高等学校“十三五”规划教材

本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖（教材奖）一等奖

概率论与数理统计

施庆生　陈晓龙　邓晓卫　等编

第三版

化学工业出版社

高等学校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

第三版

施庆生　陈晓龙　邓晓卫　等编

化学工业出版社

·北京·

本书内容包括事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析九章。并附有统计分析常用软件 SAS 及若干概率论与数理统计的实验。教材选例典型，与日常的生产与生活密切相关，有助于提高读者学习兴趣并寓学习理论于实践运用当中。书中习题难易结合，有助于读者开拓思路加深理解。

本书可作为高等学校工科类、经济管理类及非数学类的理科专业的教材或参考用书，也可供工程技术人员或科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/施庆生等编．—3 版．—北京：化学工业出版社，2017.1
高等学校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-122-28735-9

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①施…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 312383 号

责任编辑：唐旭华
责任校对：王　静　　　　　　　　　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：北京国马印刷厂
710mm×1000mm　1/16　印张 17¾　字数 397 千字　　2017 年 3 月北京第 3 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：35.00 元　

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门学科。由于自然界随机现象存在的广泛性，使得概率论与数理统计的方法正日甚一日地渗入到几乎一切自然科学、技术科学以及经济管理各领域中去。

从学科分类看，概率论、数理统计都是近代数学的分支，概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，而数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究。虽然两者在方法上有着明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的。因此，本书在编排上，也大致分成两部分：第一部分为概率论，包括第一章至第五章，其中也掺杂一些数理统计的例子；第二部分为数理统计，包括第六章至第九章，所选例子大部分来自生产或生活实际，其中也有一小部分是有关概率论的内容。概率论与数理统计是一门应用广泛且实验性很强的随机数学学科，因此，附录一提供了统计分析上常用软件 SAS 的简介及其简单应用，附录二介绍了若干概率论与数理统计实验，读者如能亲临实际做几个实验，并进行数据分析，将有助于加深对本课程研究对象和独特思维方式的理解。

本书在编写过程中，努力做到通俗易懂，简详得当，在选材和叙述上尽量做到联系实际，突出基本内容的掌握和基本方法的训练，注重数理统计的应用，所选用的例子不仅能加深对基本概念和基本方法的了解，同时，也能提高读者学习的兴趣。为了帮助读者巩固所学知识，本书在习题的选择上也做了些努力，既有基本训练题，也有较为复杂的综合应用题，这些题目都是饶有趣味的，有的就能直接应用于实际，读者可酌量做一部分以开拓思路，加深理解。

本书自 2008 年出版以来，各方反映良好，并于 2012 年初推出第二版。这次修订是在第二版的基础上，根据我们多年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神，进行全面修订而成的。本次修订，我们保留了第二版的系统和风格，以及结构严谨、逻辑清晰、概念准确、语言通俗易懂、叙述详细、例题较多、便于自学等优点，并根据当前教学要求补充了少量新内容，对其中的例题和习题也作了适量的补充和调整，使其更适合当前的教学和自学要求，在选材和叙述上尽量做到理论联系实际，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的举措，使得本书成为一本适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

本次修订仍保留了带“*”的内容，主要供对概率论与数理统计课程有较高要求的专业选用。

参加本书第一版编写的有施庆生（绪论、第一、二章及附录二）、陈晓龙（第三、四、五、八、九章）、邓晓卫（第六、七章）、陈建丽（附录一），最后由施庆

生负责全书的统稿和定稿，金炳陶教授仔细审阅了本书，提出了许多宝贵的意见。本书第一版在编写过程中，得到了南京工业大学教务处、理学院的大力支持，特别是应用数学系教师的积极参与，在此一并致谢！

这两次修订，我系广大教师提出了许多宝贵意见和建议，在此表示诚挚的谢意！

本次修订工作，由陈晓龙、施庆生、邓晓卫、陈建丽完成。

限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2017 年 1 月

目　　录

绪　论

对于想学习一门新知识的读者来说，总希望能对该门学科有一个大概的了解．为此，在讲述概率论与数理统计之前，首先对它的研究对象及其在自然科学、国民经济各领域中的应用，作一简要的介绍．

