HIT

数学·统计学系列

Inequality in the Tetrahedron

四面体不等式

樊益武 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

四面体不等式

Inequality in the Tetrahedron

樊益武 编著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共收集四面体不等式346个，其中包含大量作者的首创成果，还介绍了四面体不等式的几种证明方法，最后提出了25个猜想供读者研究。本书比较深入和系统地研究了四面体的棱、角、面及其外接球半径和内切球半径等几何元素之间的不等关系，内容新颖，富有启发性。

本书可作为进一步研究四面体不等式的参考文献，也可作为数学奥林匹克学习的参考资料。本书适合高中学生、大学学生、教师，以及不等式爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

四面体不等式/樊益武编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-5603-6396-7

Ⅰ.①四… Ⅱ.①樊… Ⅲ.①四面体—不等式
Ⅳ.①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第000838号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14.25 字数256千字
版 次 2017年1月第1版 2017年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6396-7
定 价 68.00元

◎ 前言

三角形是平面中最简单的多边形，它具有一系列优美性质，成为人们探求平面几何奥秘的基础. 四面体是立体空间中最简单的多面体，因此四面体可看成是三角形在空间的自然推广. 人们对三角形不等式的研究已经很深入了，已取得了成千上万个成果，其中许多重要的结论都可以推广到四面体中. 而四面体又不同于三角形，它既有面又有棱，还有各种不同的角，其内涵更加丰富. 近年来，随着凸体几何的深入研究，人们希望把许多重要的三角形不等式推广到 n 维单纯形中，四面体是推广中的一道坎. 一般来说，能推广到四面体，也就可能找到推广到单纯形的方法了. 事实上，四面体不等式已经成为几何不等式的重要组成部分.

然而，多年来，关于四面体不等式的研究一直是一个被忽视的角落，也可能是缺乏有效的方法，研究相对滞后，成果寥寥无几. 直到 1980 年以后，随着四面体的一些性质陆续出现，相继发现一批漂亮的体积公式，激发了人们对四面体的研究兴趣. 特别是杨路于 1987 年发表了《来自四面体的挑战》一文，提出关于四面体的十个问题，促进了对四面体问题和四面体不等式的研究. 到了 20 世纪 90 年代，四面体不等式有了更多更好的发现，在这方面，杨路、单墫、陈计、杨学枝、苏化明、杨世国、冷岗松、孔令恩、沈文选、杨克昌、林祖成等数十人的工作十分突出. 这里值得一提的是：杨路于 1981 年用 Cayley-Menger 行列式得到了不等式 $V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}P^{\frac{2}{3}}$；冷岗松于 1992 年得到了四面体侧面 f_i 上的高 h_i 和面积 S_i 的不等关系，从而获得了侧面三角形内切圆半径 $r_i(i=1,2,3,4)$ 和四面体内切球半径 r 的不等关系，即 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\leqslant\frac{2}{r^2}$；孔令恩于 1995 年得到三角

形到四面体的一个变换，把一批三角形不等式推广到四面体. 如此等等，这些无不展示了我国数学工作者的风采. 笔者也深入地研究了一些问题，撰写并发表了一些论文，提出并解决了一些问题. 为了将有关研究成果系统化，促进对四面体不等式问题的深入研究，笔者花费了两年多时间，查阅资料，分门别类，类比推广，探索研究，获得了一系列成果，将这些汇集成册，辑成此书.

本书收录了近 30 年来我国数学工作者的主要成果和笔者多年来的研究成果. 为了使问题充实完整，书中还收录了一些国际数学竞赛问题. 书后提出了 25 个问题供大家研究. 本书所列题目凡是出处明确的都给出了署名，题前带“*”的是笔者原创，许多还是第一次发表(有的也许别人早已发现，而笔者却不知晓). 本书按不等式中所含几何元素分类，但又不拘泥于分类，有时候依推理的逻辑关系编入所在的类. 阅读时按自己的需要，可任意从某一部分开始. 由于笔者所掌握的材料有限，有些很好的结果没有收录到，敬请谅解. 还由于笔者水平有限，难免有许多疏漏或错误，望读者提出批评意见.

