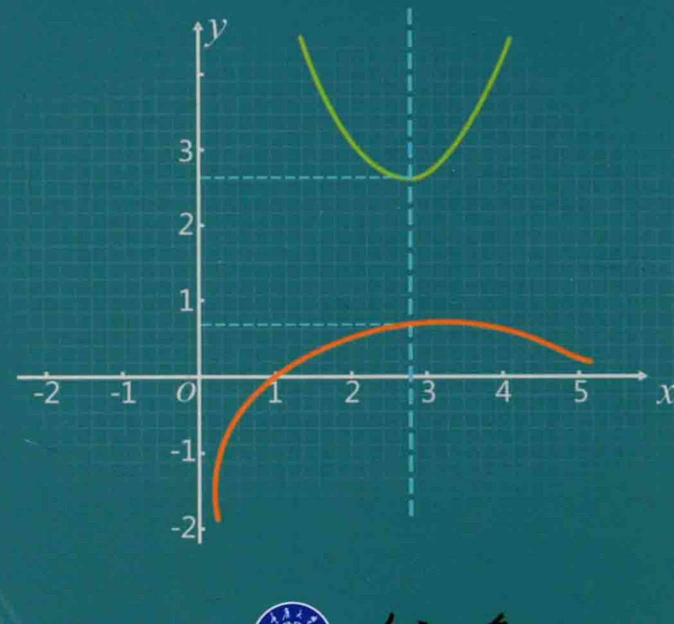
全国高职高专院校规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

◆主　编/刘　艳　罗星海

◆副主编/文　青　唐　艳



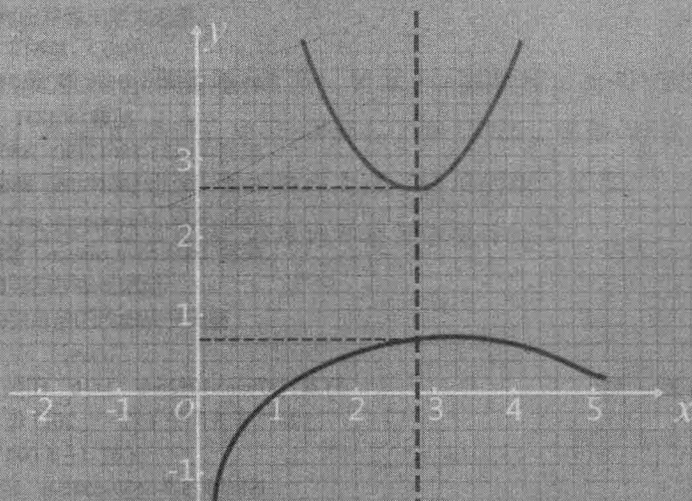
重庆大学出版社

全国高职高专院校规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

◆主　编/刘　艳　罗星海
◆副主编/文　青　唐　艳



重庆大学出版社

内容提要

本书共分为9章,分别介绍了函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、多元函数微积分、无穷级数和拉普拉斯变换等内容.每章还增写了与章节内容相关的数学文化知识以及用数学软件 MATLAB 进行辅助计算的相关知识,以激发学生学习数学的兴趣,提高学生使用计算机解决数学问题的能力.附录给出了函数的相关内容以及 MATLAB 中常用的变量与函数.

本书结构合理,条理清晰,详略得当,语言准确,精炼易懂,针对性、适用性和实用性强,既可作为高职高专院校高等数学课程教材,也可作为相关人士参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 刘艳,罗星海主编.--重庆:重庆大学出版社,2017.8

ISBN 978-7-5689-0542-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘…②罗… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第116146号

高等数学

主 编 刘 艳 罗星海

副主编 文 青 唐 艳

责任编辑:袁文华 版式设计:袁文华

责任校对:贾 梅 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:18.25 字数:436千

2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷

印数:1—5 000

ISBN 978-7-5689-0542-8 定价:39.80元

QIANYAN 前　言

为适应高职教育的特点，满足各专业对数学知识的具体需求，以培养可持续发展的高技能型人才为目标，遵循“必须、够用”的原则，结合当前数学课程改革经验，湖北交通职业技术学院数学教研室具有中高级职称的教师共同编写了这本《高等数学》.在符合教材自身逻辑的前提下，力求语言准确、精炼、易懂，条理清晰，方便学生掌握关键的知识点，培养学生形成严谨的数学思维习惯与良好的学习习惯，提升学生的职业素养.

