. 频率及其性质

定义 1.2.1 在相同条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A , 称为事件 A 发生的频数, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率 (frequency), 并记作 $f_n(A)$.

根据定义 1.2.1, 易知频率具有下述基本性质:

(1) 对于任意事件 A , 有 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) 对于必然事件 Ω , $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k).$$

2. 概率的统计定义

定义 1.2.2(概率的统计定义) 在大量重复试验中,若事件 A 发生的频率稳定地在某一个常数 p 附近摆动,则称该常数 p 为事件 A 发生的概率(probability),记作 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

应该指出,频率是变动的,而概率(频率的稳定值)则是常数.

3. 古典概型

具有以下两个特点的试验,称为古典型试验:

- (1) 试验的样本空间只包含有限个元素;
- (2) 试验中的每一个基本事件发生的可能性相同.

定义 1.2.3(概率的古典定义) 设随机试验 E 为古典型试验,它的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$,事件 A 包含 k 个基本事件,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad (1.2.1)$$

式中, k = 事件 A 包含的基本事件数, n = Ω 中基本事件的总数.

称满足定义 1.2.3 的概率模型为古典概型.显然,在古典概型中基本事件发生的概率都相等,因此古典概型又称为等可能概型.

4. 几何概率

定义 1.2.4(几何概率) 如果试验 E 的样本点有无限多个,其样本空间 Ω 可用一个有度量的几何区域来表示,并且样本点落在 Ω 内任意一点处都是等可能的,其中 A 是 Ω 中的一个区域,样本点落在区域 A 的概率与 A 的测度(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置和形状无关,则样本点落在区域 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad (1.2.2)$$

式中, $m(A)$ 为区域 A 的测度, $m(\Omega)$ 为区域 Ω 的测度.称上述概率为几何概率.

5. 概率的公理化定义

定义 1.2.5(概率的公理化定义) 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间.若对于试验 E 的每一个事件 A ,都有一个实数 $P(A)$ 与之对应,并且满足下列 3 个公理,则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

- (1) 非负性公理:对于任意一个事件 A ,有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性公理:对于必然事件 Ω ,有 $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可列可加性公理:对于可列个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

6. 概率的性质

性质 1.2.1 $P(\emptyset) = 0$.

性质 1.2.2 (有限可加性) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

性质 1.2.3 (减法公式和概率的单调性) 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有 (1) $P(B - A) = P(B) - P(A)$; (2) $P(A) \leq P(B)$.

注: (1) 若 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, 称为减法公式 (后面还有“加法公式”).

(2) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 称为概率的单调性.

性质 1.2.4 对于任意一个事件 A , 则 $P(A) \leq 1$.

性质 1.2.5 (对立事件的概率) 对于任意一个事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 1.2.6 (加法公式) 对于任意两个事件 A, B , 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

性质 1.2.6 可以推广到多个事件的情形.

设 A_1, A_2, A_3 是任意 3 个事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

一般地, 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$, 有

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

1.2.2 典型例题

例 1.2.1 已知 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A \cup B) = 0.6$, 求 $P(AB)$.

解 根据题意, 有 $0.6 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7 - P(AB)$, 则 $P(AB) = 0.1$.

例 1.2.2 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{16}$, 求 (1) A, B, C 中至少发生一个的概率; (2) A, B, C 都不发生的概率.

解 (1) 由于 $ABC \subset AB$, 且 $P(AB) = 0$, 根据概率的单调性, 有 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$, 则 $P(ABC) = 0$.

根据加法公式, 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC)$$

$$+P(ABC) \\ = \frac{3}{4} - \frac{2}{16} = \frac{5}{8}.$$

(2) A, B, C 都不发生的对立事件是 A, B, C 中至少发生一个, 所以有

$$P(A, B, C \text{ 都不发生}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

例 1.2.3 若 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{6}, P(BC) = \frac{1}{4}, P(AC) = 0$, 求 $P(A \cup B \cup C)$.

解 根据题意, 有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - 0 + 0 \\ &= \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

上述计算过程中用到如下事实: $ABC \subset AC \Rightarrow 0 \leq P(ABC) \leq P(AC) = 0 \Rightarrow P(ABC) = 0$.

例 1.2.4 在 $1 \sim 2\,000$ 的整数中随机地取一个数, 问取到的整数既不能被 6 整除, 又不能被 8 整除的概率是多少?

解 设 $A =$ “取到的整数能被 6 整除”, $B =$ “取到的整数能被 8 整除”, 则所求概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB).$$

由于 $333 < \frac{2\,000}{6} < 334$, 所以 $P(A) = \frac{333}{2\,000}$; 由于 $\frac{2\,000}{8} = 250$, 所以 $P(B) = \frac{250}{2\,000}$.

由于一个数同时能被 6 和 8 整除, 就相当于能被 24 整除, 则 $83 < \frac{2\,000}{24} < 84$, 于是 $P(AB) = \frac{83}{2\,000}$.

因此, 所求概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{333}{2\,000} - \frac{250}{2\,000} + \frac{83}{2\,000} = \frac{3}{4}.$$

例 1.2.5 从 $[0, 1]$ 区间中随机取得 2 个数, 求其积不小于 $\frac{3}{16}$, 其和不大 1 的