四面体不等式是一个“黄金”矿点，对它的研究才刚刚起步，它的许多秘密有待挖掘、发现、证明. 如果本书对大家的学习和研究有所裨益，笔者就很欣慰了.

樊益武

2016 年 12 月

于西安

出版说明

若不加特别说明，本书约定：四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V，内切球和外接球的半径分别为 r,R，顶点 A_i 所对的侧面 f_i 的面积为 S_i，侧面 f_i 上的高为 h_i，旁切球半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$，侧面 f_i 与 f_j 所成的内二面角为 θ_{ij}，棱长 $a_{ij}=|A_iA_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，设侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的重心为 A'_i，记 $m_i=|A_iA'_i|$，则 m_i 叫作侧面 f_i 上的中线 $(i=1,2,3,4)$，表面积 $S=\sum\limits_{i=1}^{4}S_i$，“$\sum$”表示循环和，“$\prod$”表示循环积.

目录

预备知识

第一章

1.1 三角形中的一些重要不等式

记 $\triangle ABC$ 的面积为 Δ，边长分别为 a,b,c，外接圆和内切圆半径分别为 R,r.

1. Weitzenböck 不等式

$$4\sqrt{3}\Delta \leqslant \sum a^2 \tag{1.1}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

2. Polya-Szego 不等式

$$\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\prod a\right)^{\frac{2}{3}} \tag{1.2}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

3.
$$\frac{16}{9}\Delta^2 \sum a^2 \leqslant (abc)^2 \tag{1.3}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

4. Neuberg-Pedoe 不等式

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 和 b_1,b_2,b_3，面积分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqslant 16\Delta_1\Delta_2 \tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$.

5. 高灵不等式

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 和 b_1,b_2,b_3，面积分别为 Δ_1 和 Δ_2，则

$$\sum a_1(-b_1+b_2+b_3)\geqslant\sqrt{48\Delta_1\Delta_2} \tag{1.5}$$

等号成立当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$.

6. Finsler-Hadwiger 不等式

$$4\sqrt{3}\Delta+\sum(a-b)^2\leqslant\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+3\sum(a-b)^2 \tag{1.6}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

7. Walker 不等式

$$\sum\frac{1}{a^2}\leqslant\frac{1}{4r^2} \tag{1.7}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

8. Neuberg 不等式

$$\sum a^2\leqslant 9R^2 \tag{1.8}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

9. 欧拉(Euler) 不等式

$$2r\leqslant R \tag{1.9}$$

当且仅当三角形为正三角形时取等号.

1.2 四面体中的一些性质

性质 1.1
$$r=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4} \tag{1.10}$$

性质 1.2
$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r} \tag{1.11}$$

性质 1.3
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r} \tag{1.12}$$

性质 1.4
$$r_1=\frac{3V}{S_2+S_3+S_4-S_1},r_2=\frac{3V}{S_1+S_3+S_4-S_2}$$
$$r_3=\frac{3V}{S_1+S_2+S_4-S_3},\ r_4=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3-S_4} \tag{1.13}$$

性质 1.5
$$r_i=\frac{h_ir}{h_i-2r}\quad(i=1,2,3,4) \tag{1.14}$$

性质 1.6
$$V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4 \tag{1.15}$$

性质 1.7
$$V=\frac{1}{3}Sr \tag{1.16}$$

性质 1.8 设四面体 $ABCD$，记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$DA=a'$，$DB=b'$，$DC=c'$，则

$$R=\frac{1}{24V}\sqrt{(aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa')(cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc')} \tag{1.17}$$

性质 1.9

$$-144V^2=\sum a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)-\sum a^2(b^2+c^2-a^2)a'^2+a^2b^2c^2 \tag{1.18}$$

性质 1.10 若四面体的某一个面的三条边长分别为 a,b,c，它们的对棱分别为 a',b',c'，记

$$P_1=(aa')^2(b^2+c^2+b'^2+c'^2-a^2-a'^2)$$
$$P_2=(bb')^2(c^2+a^2+c'^2+a'^2-b^2-b'^2)$$
$$P_3=(cc')^2(a^2+b^2+a'^2+b'^2-c^2-c'^2)$$
$$Q=(abc)^2+(ab'c')^2+(bc'a')^2+(ca'b')^2$$

则其体积

$$V=\frac{1}{12}(P_1+P_2+P_3-Q)^{\frac{1}{2}} \tag{1.19}$$

性质 1.11 在四面体中，已知过同一顶点的三条棱 a,b,c 两两夹角为 θ_1，θ_2，θ_3，则四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}abc\cdot T(R) \tag{1.20}$$

其中 $T^2(R)=\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 & 1 & \cos\theta_3 \\ \cos\theta_2 & \cos\theta_3 & 1 \end{vmatrix}$.