本书在内容和结构方面，突出了针对性、适用性和实用性，立足于高职高专人才培养目标，在知识应用方面，充分体现了对学生能力的培养.本书侧重基本概念、基本计算及其应用，注重数学思想的渗透；引进概念追求自然，讲述概念力求清楚并尽量给出几何解释，加强几何直观；基本训练也是本书的重点，配有较多的例题，旨在通过例题讲述解题的基本方法和技巧，培养学生应用数学解决实际问题的能力，每章末都有复习题和自测题，旨在检查学生学习效果以及在复习方面能发挥作用，对参加专升本的同学有所帮助；理论推导点到为止，重在应用，适当照顾数学知识体系，编进部分现有课时上不完的内容，供提高层学生学习参考；增加了中学、大学相衔接的一些基本数学知识和用数学软件 MATLAB 进行辅助计算的相关知识，有利于提高学生认识、应用数学的能力.

参与本书编写的教师有：刘艳(副教授)、罗星海(教授)、黄本利(副教授)、文青(副教授)、熊莉(副教授)、汤名权(副教授)、孔德斌(高讲)、唐艳(讲师)、丁勇(讲师)、张丽(助教)，大家利用休息时间，认真编写，相互审稿，共同研讨，团结协作完成了该书的编写工作.

限于编者的水平和经验，书中定有不少缺点错误，诚恳地希望读者批评指正.

编　者

2017 年 6 月

MULU 目　录

第一章 函数与极限

在自然科学、工程技术及某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一.高等数学是研究变量以及变量间依赖关系即函数关系的一门学科，它的主要研究对象是函数.极限方法是高等数学的基础，它从方法论上突出地表现了高等数学不同于初等数学的特点.本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数连续性的定义及性质.

第一节 函数的概念

一、函 数

1.函数概念

定义 1 设 D 是非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，都有确定的 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$.D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义.函数在点 x_0 的对应值称为函数在该点的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当自变量 x 在定义域内取每一个数值时，对应的函数值的全体称为函数的值域，记作 W.

例 1 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，其图形为等轴双曲线，如图 1-1 所示.

例 2 函数 $y=x^3$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$，其图形为立方抛物线，如图 1-2 所示.

通过对函数的定义和以上各例题的分析讨论不难发现，确定一个函数，起决定作用的因素是：

(1)对应法则 f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系)；

(2)定义域 D(即自变量 x 的变化范围).

如果两个函数“对应法则 f”和“定义域 D”都相同，那么这两个函数就是相同的(或称相

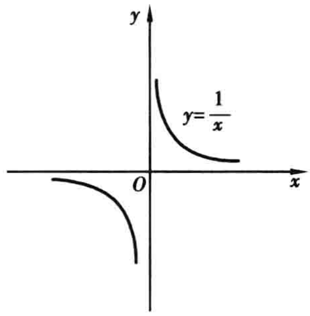


图 1-1

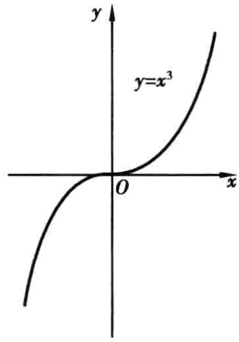


图 1-2

等的);否则就是不相同的.

例 3 下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4)$f(x)=1-\cos^2 x, g(x)=\sin x$.