一、随机现象与随机试验

在自然界和人类生活中人们经常遇到两类不同的现象．一类是**确定性现象**，即在一定条件下，必然会发生某种结果或必然不会发生某种结果的现象．例如，自由落体在高处总是垂直落向地面；在一个标准大气压下，100℃的水会沸腾；一台被系统病毒感染破坏的电脑是无法完成预定的程序等．所有这些现象均属确定性现象．它们表达了条件与结果之间的必然联系．确定性现象存在非常广泛，高等数学、线性代数等学科就是研究和描述这类现象规律的数学学科．

还有一类是**随机现象**，即在给定条件下其结果是否发生是不可预言的．例如，向桌面上掷一枚硬币，落下后是正面向上（有币值的一面），还是反面向上，事先是无法预言的；在某个股票交易日，开盘时股票综合指数是多少点，事先是无法预知的；某天某城市出生的男婴和女婴数各是多少，事先也是无法知道的等．所有这些现象均属随机现象．它们表达了条件和结果之间的非确定性联系．

为探索和研究随机现象的规律性，就需要进行一系列试验，包括各种各样的科学试验和对随机现象的种种观测．例如

E_1：掷一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_2：在某厂生产的一款手机中任意抽取一台，测试其寿命；

E_3：抛两颗骰子，观察出现的点数之和；

E_4：单位时间内某博客的点击数．

它们具有如下的共同特点：

(1) 试验在相同的条件下可重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但每次试验的所有可能结果是已知的；

(3) 试验完成之前不能确知哪个结果会发生．

通常把具备上述特点的试验称为**随机试验**．本书所提到的试验均指随机试验．人们往往通过对随机试验的观测来研究随机现象．

二、随机现象的统计规律性

人们通过长期的反复观测和实践发现，随机现象在一次或几次试验中，表现出一种不确定性，但在相同条件下进行大量重复试验或观测时，随机现象却呈现某种规律性．例如，掷一枚均匀的硬币一次，是正面向上还是反面向上是不能确定的，但若抛掷多次，正面和反面出现的次数比例总是接近于 1：1，而且抛掷次数愈多，这种“接近”愈明显．这种在大量重复的试验或观测中呈现出的固有规律性通常称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计就是研究和发现随机现象统计规律性的一门数学学科．是近代数学的重要组成部分．

三、概率论与数理统计的应用

当科学技术处在相对粗略阶段时，人们常常忽略随机现象．而随着科学技术的发展，在精确度要求越来越高的今天，人们已经无法忽视随机现象．由于自然界随机现象存在的广泛性，使得概率论与数理统计的方法正日甚一日地渗入到几乎一切自然科学、技术科学以及经济管理各领域中．常见的有

(1) 在工农业生产和科学试验中，广泛存在着对产品质量的估计、检验、控制等问题，这些问题对企业管理者来说是非常重要的，它们都属于概率论与数理统计的应用范围．

(2) 水文学中有许多随机现象，如一条河的年流量、最大洪峰，一个水库的实际年最大储水量等．这些问题的研究对大坝及水电站的建设都具有极其重要的意义．

(3) 生物学、医学中有大量的随机现象．如疾病的传播和诊断，现代遗传学和基因工程等问题都要用概率论与数理统计的方法，并形成了“生物统计”和“医学统计”两个边缘学科．

(4) 随着现代农业的发展及防灾减灾的需要，以往确定性的气象预报已不能适应目前经济的发展，这是因为气象问题也是随机的．代之而起的是“概率预报”和“统计预报”．统计预报在解决长期天气预报方面获得很大成功，并在地震预报中也找到了用武之地．

(5) 结构设计中要考虑两个基本变量，即结构的荷载效应 S（作用在结构上的荷载产生的结构内力），抗力 R（结构承受荷载和变形的能力）．以往都把 S 和 R 描述成确定性的变量，而用“定值设计理论”进行结构设计，这样的设计可靠性较差．这是由于活荷载以及风压等都是随机的，故在现实中 S 和 R 不可能是确定性的，而是随机的．随着建筑业的发展，在结构设计中引入了概率论与数理统计的理论和方法，产生了概率设计理论，它使建筑结构设计更加精确和安全可靠．

(6) 在现代销售领域，要考虑广告投入、市场需求与销售收益、库存与销售策略等关系，由于市场中各因素的随机性，这些关系无法用确定性数学加以解决，概率论与数理统计中的回归分析理论则为解决这类问题提供了有效方法．

