

积分变换与场论

王 振 丁 琦 邹 丽 编



科学出版社

积分变换与场论

王 振 丁 琦 邹 丽 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

积分变换与场论是针对理工本科生开设的一门重要的基础课程,此课程以高等数学为基础,是很多后续专业课程的工具课程. 通过学习本书,读者可了解傅里叶变换、拉普拉斯变换和场论的相关概念,初步掌握积分变换与场论的基本理论、基本方法,具备从事相关研究的基本技能,为学习后续的专业课程奠定基础. 本书立足于理工院校本科生的知识结构,采用问题驱动和导向的编写方式,注重与后续相关课程的融合,加强理论与实际应用的结合,有助于培养读者解决实际问题的能力.

本书可作为高等工科院校基础教材使用,也可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

积分变换与场论/王振, 丁琦, 邹丽编. —北京: 科学出版社, 2017. 6
ISBN 978-7-03-053034-9

I. ①积… II. ①王… ②丁… ③邹… III. ①积分变换-高等学校-教材
②场论-高等学校-教材 IV. ①O177.6 ②O412

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 117810 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2017 年 6 月第一次印刷 印张: 15

字数: 319 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

积分变换与场论是针对理工专业本科生开设的一门重要的数学基础课程。本课程以高等数学为基础,是很多后续专业课程的工具课程。积分变换与场论的基本理论和方法在科学技术的各个学科具有广泛应用,对深入了解相关问题的本质和掌握相应的数学技巧处理问题具有重要作用。通过本课程的学习,不仅能够使相关专业本科生掌握积分变换与场论的基本理论和基本方法,而且可以巩固、提高高等数学的基础知识,夯实数学基础,对理解数学在相关学科的应用方面助益良多,从而进一步增强学生应用数学知识解决实际问题的能力。

本书是根据教育部高等院校积分变换与场论的基本要求和课程改革精神,在多年的教学实践基础上编写而成。考虑到理工科学生的数学知识结构,针对工科本科生的特点,系统介绍了傅里叶变换、拉普拉斯变换、矢量分析和场论的基本概念、基本知识 with 基本方法。通过该课程的学习可使读者了解傅里叶变换、拉普拉斯变换和场论的相关概念,初步掌握积分变换与场论的基本理论、基本方法,具备以后从事相关研究的基本技能,为学习后续专业课程奠定基础。本书注重与后续相关课程的连接、融合,并对相关知识在后续课程中的应用做简单介绍。本书中的主要知识点,尽量以图文并茂、易于理解的方式进行讲解,同时在每节后有针对性地编排了相关的习题,以巩固所学内容。本书力求体系严谨,思路清晰,内容循序渐进,易于理解,并注重和前序、后续课程的联系。

在本书编写过程中我们力求突出以下特点:

1. 明确教材的使用者,针对性强。积分变换与场论针对理工科本科生讲授,是后续信号处理等专业课程的基础。本书是针对理工科本科生的所学知识和后续课程的数学基础编写的,做到与前序课程和后续课程的无缝连接,加强学科间联系,并简明扼要地介绍本学科的基础知识,为进一步学习后续课程奠定相关的数学基础。

2. 问题驱动的教材编写。针对工科生的自身特色和知识结构,采用实际问题为背景,提高学习兴趣,加强学习效果。通过具体的实例引入相关的数学知识点,再通过数学工具解决问题,并对问题的数学结果在实际问题中的意义给出物理解释,使数学学习不再是枯燥的理论推导,而是以实际问题为背景,以数学为工具解决问题的过程。如此一来,数学知识就变得更容易接受,更容易理解。

3. 数学理论方法和工程实践问题相结合。这有助于更好地理解数学知识的发展背景和现实要求,更好地理解相关数学知识的本质,使学生能够迅速接受相应的

数学知识,提高应用数学知识和数学工具解决实际问题的能力,同时对数学知识的理解也更加深入、全面.例如,地形数据作为数量场、方向导数和梯度等相关概念的引入和相关数学结论的分析,将方向导数应用于道路路径规划,提高相关专业本科生的数学基础,理解数学在相关学科的应用,提高应用数学知识解决实际问题的能力.