解 (1)不相同.$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$D_g=(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(2)不相同.$f(-1)=-1$,$g(-1)=1$,两个函数的对应法则不同,因此 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(3)相同.其定义域均为$(-\infty,+\infty)$,对应法则也相同,因此 $f(x)$与 $g(x)$相同.

(4)不相同.虽然两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但其对应法则不同,$f(x)$的值域是 $W_f=[0,1]$,$g(x)$的值域是 $W_g=[-1,1]$,因此 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

2.函数的表示方法

函数有 3 种表示方法:解析法、列表法和图像法.

在实际问题中,上述 3 种方法常结合应用.

3.分段函数

有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

例 4 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-3 所示,该函数称为绝对值函数.

例 5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,+\infty)$.当 $x\in[0,1]$时，对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=1+x$.例如，$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$.该函数的图形如图 1-4 所示.

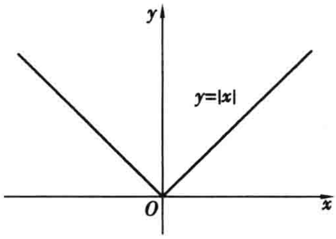


图 1-3

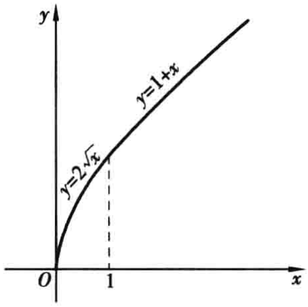


图 1-4

二、函数的几种特性

1.函数的有界性

设函数 $y=f(x)$定义在区间 I 上，若存在某一常数 k，对一切 $x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant k(f(x)\geqslant k),$$

则称 $f(x)$在 I 上有上(下)界，数 k 为它的一个上(下)界.

若函数 $f(x)$在 I 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$为 I 上的有界函数.

例如，对任意 x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的.而 $y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上无界；$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上有下界而无上界.

2.函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 I 关于原点对称(即若 $x\in I$，则必有 $-x\in I$)，如果对于任意 $x\in I$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.既不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

3.函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$.如果对于 I 上的任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1<x_2$时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$在区间 I 上单调递增(或单调递减).单调递增函数或单调递减函数统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调递增的；$y=x^2$在$(-\infty,0)$上是单调递减的，在$[0,+\infty)$上是单调递增的，但在整个定义域上不是单调的.

4.函数的周期性

设 x 是函数 $y=f(x)$定义域内任一点，若存在一个不等于零的常数 k，使得当 $x+k$ 也

属于定义域时，有 $f(x+k)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，其中 k 称为函数 $y=f(x)$ 的周期.通常所说的周期是指它的最小正周期.例如，函数 $y=\sin\omega x[\omega\neq 0,x\in(-\infty,+\infty)]$ 是以 $k=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的函数.

三、反函数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要选定其中一个为自变量，则另一个就是因变量.例如，函数 $y=ax+b(a\neq 0)$ 中，x 是自变量，y 是因变量.如果从这个函数中把 x 解出，得 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$，则称 $x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ 是 $y=ax+b$ 的反函数.一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W，如果对于 W 中的每一个值 y，都可通过关系式 $y=f(x)$ 确定 D 中的唯一的一个值 x 与之对应，就得到了定义在 W 上以 y 为自变量、x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以，函数 $y=f(x)$ 的反函数可改写为 $y=f^{-1}(x)$.

例如，函数 $y=\sin x$，$\left(x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$，$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的反函数分别为 $y=\arcsin x$，$y=\log_a x$. 当函数与其反函数均以 x 为自变量时，反函数的图像与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

1.基本初等函数

在中学已经学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统称为基本初等函数.

2.复合函数

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量不直接依赖于自变量，而是通过另一个变量联系起来.

例如，有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，由物理学知其动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2.$$

而在不计空气阻力时 $v=v_0-gt$，g 是重力加速度，因此 E 通过 v 成为 t 的函数：

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2.$$

它是由函数 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ 和 $v=v_0-gt$ 复合而成的复合函数.一般地，我们有如下定义.