此外，在自动控制、通讯、航海、航空、金融、保险等方面概率论与数理统计都有着极其广泛的应用．

第一章　事件与概率

第一节　随机事件与样本空间

一、样本空间与随机事件

为了探索随机现象的规律性必须进行大量的重复试验，我们把试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点．由于在给定条件下，试验的所有结果是已知的，因而样本点及相应的样本空间也是明确的．

对于绪论中提及的试验 E_i，其样本空间 $\Omega_i(i=1,2,3,4)$为

$\Omega_1=\{H,T\}$；$\Omega_2=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_3=\{2,3,\cdots,12\}$；$\Omega_4=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

对于试验 E_4：单位时间内某博客的点击数，由于在具体试验中很难给出一个点击次数的上限，故可认为博客点击的可能次数是无限的．同样对 E_2 的样本空间也作了类似处理．

在实际工作中，人们常常对随机试验中满足一定条件的样本点所构成的集合更关心．一般，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集即样本点的集合为 E 的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生．仅由一个样本点构成的单点集称为**基本事件**.

【例 1】　一个口袋中装有形状完全相同的红球 3 个（编号为①,②,③）和白球 2 个（编号为④,⑤）．现考察任取三球（即一次取出三球）中所含红、白球的情况．

则试验 E（即考察任取三球中所含红、白球的情况）的所有可能结果有 10 个

$A_1=\{$①,②,③$\}$，$A_2=\{$①,②,④$\}$，$A_3=\{$①,②,⑤$\}$，

$A_4=\{$①,③,④$\}$，$A_5=\{$①,③,⑤$\}$，$A_6=\{$①,④,⑤$\}$，

$A_7=\{$②,③,④$\}$，$A_8=\{$②,③,⑤$\}$，$A_9=\{$②,④,⑤$\}$，

$A_{10}=\{$③,④,⑤$\}$.

A_1 到 A_{10} 这 10 个事件都是试验的样本点，是基本事件．$\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$ 为试验 E 的样本空间．

而 $B=\{$恰有两个红球$\}$，$C=\{$至少有两个红球$\}$，$D=\{$编号$\leqslant 4\}$，$T=\{$至少有一个红球$\}$，$Q=\{$恰有三个白球$\}$ 也是试验 E 的事件，因为它们都可以用样本点构成的集合来表示．

如事件 D 是由 A_1,A_2,A_4,A_7 等基本事件组合成的，可记作 $D=\{A_1,A_2,A_4,A_7\}$，事件 D 的发生等价于基本事件 A_1,A_2,A_4,A_7 中有且只有一个发生．同样，$B=\{A_2,A_3,A_4,A_5,A_7,A_8\}$，$C=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_7,A_8\}$，$T=\{A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$.

另外，我们注意到事件 Q 不包含任何试验结果，即在所给条件下，事件 Q 是不可能发生的．这样的事件称为**不可能事件**，记作 Φ，即 $Q=\Phi$. 而事件 T 则由所有基本事件组合而成，在给定条件下，每进行一次试验它都必然发生．这样的事件称为**必然事件**，记作 Ω，即 $T=\Omega$.

必然事件与不可能事件显然都是确定性的，它们已不再是随机事件．但为了便于讨论，把它们作为随机事件的极端情形予以统一处理．

【例 2】 将一枚均匀硬币掷三次，观察正面出现的次数．则

$B_i=\{$正面出现 i 次$\}(i=0,1,2,3)$等都是基本事件．样本空间 $\Omega=\{B_0,B_1,B_2,B_3\}$.

而 $C=\{$正面出现偶数次$\}=\{B_0,B_2\}$，$D=\{$正面出现奇数次$\}=\{B_1,B_3\}$ 等是事件．而 $E=\{$正面出现次数$\leqslant 3\}$，$F=\{$正面出现次数$>3\}$ 则分别为必然事件和不可能事件，即 $E=\Omega$，$F=\Phi$.

【例 3】 将一枚均匀硬币掷三次，观察正面和反面出现的情况．则基本事件有

$$A_1=\{正,正,正\},\ A_2=\{正,正,反\},\ A_3=\{正,反,正\},$$
$$A_4=\{反,正,正\},\ A_5=\{正,反,反\},\ A_6=\{反,正,反\},$$
$$A_7=\{反,反,正\},\ A_8=\{反,反,反\}.$$

样本空间 $\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_8\}$.