性质 1.12 若四面体的一组对棱长分别为 a,a'，这组对棱间的距离为 d，对棱所成的角为 θ，则四面体的体积

$$V=\frac{1}{6}aa'd\cdot\sin\theta \tag{1.21}$$

性质 1.13
$$V=\frac{2S_1S_2\sin\theta_{12}}{3A_3A_4}=\frac{2S_1S_3\sin\theta_{13}}{3A_2A_4}=\frac{2S_1S_4\sin\theta_{14}}{3a_{23}}=\frac{2S_2S_3\sin\theta_{23}}{3a_{14}}=\frac{2S_3S_4\sin\theta_{34}}{3a_{12}} \tag{1.22}$$

性质 1.14 已知四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点的空间坐标为 $A_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$，则

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

性质 1.15(射影定理)

$$S_k=\sum_{i\neq k} S_i\cos\theta_{ki}\quad(k=1,2,3,4) \tag{1.24}$$

性质 1.16(余弦定理)

$$\begin{cases} S_1^2=S_2^2+S_3^2+S_4^2-2S_2S_3\cos\theta_{23}-2S_3S_4\cos\theta_{34}-2S_2S_4\cos\theta_{24} \\ S_2^2=S_1^2+S_3^2+S_4^2-2S_1S_3\cos\theta_{13}-2S_3S_4\cos\theta_{34}-2S_4S_1\cos\theta_{14} \\ S_3^2=S_1^2+S_2^2+S_4^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}-2S_2S_4\cos\theta_{24}-2S_1S_4\cos\theta_{14} \\ S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}-2S_2S_3\cos\theta_{23}-2S_3S_1\cos\theta_{13} \end{cases} \tag{1.25}$$

性质 1.17
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\cos\theta_{ij}=\sum_{i=1}^{4} S_i^2 \tag{1.26}$$

性质 1.18
$$\left(\sum_{i=1}^{4} S_i\right)^2=4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} S_iS_j\cos^2\frac{\theta_{ij}}{2} \tag{1.27}$$

性质 1.19　设侧面 $f_i(i=1,2,3,4)$ 的重心为 A'_i，则 $A_iA'_i(i=1,2,3,4)$ 交于一点 G，G 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心，则 $A_iG=3GA'_i(i=1,2,3,4)$.

性质 1.20

$$\begin{aligned} 4GA_1^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{34}^2=4GA_2^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{34}^2&= \\ 4GA_3^2+a_{12}^2+a_{14}^2+a_{24}^2&= \\ 4GA_4^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2&=\frac{3}{4}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

性质 1.21
$$\sum_{i=1}^{4} m_i^2=\frac{4}{9}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_{ij}^2 \tag{1.29}$$

性质 1.22　在四面体 $ABCD$ 中，三组对棱 AB，CD，AC，BD，AD，BC 的长分别为 a，a'，b，b'，c，c'，则该四面体的外接平行六面体三对棱长满足

$$\begin{cases} l_1^2=\frac{1}{4}(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) \\ l_2^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2) \\ l_3^2=\frac{1}{4}(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2) \end{cases} \tag{1.30}$$

1.3 几个常用不等式

1.算术平均值和几何平均值不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数,则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{1.31}$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

2.柯西不等式

设 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \tag{1.32}$$

等号当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时成立.