定义 2 设 y 是 u 的函数即 $y=f(u)$，定义域为 U_1，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中变量 u 称为中间变量.

形成复合函数的中间变量可以是两个或更多个.例如,由 $y=\lg u$,$u=\tan v$,$v=x^2+5$,经二次复合构成 x 的复合函数 $y=\lg\tan(x^2+5)$.

但需注意,并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数.例如,$y=\arccos u$,$u=2+x^2$,就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$,因为 u 总是大于 1,使 $y=\arccos u$ 没有意义.

我们不仅要学会把若干个简单的函数"复合"成一个复合函数,而且要善于把一个复合函数"分解"为若干个简单的函数.这种分解方法在后面的微积分运算中经常要用到,应该得到足够的重视.

例 6　将下列函数分解为较简单的函数.

(1) $y=\arcsin\left(\ln\dfrac{x}{10}\right)$;　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$.

解　(1)函数 $y=\arcsin\left(\ln\dfrac{x}{10}\right)$ 是由下列函数复合而成的:

$$y=\arcsin u,u=\ln v,v=\frac{x}{10}.$$

(2)函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由下列基本初等函数复合而成的:

$$y=\mathrm{e}^u,u=\sin v,v=\frac{1}{x}.$$

3.初等函数

定义 3　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}+5$,$y=\tan t-\sqrt{t}\ \sin t^2$ 都是初等函数.

今后讨论的函数绝大多数都是初等函数.

4.建立函数关系举例

用数学方法解决实际问题时,首先要建立数学模型,即建立函数关系,为此需明确问题中的因变量与自变量,根据题意建立等式,从而得出函数关系,再根据实际问题的要求,确定函数定义域.

例 7　某工厂位于 A,与铁路的垂直距离为 a(km),它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b(km),工厂的产品必须经火车站 C 方能转销外地,已知汽车运费是 m[元/(t·km)],火车运费是 n[元/(t·km)]($m>n$).为节省运费,计划在铁路上另修一小站 M 作为转运站,那么运费的多少决定于 M 的地点,试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数,如图 1-5 所示.

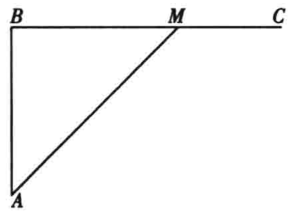


图 1-5

解　设 $|BM|=x$,运费为 y.

根据题意,有 $|AM|=\sqrt{a^2+x^2}$,$|MC|=b-x$,则 $y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x)$,$x\in[0,b]$.

例 8 某厂生产某种产品 1 600 t,定价为 150 元/t,销售量在不超过 800 t 时,按原价出售,超过 800 t 时,超过部分按 8 折出售.试求销售收入与销量之间的函数关系.

解 按题意,设销售量为 x t,销售收入为 R 元.

当 $0\leqslant x\leqslant 800$ 时,$R=150x$.

当 $800<x\leqslant 1\ 600$ 时,收入由两部分组成:

800 t 部分的收入为 150×800;

超过 800 t 部分的收入为 $150\times 0.8(x-800)$.

从而,$R=150\times 800+150\times 0.8(x-800)=24\ 000+120x$.

于是 R 与 x 之间的函数关系为

$$R=\begin{cases}150x, & 0\leqslant x\leqslant 800\\ 24\ 000+120x, & 800<x\leqslant 1\ 600\end{cases}.$$

习题1-1

1.下列各题中,$f(x)$与 $\varphi(x)$是否表示同一个函数?说明理由.

(1)$f(x)=\dfrac{x}{x}$,$\varphi(x)=1$;

(2)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,$\varphi(x)=x+1$;

(3)$f(x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$,$\varphi(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

2.设 $f(x)=1+x^2$,$\varphi(x)=\sin 3x$,求 $f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$,$f(t^2-1)$,$f[\varphi(x)]$.