4. 适合于启发性教学的教材编写.通过对实际例子的分析,抓住主要问题,自然而然地引入相应的数学概念.激发学生的学习兴趣,逐步了解相关数学概念的物理背景,对掌握数学概念的作用和实质有很大的帮助.同时可以使学生了解利用数学工具解决实际问题的方法和技巧,提高选用合适的数学工具解决实际问题的能力.

本书获得了大连理工大学教材改革基金(项目编号:JC2016047)的资助.感谢大连理工大学数学科学学院领导和同事多年的帮助和支持.感谢大连理工大学电信学院张立勇博士提出的宝贵意见,感谢时楚楚在本书编写过程中投入的大量工作,并对关心和支持本书出版的同事一并表示感谢.感谢科学出版社王胡权编辑的大力支持和高效率的耐心工作,使得本书能够及时出版.

由于作者水平有限,书中疏漏之处在所难免,在此恳请同行与读者批评指正.

作者

2016年9月

目 录

前言

第 1 篇 积分变换

第 1 章 傅里叶变换	3
1.1 傅里叶级数	3
1.1.1 历史与背景	3
1.1.2 周期现象	3
1.1.3 傅里叶级数	4
1.1.4 频谱分析	8
1.1.5 相关应用	11
1.2 傅里叶变换	13
1.2.1 傅里叶积分	13
1.2.2 傅里叶变换	18
1.2.3 频谱分析	23
1.2.4 多元傅里叶变换	25
1.3 广义傅里叶变换	28
1.3.1 狄拉克函数	28
1.3.2 广义傅里叶变换	32
1.4 傅里叶变换的性质	34
1.4.1 基本性质	34
1.4.2 能量积分	42
1.5 卷积	46
1.5.1 卷积的概念	46
1.5.2 卷积的基本性质	48
1.5.3 卷积定理	50
1.5.4 卷积的应用	54
1.6 傅里叶变换的应用	59
1.6.1 积分方程求解	59
1.6.2 线性常微分方程求解	62
1.6.3 线性偏微分方程求解	64

1.6.4	在数理统计中的应用	66
第 2 章	拉普拉斯变换	70
2.1	拉普拉斯变换概念与存在定理	70
2.1.1	引言	70
2.1.2	拉普拉斯变换的概念	71
2.1.3	存在定理	72
2.1.4	间断点的处理	73
2.2	拉普拉斯变换的性质	79
2.2.1	基本性质	80
2.2.2	陶伯定理与沃森引理	93
2.3	拉普拉斯卷积	100
2.3.1	拉普拉斯卷积的概念	100
2.3.2	拉普拉斯卷积定理	102
2.4	拉普拉斯逆变换	106
2.4.1	反演积分公式	106
2.4.2	逆变换的求法	110
2.5	拉普拉斯变换的应用	116
2.5.1	计算广义积分	116
2.5.2	线性常微分方程求解	119
2.5.3	线性积分方程求解	121
2.5.4	线性偏微分方程边值问题	123
2.5.5	其他应用	128

第 2 篇 场 论

第 3 章	矢量与矢量空间	137
3.1	矢量代数	137
3.1.1	引言	137
3.1.2	矢量的概念	138
3.1.3	矢量代数	139
3.2	内积与外积	142
3.2.1	内积	142
3.2.2	外积	143
3.2.3	三连乘公式	145
3.3	线、平面与曲面	147