3.幂平均不等式

设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^r\leqslant\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\quad(r\geqslant1\text{ 或 }r<0) \tag{1.33}$$

$$\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^r\quad(0<r<1) \tag{1.34}$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

4.排序不等式

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一排序,则

$$\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n+1-j}\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_jb_{k_j}\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_jb_j \tag{1.35}$$

5.切比雪夫(Chebyshev)不等式

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \tag{1.36}$$

6.麦克劳林(Maclaurin)不等式(对称平均值不等式)

设 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\left(\frac{a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant$$

$$\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\prod\limits_{j=1}^{k}a_{i_j}}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{1.37}$$

四面体中角的不等关系

第二章

2.1 三面角

2.1.1 概念与性质

我们把具有公共端点并且不在同一平面内的 3 条射线 SA,SB,SC,以及相邻两条射线间的平面部分组成的图形,叫作以 S 为顶点的三面角,记作:三面角 $S-ABC$,射线 SA,SB,SC 叫作三面角的棱,相邻两棱间的角叫作三面角的面角,相邻的两个面组成的二面角叫作三面角的二面角.棱和对面所形成的角叫作三面角的棱面角.

在三面角 $S-ABC$ 中,记 $\angle ASB=\alpha,\angle ASC=\beta,\angle BSC=\gamma$,它们所对的二面角分别为 $\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma$,它们所对的棱面角分别为 $\tau_\alpha,\tau_\beta,\tau_\gamma$.

性质 2.1(空间余弦定理)

$$\cos\theta_\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \tag{2.1}$$

证明 如图 2.1,在 SA,SB 上分别取点 E,F,使得 $SE=SF=1$,作 $EH\perp SC$ 于点 H,$FG\perp SC$ 于点 G,则 EH 与 FG 所成的角为 θ_α,且 $SH=\cos\beta,EH=\sin\beta,SG=\cos\gamma,FG=\sin\gamma,HG=|SG-SH|=|\cos\gamma-\cos\beta|$.

由异面直线上两点间距离公式，有

$$EF^2=EH^2+FG^2+HG^2-2EH\cdot FG\cdot\cos\theta_\alpha=$$
$$2-2\cos\beta\cos\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\theta_\alpha$$

又在 $\triangle SEF$ 中，$EF^2=SE^2+SF^2-2SE\cdot SF\cos\alpha=2-2\cos\alpha$.

由此两式可得式(2.1)．证毕.

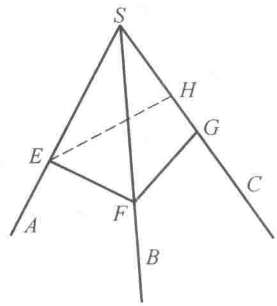

图 2.1

性质 2.2

$$P(S)=\sin^2\alpha\sin^2\tau_\alpha=\sin^2\beta\sin^2\tau_\beta=\sin^2\gamma\sin^2\tau_\gamma \tag{2.2}$$

（其中 $P(S)=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 叫作三面角的特征值）.

证明　如图 2.2，作 $EH\perp$ 平面 BSC 于点 H，$HF\perp SC$ 于点 F，联结 EF，则

$$\angle EFH=\theta_\alpha,\angle ESH=\tau_\gamma,\angle ESF=\beta$$

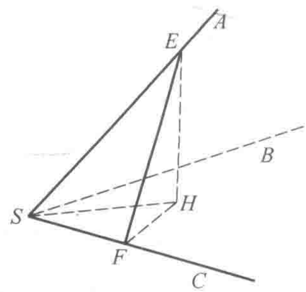

图 2.2

由于 $\sin\tau_\gamma=\dfrac{EH}{SE}$，$\sin\theta_\alpha=\dfrac{EH}{EF}$，$\sin\beta=\dfrac{EF}{SE}$，所以

$\sin\tau_\gamma=\dfrac{EH}{SE}=\dfrac{EH}{EF}\cdot\dfrac{EF}{SE}=\sin\theta_\alpha\sin\beta$. 于是

$$\sin^2\tau_\gamma\sin^2\gamma=\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\theta_\alpha=$$
$$\sin^2\beta\sin^2\gamma(1-\cos^2\theta_\alpha)=$$
$$\sin^2\beta\sin^2\gamma\left[1-\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2\right]=$$
$$P(S)$$

由 $P(S)$ 关于 α,β,γ 的对称性，有

$$\sin^2\alpha\sin^2\tau_\alpha=\sin^2\beta\sin^2\tau_\beta=\sin^2\gamma\sin^2\tau_\gamma=P(S)$$

证毕.