3.设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$,求 $f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(-1)$,$f(1)$.

4.设 $f(x)=ax^2+bx+5$,而且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,试确定 a,b 的值.

5.求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

(2)$y=4-x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

(3)$y=\lg\sin x$;

(4)$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

6.如果 $f(x)=a^x$,证明:$f(x)f(y)=f(x+y)$,$\dfrac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

7.将函数 $y=5-|2x-1|$用分段函数的形式表示,并画出函数图像.

8.下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1)$y=2^{\tan x}$;

(2)$y=\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2$;

(3)$y=\arctan(x^2+1)$;

(4)$y=\ln\sin^2(3x+1)$.

9.求下列函数的反函数.

(1) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$；　　(2) $y=x^2-4x, x\in[2,+\infty)$.

10.判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{10}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

11.判断下列函数的单调性.

(1) $y=2x+1$；　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；

(3) $y=\log_a x\quad(a>0, a\neq 1)$.

12.下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos 3x$；　　(2) $y=\sin^2 x$.

13.用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，将它的全面积 S 表示成底面半径 r 的函数，并确定此函数的定义域.

14.某工厂生产某产品，每月最多生产 100 个单位.它每月的固定成本为 130 元，生产一个单位产品的可变成本为 6 元. 求该厂月总成本函数及平均单位成本函数.

第二节　数列的极限

在高等数学中几乎所有的概念都离不开极限，因此极限概念是高等数学中最基本的概念之一.极限方法是研究函数和解决许多问题的基本方法.

数列是定义于正整数集合上的函数，它的极限只是一种特殊的函数(即整标函数)的极限.

一、数列的极限

数列就是按一定顺序排列起来的一列数：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

第 n 项 x_n 称为数列的通项，这个数列可简记为 $\{x_n\}$.例如：

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots \tag{1}$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots \tag{2}$$

$$0.3,0.33,0.333,\cdots,0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},\cdots \tag{3}$$

$$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots \tag{4}$$

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots \tag{5}$$

都是数列,它们的通项分别为$(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},\dfrac{n+(-1)^n}{n},0.\overbrace{33\cdots3}^{n个},(-1)^{n-1},2^n$.

考察数列当 n 变化时,x_n 的变化情况,容易看出,当 n 无限增大(记作 $n\to\infty$)时,不同数列的变化情况是有所不同的,其中有的数列当 $n\to\infty$时,x_n 能与某一个常数 a 无限接近.如数列(1),当 $n\to\infty$时,x_n 与 0 无限接近;同样,对于数列(2),当 $n\to\infty$时,$\dfrac{n+(-1)^n}{n}$无限接近于 1;数列(3),当 $n\to\infty$时,$0.\overbrace{33\cdots3}^{n个}$无限接近于$\dfrac{1}{3}$;而数列(4),当 $n\to\infty$时,x_n 在 1 与 -1间摆动;数列(5),当 $n\to\infty$时,x_n 也不断增大,但不和任何一个常数接近.数列(1)(2)(3)反映了一类数列的某种共同特性,即对于数列$\{x_n\}$,存在一个常数 a,随着 n 的无限增大,x_n 无限地接近于a.这也就是说,要使 x_n 与 a 的差的绝对值任意的小,只要 n 充分的大即可.因此,给出数列极限的定义如下:

定义 1 若对于预先给定的任意小的正数 ε,总存在一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad (a\text{ 是一个确定常数})$$

成立,则称 a 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty),$$

这时我们说数列是收敛的,否则数列是发散的.

例 证明数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

的极限是 1.

证
$$|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}.$$

为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数 ε,只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

所以,对于任意给定的正数 ε,取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

二、收敛数列的性质

定理 1(极限的唯一性) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

定理 2(**收敛数列的有界性**)　如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理 3(**收敛数列与其子数列间的关系**)　如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

习题1-2

观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限.