3.3.1	线与平面	147
3.3.2	曲面	151
第 4 章	矢量分析	156
4.1	矢性函数	156
4.1.1	矢性函数的概念	156
4.1.2	矢性函数极限与连续性	157
4.2	矢性函数的导数与微分	158
4.2.1	矢性函数的导数	159
4.2.2	导矢的几何意义与物理意义	162
4.2.3	矢性函数的微分	163
4.3	矢性函数的积分	165
4.3.1	定积分	165
4.3.2	不定积分	166
第 5 章	场论	169
5.1	场	169
5.1.1	场的概念	169
5.1.2	数量场与等值面	169
5.1.3	矢量场与矢量线	171
5.2	方向导数与梯度	175
5.2.1	方向导数	175
5.2.2	梯度的概念	180
5.2.3	梯度的应用	184
5.3	散度与旋度	187
5.3.1	散度	187
5.3.2	旋度	190
5.3.3	雅可比矩阵求散度和旋度	193
5.4	积分定理	195
5.4.1	高斯散度定理	195
5.4.2	斯托克斯定理	200
5.4.3	格林定理	204
5.5	几个重要的矢量场	205
5.5.1	有势场	206
5.5.2	管形场	210
5.5.3	调和场	212

附录 I	傅里叶分析发展历史简介	217
附录 II	矢量分析发展历史简介	220
附录 III	傅里叶变换简表	222
附录 IV	拉普拉斯变换简表	225

第 1 篇

积分变换

积分变换无论是在数学理论还是在工程应用中都非常有用的理论与方法,特别是求解复杂的微积分方程.常见的积分变换有傅里叶变换、拉普拉斯变换、梅林变换和 Z-变换,本书主要介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换及其在实际问题中的应用.

傅里叶变换是一种分析信号的方法,用正弦波作为信号的成分,既可以用来分析信号成分,也可以用这些成分来合成信号.通俗地说,傅里叶变换能将满足一定条件的函数表示成三角函数(正弦函数或余弦函数)或它们积分的线性组合,在不同研究领域,傅里叶变换具有不同的形式,如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换等.

拉普拉斯变换是为简化计算而建立的介于实变函数和复变函数之间的一种函数变换,对一个实变量函数做拉普拉斯变换,并在复数域中求出相应的结果,在计算上容易很多.在经典控制论中,用直观简单的图解方法来确定控制系统的特性,分析系统的运动过程,对系统的综合校正,都建立在拉普拉斯变换的基础上.

第 1 章 傅里叶变换

1.1 傅里叶级数

1.1.1 历史与背景

历史上, 傅里叶于 1804 年首先提出在有限区间上由任意图形定义的任意函数都可以表示为单纯的正弦函数与余弦函数之和的思想. 然而, 在 18 世纪有很多数学家针对傅里叶的思想提出很多质疑与反例. 1822 年, 傅里叶在研究热传导理论时发表了《热的解析理论》, 提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理, 使得傅里叶级数和傅里叶积分的理论得到了逐步发展. 傅里叶的论著为热传导方程、傅里叶级数、傅里叶积分及应用提供了现代数学理论. 1829 年, 狄利克雷证明了收敛性定理, 奠定了傅里叶级数的理论基础. 1854 年, 黎曼给出了一个函数的傅里叶级数收敛的充分必要条件. 1926 年, 柯尔莫哥洛夫证明了存在傅里叶级数处处收敛的勒贝格可积函数. 1966 年, 卡尔松证明了连续函数的傅里叶级数几乎处处收敛.

拉普拉斯和柯西在早期的研究工作中已经意识到了傅里叶的思想. 另外, 泊松在研究水波传播问题时也独立发现并使用了傅里叶变换的方法.

1.1.2 周期现象

人类很早就注意到了大自然中的周期现象, 例如, 月球和其他特定星球运动轨迹的周期性、海洋潮汐的周期性以及季节的循环. 牛顿通过万有引力定律解释了潮汐的周期性. 傅里叶及其后来者通过发展傅里叶分析, 深入研究自然现象的周期性, 并应用于信号和数据处理过程.

周期现象在自然界中大量存在. 一般来说, 周期性依赖于两个变量, 一个是时间的周期性, 另一个是空间的周期性.

