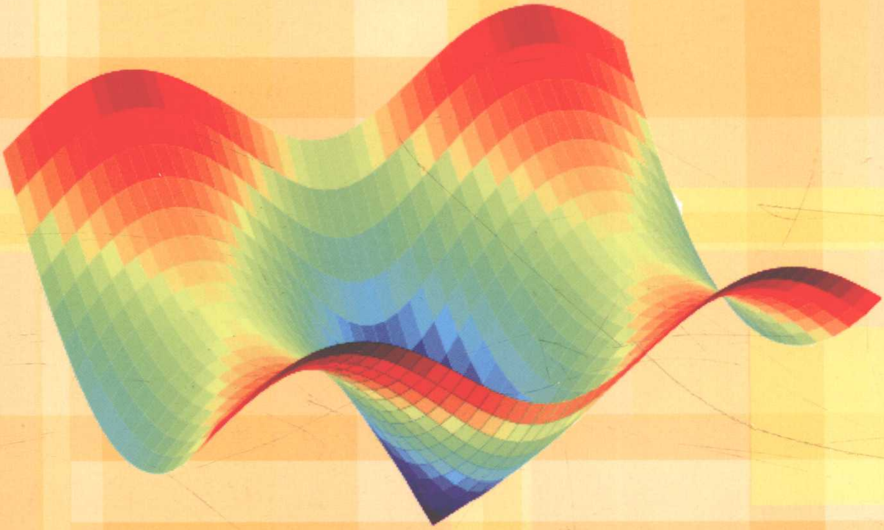

复变函数与积分变换

贾云涛 主 编
张瑞敏 张平 刘汉文 夏炳墅 副主编

清华大学出版社

复变函数与积分变换

贾云涛 主 编
张瑞敏 张平 刘汉文 夏炳墅 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍复数与复变函数、解析函数、复积分、解析函数的幂级数表示和洛朗展式、留数理论及其应用、傅氏变换、拉氏变换等内容，每章配有适量习题供读者选用，书末附有习题参考答案．附录中附有傅氏变换简表和拉氏变换简表，可供学习时查用．

本书适合于高等院校工科各专业，尤其可作为电子工程、通信、自动化、计算机、航空及测控等专业的教材，还可供工程技术人员和相关科技工作者阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/贾云涛主编.—北京：清华大学出版社，2017

ISBN 978-7-302-46989-6

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①贾…　Ⅲ.①复变函数–高等学校–教材　②积分变换–高等学校–教材　Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 079243 号

责任编辑：汪　操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm × 230mm　　印　张：6.75　　字　数：122 千字
版　　次：2017 年 4 月第 1 版　　印　次：2017 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1 ~ 2000
定　　价：20.00 元

产品编号：072214-01

前　言

复变函数理论在 19 世纪由三位著名的数学家柯西、魏尔斯特拉斯和黎曼奠定了基础. 柯西建立了复变函数的积分理论；魏尔斯特拉斯建立了复变函数的级数理论；黎曼建立了复变函数的几何理论. 20 世纪初，瑞典数学家列夫勒、法国数学家庞加莱和阿达马进一步开拓了复变函数理论的研究领域，为这门学科的发展做出了重要贡献.

复变函数与积分变换是高等学校理工科各专业学生的必修课程，该课程在自然科学和工程技术等领域有着广泛的应用，例如电气工程、通信与控制、信号分析与图像处理、机械系统、流体力学、地质勘探与地震预报等.

随着我国本科教育改革的深入，很多地方高校提出了培养复合型应用人才的目标. 为了满足学生多方面的需要，我们融合了多年来课程建设的实践经验，在参考了大量优秀教材、汲取了很多同仁宝贵经验的基础上编写了本书. 本书基于有限的课时和本科高校的实际教学情况，适当地降低了一些内容的理论深度，对复数与复变函数、解析函数、复积分、解析函数的幂级数表示和洛朗展式、留数理论及其应用、傅氏变换、拉氏变换等内容做了较为系统的介绍. 同时淡化了定理的推导，强调方法的训练，在确保知识体系完整的基础上，删去了一些难度较大和相对独立的内容，力求做到数学过程通俗易懂，结论形式易于运用.

本教材的具体编写分工是：第 1 章由刘汉文编写；第 2 章由张瑞敏编写；第 3 章由贾云涛编写；第 4 章由张平编写；第 5 章由夏炳墅编写. 最后由贾云涛对全书进行统稿.

编者衷心感谢清华大学出版社的大力支持，感谢北京理工大学珠海学院数理与土木工程学院领导和数学教学部全体教师给予的帮助和指导.

由于作者水平有限，书中难免有错漏不当之处，敬请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2017 年 2 月

目 录

第 1 章　预备知识

复变函数就是自变量与因变量均取复数的函数，它是本课程的研究对象；而解析函数是本课程讨论的中心，是复变函数研究的主要对象；复变函数的积分是研究解析函数的一个重要工具，解析函数的许多重要性质是通过复积分证明的. 本章主要论述复变函数、解析函数以及复积分，为后续章节奠定必要基础.