尽管例 2 和例 3 的试验条件是相同的，都是将一枚硬币掷三次，但由于试验的目的不同，其样本空间也不同．因此样本空间的元素（样本点）是由试验的目的唯一确定的．

由于任何一个事件都可以用 Ω 的子集来表示，因此我们可以将事件间的关系及运算归结为集合间的关系及运算，这样我们就可以运用集合论的有关理论和方法来研究事件了．

二、事件的关系及运算

在某个问题的研究中，我们讨论的往往不只是一个事件，而是有许多事件，它们各有特点，彼此之间又有一定的联系．为了用较简单的事件表示较复杂的事件，下面讨论事件之间的几种主要关系以及作用于事件上的运算．

1. 包含关系

如果事件 A 发生一定导致事件 B 发生，则称 B 包含 A 或称 A 含于 B，也称 A 是 B 的子事件，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. B 包含 A 意即属于 A 的基本事件一定也属于 B. 如图 1-1 所示．

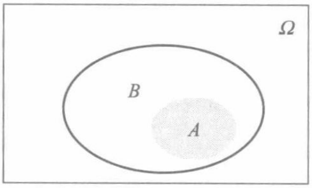

图 1-1

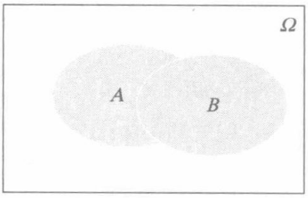

图 1-2

显然，对任一事件 A，有 $\Phi\subset A\subset\Omega$.

2. 相等关系

如果 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 在概率论中，彼此相等的事件可以互相替换．事实上，它们所含基本事件完全相同．

3. 事件的和（事件的并）

“事件 A 与 B 至少有一个发生（A 或 B）”是一个事件，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$(或 $A+B$)．和事件 $A\cup B$ 是由 A 与 B 中的所有基本事件构成的．如图 1-2 所示．

对任一事件 A，有 $A\cup A=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\Phi=A$.

例如，在试验 E_3（抛两颗骰子，观察出现的点数之和）中，若 A 表示“点数之和为偶数”，即 $A=\{2,4,6,8,10,12\}$，B 表示“点数之和小于 6”，即 $B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,8,10,12\}$.

事件和的概念可推广到任意有限个或可列无限多个事件和的情形，如可列无限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生所构成的事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 事件的积（事件的交）

“事件 A 与 B 同时发生（A 且 B)”是一个事件，称为 A 与 B 的积事件，记为 AB（或 $A\cap B$)．事件的积 AB 是由 A，B 中公共的基本事件所构成．如图 1-3 所示．

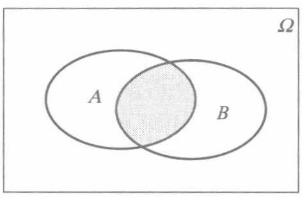

图 1-3

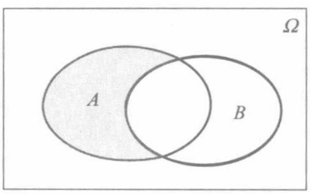

图 1-4

对任一事件 A，有 $AA=A$，$A\Omega=A$，$A\Phi=\Phi$.

例如，在试验 E_3 中，若设 $A=\{3,5,7,8\}$,$B=\{6,8,9,11\}$，则 $AB=\{8\}$．

事件积的概念同样可推广到任意有限个或可列无限多个事件的情形．如 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 事件的差

“事件 A 发生而 B 不发生”是一个事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 差事件 $A-B$ 由属于 A 但不属于 B 的基本事件所构成．如图 1-4 所示．

例如，在试验 E_3 中，若设 $A=\{3,5,7,8\}$，$B=\{6,8,9,11\}$，则

$$A-B=\{3,5,7\}.$$

6. 互斥事件

如果事件 A,B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称 A,B 是互斥事件或称 A,B 是互不相容事件，两事件不互斥称为相容．互斥事件没有公共的基本事件，如图1-5 所示．