(1)$x_n=\frac{1}{2^n}$;　　(2)$x_n=2+\frac{1}{n^2}$;

(3)$x_n=\frac{n-1}{n+1}$;　　(4)$x_n=n(-1)^n$.

第三节　函数的极限

研究函数的极限就是研究函数的变化趋势,但函数值的变化是由自变量变化来决定的,因此必须先指出自变量的变化趋势.通常研究下述两种情况:一种是自变量$x\to\infty$;另一种是$x\to x_0$(x_0为某一定值).

一、$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

类似数列的极限定义,有$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限的定义.

定义 1　若对于预先给定的任意小正数ε,总存在一个正数M,使得当$|x|>M$时,不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon\quad(A\text{ 是确定的常数})$$

恒成立,则称A是函数$y=f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

$x\to\infty$包含x沿着正方向趋向于无穷大,记作$x\to+\infty$,以及沿着负方向趋向于无穷大,记作$x\to-\infty$.

当$x\to+\infty$时,$f(x)$以常数A为极限,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A\quad(x\to+\infty);$$

当$x\to-\infty$时,$f(x)$以常数A为极限,记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A\quad(x\to-\infty).$$

定义1告诉我们,当自变量的绝对值$|x|$无限增大时,如函数$f(x)$与某确定常数A无限地接近,则常数A就是x趋向无穷大时$f(x)$的极限.

例 1　对于函数$f(x)=1+\frac{1}{x}$,当$|x|$无限增大时,$\frac{1}{x}$无限接近于常数0,函数$f(x)=1+\frac{1}{x}$就无限接近于常数1,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$.

例 2　对于函数 $\varphi(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$时，它所对应的函数值 $\varphi(x)$无限接近于常数 $\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$时，$\varphi(x)$无限接近于常数$-\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

有的函数 $f(x)$，当自变量$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$的绝对值也无限增大，在这种情况下，虽然 $f(x)$的极限不存在，但也可记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty \text{ 或 } f(x)\to\infty \quad (x\to\infty).$$

例 3　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$.

二、$x\to x_0$时函数 $f(x)$的极限

现在讨论 x 无限接近于某一个确定的数 x_0，且 $x\neq x_0$ 时，函数 $f(x)$的变化趋势.

定义 2　设函数在点 x_0 的附近有定义(点 x_0 可除外)，若对于预先给定的任意小正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad (A \text{ 是确定的常数})$$

恒成立，则称 A 是函数 $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

定义 2 告诉我们，一个在 x_0 附近有定义的函数 $f(x)$，如 x 无限接近 x_0时，函数 $f(x)$无限地接近一个常数 A，则常数 A 就是x 趋向x_0 时函数 $f(x)$的极限.

例 4　考虑当 $x\to2$ 时，函数 $f(x)=3x-1$ 的极限.

解　由图 1-6 看到，当 x 无限接近于 2 时，$f(x)$无限接近于 5，因此$\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$.

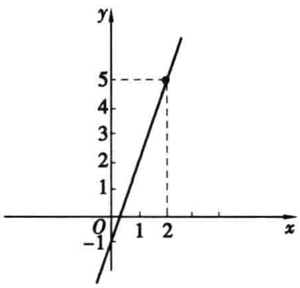


图 1-6

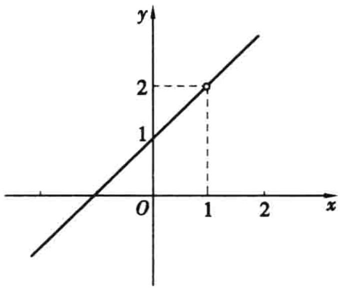


图 1-7

例 5　考虑 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的极限.

解　函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义，但是它的极限存在.

事实上，当 $x\neq1$ 时，$f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$，从图 1-7 可看到，当 $x\to1$ 时，$f(x)\to2$，故

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

例 6　试求函数