2.1.2　应用

1. 若 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，且 $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$，则以 α,β,γ 为面角构成一个三面角的充要条件是

$$\alpha+\beta>\gamma,\beta+\gamma>\alpha,\gamma+\alpha>\beta \tag{2.3}$$

证明　充分性显然. 以下证明必要性.

在三面角 $S-ABC$ 中，$\angle ASB=\alpha$，$\angle ASC=\beta$，$\angle BSC=\gamma$，则 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$. 在 SA 上取 $SP=1$，过点 P 作垂面与 SB，SC 分别交于点 Q，H，联结 PQ，PH，QH. 令 $\angle QPH=\varphi$，则 $PQ=\tan\alpha$，$PH=\tan\beta$，$SQ=\sec\alpha$，$SH=\sec\beta$，于是

$$QH^2=\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\varphi$$

$$QH^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma$$

两式相减,整理得

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi \tag{2.4}$$

因为 $\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0, -1 < \cos\varphi < 1$,从而有

$$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta) \tag{2.5}$$

不妨设 $\alpha \geqslant \beta$,则 $0 \leqslant \alpha - \beta < \pi$. 当 $\alpha + \beta \geqslant \pi$ 时,$\gamma, \alpha - \beta \in [0, \pi)$,且 $\cos\gamma < \cos(\alpha-\beta)$,所以 $\gamma > \alpha - \beta$,故 $\alpha - \beta < \gamma < \alpha + \beta$.

当 $0 < \alpha + \beta < \pi$ 时,$\gamma, \alpha - \beta, \alpha + \beta \in [0, \pi)$,由式(2.3)可得 $\alpha - \beta < \gamma < \alpha + \beta$. 于是有 $\alpha + \beta > \gamma, \beta + \gamma > \alpha$. 同理可证 $\alpha + \gamma > \beta$. 证毕.

2. 若 $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$,且 $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$,则以 α, β, γ 为面角构成一个三面角的充要条件是

$$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta) \tag{2.6}$$
$$\cos(\alpha+\gamma) < \cos\beta < \cos(\alpha-\gamma)$$
$$\cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta-\gamma)$$

证明 必要性. 由式(2.4)有

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi$$

因为 $$-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1, \sin\alpha, \sin\beta > 0$$

所以 $$\cos\gamma \leqslant \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

且 $$\cos\gamma \geqslant \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

所以 $$\cos(\alpha+\beta) < \cos\gamma < \cos(\alpha-\beta)$$

同理

$$\cos(\alpha+\gamma) < \cos\beta < \cos(\alpha-\gamma)$$
$$\cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta-\gamma)$$

充分性. 由式(2.3)必要性的证明可知

$$\alpha - \beta < \gamma < \alpha + \beta$$
$$\alpha - \gamma < \beta < \alpha + \gamma$$

由此得 $\alpha + \beta > \gamma, \beta + \gamma > \alpha, \gamma + \alpha > \beta$,再由式(2.3)的充分性结论成立. 证毕.

3. $$\pi < \theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma < 3\pi \tag{2.7}$$

证明 如图 2.3,设 P 为三面角 $S\text{-}ABC$ 内任意一点,$PE \perp$ 面 SAB,$PF \perp$ 面 SBC,$PD \perp$ 面 SAC,作 $EG \perp SA$,$DG \perp SA$ 等,则

$$\theta_\alpha = \angle DKF, \theta_\beta = \angle EGD, \theta_\gamma = \angle EHF$$

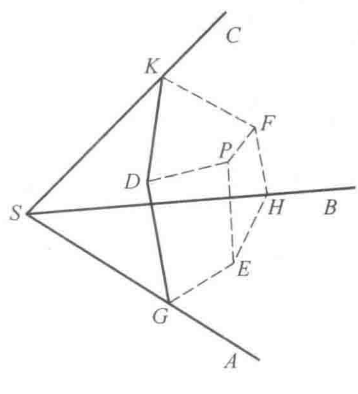

图 2.3

由平面四边形内角和定理有

$$\theta_\alpha + \angle DPF = \pi, \theta_\beta + \angle DPE = \pi$$