例如，在试验 E_3 中，若设 $A=\{3,5,7\}$，$B=\{6,8,9,11\}$，则 $AB=\Phi$，故 A 与

B 互斥．

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互斥，则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的．可用下式表示

$$A_iA_j=\Phi \quad (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n).$$

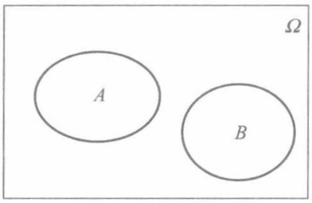

图 1-5

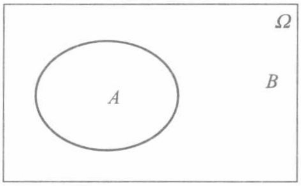

图 1-6

7. 对立事件

若事件 A 与 B 互斥，又 A 与 B 必发生其一，即 $AB=\Phi$，$A\cup B=\Omega$，则称 B 是 A 的对立事件（逆事件），或称 A 是 B 的对立事件．通常 A 的对立事件（逆事件）记为$\overline{A}$，即 $B=\overline{A}$. 从而 $A\overline{A}=\Phi$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，当然也有 $\overline{A}=\Omega-A$. 互为对立的两事件没有公共的基本事件，且它们所含的基本事件充满样本空间．如图1-6所示．

例如，在试验 E_3 中，若设 $A=\{3,5,7,8\}$，$B=\{2,4,6,9,10,11,12\}$，则 $AB=\Phi$，$A\cup B=\Omega$，所有 A 与 B 对立，即 $B=\overline{A}$.

8. 互斥完备事件组

若 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组．又若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个互斥完备事件组，即事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

(1) $A_iA_j=\Phi$ $(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$；

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$.

此时亦称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个划分．如图 1-7 所示．

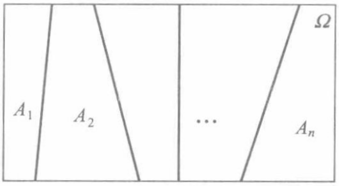

图 1-7

进一步，若 $A_i(i=1,2,\cdots)$是一组可列无限多个事件，且满足

(1) $A_iA_j=\Phi$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$；

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots$ 是样本空间 Ω 的一个可列无限划分．

容易证明，事件的运算满足如下的运算律

$$A\cup B=B\cup A;\quad AB=BA;\quad A-B=A-AB=A\overline{B};\tag{1-1}$$

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;\quad A(BC)=(AB)C;\tag{1-2}$$

$$A(B\cup C)=AB\cup AC;\tag{1-3}$$

$$A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C);\tag{1-4}$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B};\tag{1-5}$$

此外还有

$$AB\subset A\subset A\cup B,\ AB\subset B\subset A\cup B.\tag{1-6}$$

$$\text{若 } A\supset B,\text{ 则 } AB=B,\ A\cup B=A.\tag{1-7}$$

式(1-5) 称为德·摩根 (De Morgan) 律 (对偶律)，它可以推广到任意有限个或可列个事件情形，例如

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

【例 4】 证明：(1) $A=AB\cup A\overline{B}$；(2) $A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

证 (1)$A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$；

(2) $A\cup B=A\Omega\cup B\Omega=A(B\cup\overline{B})\cup B(A\cup\overline{A})=A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup AB$.

显然 (1) 式右端是两个互斥事件的和，这表明任一事件均可“分解”为两个互斥事件的和.(2)式则把事件 $A\cup B$“分解”为两两互斥的三个事件的和.如图 1-8 所示.这种把一个事件“分解”成若干两两互斥事件和的过程，称为事件的**互斥分解**.

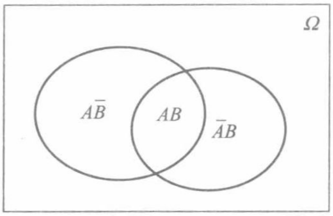

图 1-8

类似地，可证 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$ 或 $A\cup B=A\overline{B}\cup B$. 由此可见，同一事件的互斥分解式是不唯一的.

【例 5】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验 (每次取的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品 ($i=1,2,3$). 试用 A_1,A_2,A_3 来表示以下各事件

(1) 第一只产品为合格品； (2) 只有一只产品为合格品；

(3) 至少有一只产品为合格品； (4) 三只产品都不是合格品；

(5) 三只产品都是合格品； (6) 至多两只产品为合格品.

解 (1) A_1； (2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(3) $A_1\cup A_2\cup A_3$； (4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(5) $A_1A_2A_3$； (6) $\overline{A_1A_2A_3}$或 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$.