我们经常会见到关于时间的周期现象. 比如, 当某人处于海洋中一点 (或电路中一点), 水波 (或者电流) 从该点经过时, 波峰和波谷会按同一模式不停重复. 波的高度就是关于时间的周期函数. 声音也有周期性, 声音是以纵向压力波形式传入人的耳朵, 对空气进行周期性压缩. 事实上, 在波的传播过程中会同时体现出空间和时间的周期性.

空间的周期性有时会表现为某种特定的模式在一定空间区域内的对称性. 比如晶体, 其原子结构在空间中就重复同一种模式, 所有原子的位置描述为格子, 格

子密度分布函数也是关于空间的周期函数.

首先考虑周期函数, 我们称一个函数 $f(t)$ 是以 $T > 0$ 为周期的, 如果对任意的 $t \in \mathbf{R}$ 有

$$f(t) = f(t + T)$$

若存在使上式成立的最小的 T , 那么这个最小值就称为函数 $f(t)$ 的基本周期. $f(t)$ 在一个周期 T 内的图像称为一个环. 从几何上看, 周期条件意味着通过一个环即可确定整个空间的图像.

两个周期函数之和是否还是周期函数. 从数学角度来看, 答案是否定的, 因为无理数的存在. 从工程角度来看, 答案是肯定的, 因为此时采用近似计算, 不考虑无理数的情形. 比如, $f_1(t) = \cos t + \cos(1.4t)$ 是周期函数, 而 $f_2(t) = \cos t + \cos(\sqrt{2}t)$ 不是周期函数.

最经典的周期现象就是简谐振动. 假设质点在单位圆周上做匀速圆周运动, 如图 1.1 所示, 考察其纵坐标 y 的变化规律. 已知单位圆的方程为

$$x^2 + y^2 = 1$$

设质点运动的角速度为 ω , $t = 0$ 时质点所在位置的幅角为 α , 则 t 时刻的质点纵坐标为

$$y = \sin(\omega t + \alpha)$$

这是以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数. 注意, y 在 -1 和 1 之间以频率 $\frac{\omega}{2\pi}$ 振动, 即单位时间内往返 -1 和 1 之间 $\frac{\omega}{2\pi}$ 次, 因此称 ω 为角频率.

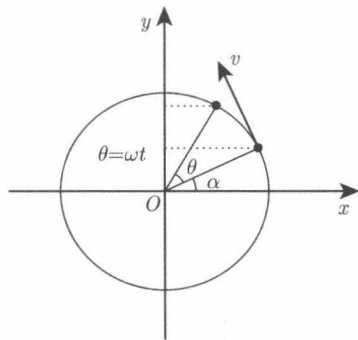


图 1.1 简谐振动

1.1.1.3 傅里叶级数

如上的正弦运动是容易分析的, 自然界中很多振动都是这些简单振动的合成. 比如 $y = \sin t + \sin 3t$, 其图像 (图1.2) 是比较复杂的, 但是单独分析每一个正弦振动 (图1.3 和图1.4) 都很简单, 因此我们只需研究每个振动, 然后合成即可.