第二节 事件的概率

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有偶然性.但在大量重复试验中，发生可能性的大小是客观存在的，有些事件发生的可能性大些，有些则小些.在实践中，人们希望知道某些事件发生的可能性究竟有多大.例如，在三峡建大坝，就要知道三峡地区长江年最高水位超历史记录这一事件发生的可能性有多大，以便合理地设计坝高；又如知道某网站 24h 内各个时段接到点击次数的情况，人们就可以据此与客户谈判挂网广告的价格等.我们将刻画事件 A 发生可能性大小的数量指标称作事件 A 发生的**概率**，并用 $P(A)$ 表示.

对于给定的事件 A，客观上都存在概率 $P(A)$，怎样才能获得 $P(A)$ 的数值

呢？在现实生活中，人们常常利用事件发生的频率获知事件发生的可能性大小．为此，我们首先引入频率的概念，进而给出表征事件概率的各种定义．

一、概率的统计定义

定义 1　在相同的条件下，重复进行的 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f(A)$．

由定义，易见频率具有下述性质

（1）$0\leqslant f(A)\leqslant 1$；

（2）$f(\Phi)=0$，$f(\Omega)=1$；

（3）若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，则

$$f(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f(A_1)+f(A_2)+\cdots+f(A_n).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小反映 A 发生的频繁程度．若 A 发生的可能性较大，那么相应的频率也较大，反之，则较小．因此，从这个意义上说，频率在一定程度上刻画了事件发生的可能性大小，那么，能否把频率作为事件发生可能性大小的数量刻画呢？先看下例．

【例 1】　采用计算机编程模拟掷硬币的试验，考察正面和反面出现的情况．模拟掷币 10 次，100 次，1000 次，10000 次，各做 6 遍得表 1-1. n 表示试验次数，n_A 表示正面朝上的次数，$f(A)$ 表示正面朝上的频率．

表 1-1

次数 序号	$n=10$		$n=100$		$n=1000$		$n=10000$	
	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$
1	3	0.3	57	0.57	484	0.484	5022	0.5022
2	2	0.2	52	0.52	514	0.514	5040	0.5040
3	6	0.6	47	0.47	514	0.514	4971	0.4971
4	8	0.8	46	0.46	500	0.500	5081	0.5081
5	6	0.6	51	0.51	522	0.522	4977	0.4977
6	3	0.3	55	0.55	485	0.485	5057	0.5057

试验表明（1）频率具有随机波动性，对于同样的试验次数 n，所得的 $f(A)$ 不尽相同；（2）试验次数较少时，频率 $f(A)$ 随机波动的幅度较大，但随着试验次数的增加，频率 $f(A)$ 的波动性逐渐趋弱而呈现出稳定性，大致在 0.5 附近作微小摆动并逐渐稳定于 0.5.

本例表明，频率 $f(A)$ 随试验次数 n 的改变而改变，即使同样的试验次数 n，频率 $f(A)$ 也不尽相同．因此用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的．但当 n 逐渐增大时，频率 $f(A)$ 逐渐稳定于某个常数，这种“频率的稳定性”是不以人的意志为转移的，它揭示了隐藏在随机现象中的统计规律性，因此用频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的．

定义 2　在相同条件下重复作 n 次试验，当 n 充分大时，事件 A 的频率 $f(A)=\frac{n_A}{n}$稳定地在某一数值 p 的附近摆动，且一般说来，随着试验次数 n 的增

大，这种摆动的幅度越来越小，则称事件 A 有概率，常数 p 就称为事件 A 发生的**概率**. 即

$$P(A)=p. \tag{1-8}$$

这样给出的概率称为**统计概率**.

在例 1 中，设 $A=\{$正面朝上$\}$，则 $P(A)=0.5$.