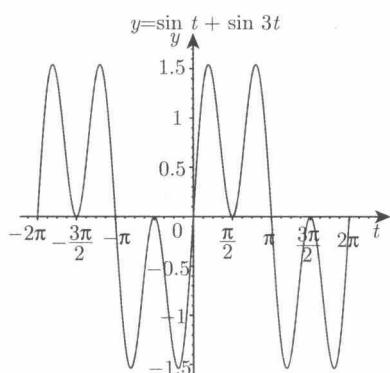


图 1.2 正弦运动的叠加

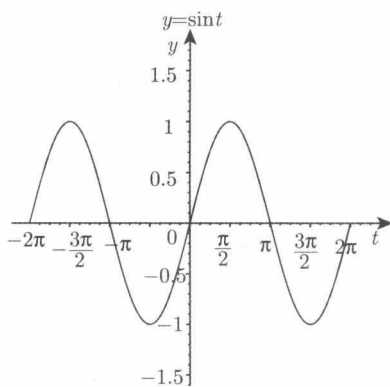


图 1.3

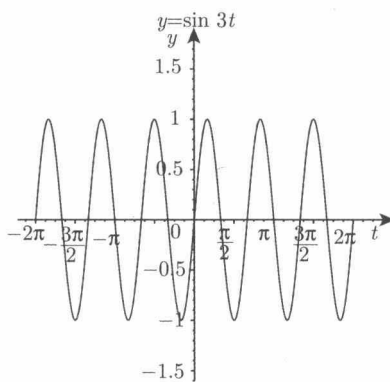


图 1.4

有限个正弦振动叠加之后,可以得到复杂的振动.反之,复杂的振动是否能够分解为有限的正弦振动呢?一般来讲是不能的.

那么,对于非正弦运动如何处理呢?即那些不能写成有限个正弦运动之和的振动如何考察呢.这就需要傅里叶级数将其化为形式类似的无穷级数,即无限个正弦运动的叠加,此时需要判断级数收敛性.

1829年,狄利克雷证明如下定理,奠定了傅里叶级数的理论基础,在信号、图像处理中有广泛应用.

狄利克雷定理 一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$, 在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:

- (1) 连续或只有有限个第一类间断点;
- (2) 只有有限个极值点.

则在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内, 在连续点处 $f_T(t)$ 可以展开成傅里叶级数, 三角形式为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (1.1.1)$$

在间断点处等式左边换为

$$\frac{f_T(t+0) + f_T(t-0)}{2}$$

其中

$$\omega_n = n\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin(\omega_n t) dt \quad (1.1.2)$$

而 $f_T(t-0)$ 表示 $f_T(t)$ 的左极限, $f_T(t+0)$ 表示 $f_T(t)$ 的右极限.

注意: 当 $m \neq n$ 时

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_m t \cdot \sin \omega_n t dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{2\pi(m-n)t}{T}}{\frac{2\pi(m-n)}{T}} - \frac{\sin \frac{2\pi(m+n)t}{T}}{\frac{2\pi(m+n)}{T}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

当 $m = n$ 时

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_m t \cdot \sin \omega_n t dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega_n t dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega_n t) dt \\ &= \frac{T}{2} \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_m t \cdot \sin \omega_n t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases} \quad (1.1.3)$$

同理

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_n t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases} \quad (1.1.4)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega_m t \cdot \cos \omega_n t \, dt = 0 \quad (1.1.5)$$

因而 (1.1.1) 式两端分别同乘 $\cos \omega_n t$ 或 $\sin \omega_n t$, 并在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 进行积分, 由 (1.1.3) 与 (1.1.4) 式与 (1.1.5) 式可得到系数 a_n 与 b_n 的表达式 (1.1.2).

为了简单明了, 将三角函数形式的傅里叶级数 (1.1.1) 式改写成指数形式. 用 j 表示虚数单位, 由欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

可知

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

从而

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}}{2} - j b_n \frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} e^{j\omega_n t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j\omega_n t} \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

当 $n=0$ 时,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \, dt$$

当 $n > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos \omega_n t dt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin \omega_n t dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) (\cos \omega_n t - j \sin \omega_n t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt
 \end{aligned}$$

同理,

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j(-\omega_n)t} dt$$

综合起来, 对于任意的 n 都有

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (1.1.7)$$

因而 $f(t)$ 傅里叶级数的指数形式(1.1.6) 可以简写为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \quad (1.1.8)$$

1.1.4 频谱分析

在信号系统中, $\frac{a_0}{2}$ 为直流分量, $a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t$ 为第 n 次谐波分量. 令 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 则有

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \cdot \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

其中

$$\varphi_n = \arctan \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

显然其振幅为 A_n , 角频率为 ω_n .

而对于指数形式的傅里叶级数展开, 其第 n 次谐波可以写为

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}$$

且

$$|c_n| = |c_{-n}| = \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}} = \frac{A_n}{2}$$