既然统计概率是频率的稳定值，则不难推出概率也有如下三个基本性质

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Phi)=0$, $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

需要指出的是，概率的统计定义是在大量重复试验的基础上，汇总统计资料而给出的，它反映了概率的统计性质，其重要性不仅在于它提供了一种定义概率的方法，更重要的是提供了一种估计概率的方法．由于频率具有稳定性，在实际工作中，往往把大量试验中得到的频率，作为概率的近似值，如人口的抽样调查，产品的质量检验等工作中就是这样做的．另外，它同时也为检验理论是否正确提供了一种判别的方法．这类问题属于数理统计学的一个重要分支——假设检验，其将在本书第八章讨论．

【例 2】 圆周率 $\pi=3.1415926\cdots\cdots$是一个无限不循环小数，我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数后七位，这个纪录保持了 1000 多年！以后有人不断把它算得更精确．1873 年，英国学者沈克士公布了一个 π 值，该数值在小数点后一共有 707 位之多！但几十年后，曼彻斯特的费林对它产生了怀疑．他随机统计了 π 的 608 位小数，得到如下结果：

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现次数	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

你能说出他产生怀疑的理由吗?

因为 π 是一个无限不循环小数，所以，理论上每个数字出现的次数应近似相等，或者它们出现的频率应都接近 0.1，但 7 出现的频率过小．这就是费林产生怀疑的理由．

在实际应用中，利用概率的统计定义很难得到事件的准确概率，也不便于计算．为此，下面介绍概率的另一个定义——概率的古典定义，根据它可以方便地计算出一大类问题的概率．

二、概率的古典定义

确定概率的古典方法是概率论历史上最先开始研究的情形，它简单、直观，不需要做大量的重复试验，而是在经验事实的基础上，对被考察事件的可能性进行逻辑分析得出该事件的概率．在介绍概率古典定义之前，先回顾一下在古典概率大量使用的排列与组合公式．

排列和组合都是计算“从 n 个元素中任取 k 个元素”的取法总数公式，其主要区别在于：如果不讲究取出元素间的次序，则用组合公式，否则用排列公式。而所谓讲究取出元素间的次序，可以从实际问题中得以辨别，例如两个人相互握手是不

讲次序的，而两个人排队是讲次序的，因为“甲右乙左”与“乙右甲左”是不一样的．

排列与组合公式的推导都基于如下两条计数原理：

（1）乘法原理．如果做某件事需经 k 个步骤才能完成，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 k 步有 m_k 种方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 种方法．

譬如，甲城到乙城有 3 条旅游线路，由乙城到丙城有 2 条旅游线路，那么从甲城经乙城去丙城共有 $3\times2=6$ 条旅游线路．

（2）加法原理．如果做某件事可由 k 类不同途径之一去完成，在第一类途径中有 m_1 种完成方法，在第二类途径中有 m_2 种完成方法，……，在第 k 类途径中有 m_k 种完成方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法．

譬如，由甲城到乙城去旅游有三类交通工具：汽车、火车和飞机，而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 $5+3+2=10$ 班次供旅游者选择．

排列与组合的定义及计算公式如下：

（1）排列．从 n 个不同元素中任取 k（$k\leqslant n$）个元素排成一列（考虑元素先后出现次序），称之为一个排列，此种排列的总数记为 A_n^k. 按乘法原理，取出的第一个元素有 n 种取法，取出的第二个元素有 $n-1$ 种取法，……，取出的第 k 个元素有 $n-k+1$ 种取法．所以共有取法

$$A_n^k=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

特别地，当 $k=n$ 时，称为全排列，记为 A_n. 显然，全排列 $A_n=n!$．

（2）重复排列．从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如果连续取 k 次所得的排列称为重复排列，此种排列共有 n^k 个，注意这里的 k 允许大于 n.

（3）组合．从 n 个不同元素中任取 k（$k\leqslant n$）个元素并成一组（不考虑元素间的先后次序），称此一个组合，此种组合的总数记为 C_n^k. 按乘法原理此种组合的计算公式为

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

这里规定 $0!=1$，$C_n^0=1$.

（4）重复组合．从 n 个不同元素中每次取出一个，放回后再取下一个，如果连续取 k 次所得的组合称为重复组合，此种重复组合总数共有 C_{n+k-1}^k 个，注意这里的 k 也允许大于 n.

上述四种排列组合及其总数计算公式，在确定古典概率中经常使用，但在使用中要注意识别有序与无序、重复与不重复．

在某些试验中，试验的所有基本事件总数是有限的，并且每个基本事件发生的可能性是相同的．如在例 1 的掷硬币试验中，我们关心的是“正面朝上”或“反面朝上”的两个基本事件．由于硬币的匀称性，我们没理由认为“正面朝上”的可能性比“反面朝上”的可能性更大或更小，故可以认为它们出现的可能性是相同的，