1.1　复数与复变函数

1.1.1　复数的基本概念

我们将形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 i 称为虚数单位，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$ 或 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$；x 与 y 是任意实数，依次称为 z 的实部与虚部，分别表示为

$$\operatorname{Re} z=x,\quad \operatorname{Im} z=y.$$

当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}y=x+\mathrm{i}\cdot 0$，我们就认为它是实数 x；当 $x=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}y=0+\mathrm{i}y$，我们就认为它为纯虚数，并且写作 $\mathrm{i}y$.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 如果 $x_1=x_2, y_1=y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等. 由此得出，对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，$z=0$ 当且仅当 $x=y=0$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数，称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数，记作 $\bar{z}$，易知 $\overline{(\bar{z})}=z$.

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数. 定义复数的加法为

$$z_1+z_2=\left(x_1+x_2\right)+\mathrm{i}\left(y_1+y_2\right). \tag{1.1}$$

复数的减法是加法的逆运算. 如果存在复数 z 使 $z_1=z_2+z$，则 $z=z_1-z_2$. 因此得

$$z_1-z_2=\left(x_1-x_2\right)+\mathrm{i}\left(y_1-y_2\right). \tag{1.2}$$

定义复数的乘法为

$$z_1\cdot z_2=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+\mathrm{i}\left(x_1y_2+x_2y_1\right). \tag{1.3}$$

例如

$$(2-3\mathrm{i})\cdot(4+5\mathrm{i})=\left[2\cdot 4-(-3)\cdot 5\right]+\mathrm{i}\left[2\cdot 5+(-3)\cdot 4\right]=23-2\mathrm{i},$$

由乘法定义可验证

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0+1\cdot\mathrm{i})(0+1\cdot\mathrm{i})=-1.$$

复数的除法是乘法的逆运算. 当 $z_2 \neq 0$ 时，我们说："z_1 除以 z_2 得到 z"，意思就是 $z_1 = z_2 \cdot z$.

从这个式子来求 z，记 $z = x + \mathrm{i}y$，由于

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = (x_2 + \mathrm{i}y_2)(x + \mathrm{i}y) = (x_2 x - y_2 y) + \mathrm{i}(x_2 y + x y_2),$$

则根据两个复数相等的定义得到

$$x_1 = (x_2 x - y_2 y), \quad y_1 = (x_2 y + x y_2),$$

由此解得

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

这就是说，当 $x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.4}$$

因为可直接验证

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = x_2^2 + y_2^2, \quad z_1 \cdot \overline{z_2} = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 - x_1 y_2),$$

从而

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}},$$

即

$$\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例如

$$\frac{3 - 2\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{(3 - 2\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})} = -\mathrm{i}.$$

同实数的四则运算一样，复数加法满足结合律与交换律；复数乘法也满足结合律与交换律；加法与乘法满足分配律，这些读者都可自行验证.

下面介绍有关共轭的几个运算性质：

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0),$$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

1.1.3　复平面、复数的模与辐角

一个复数 $x_0 + iy_0$ 可唯一地对应一个有序实数对 (x_0, y_0)，而有序实数对与坐标平面上的点是一一对应的，所以复数 z 全体与坐标平面上的点的全体形成一一对应. 现在我们直接把坐标平面上的点写成 $x_0 + iy_0$（图 1.1），那么横轴上的点就表示实数，纵轴上的点就表示纯虚数，整个坐标平面可称为复（数）平面. 今后索性将复数与复平面上的点不加区分.

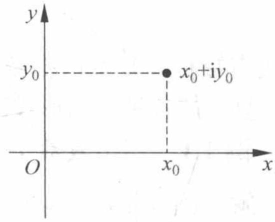

图　1.1

复数除了与平面上的点作成一一对应外，还可以同平面向量（规定向量的起点在原点）作成对应，只要将复数的实部与虚部分别看作向量的水平分量与竖直分量即可. 这样如果 z 是一个不为 0 的复数，那么就把它所对应向量的长度叫做 z 的模，记作 $|z|$；同时把以正实轴为始边，以表示 z 的向量为终边的角 θ 称为 z 的辐角，记作 $\mathrm{Arg}z$. 辐角 $\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值，其中任意两个值相差 2π 的整数倍，我们把介于 $-\pi$ 与 π 之间（包括 π）的那一个角称为 z 的主辐角，记作 $\arg z$，所以

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k \text{ 是任意整数}).$$

由向量的模的定义易得：当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，这时辐角没有意义；当 $z = x + iy \neq 0$ 时，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$，此时 z 的主辐角 $\arg z$ 与 $\arg\tan\dfrac{y}{x}$ 的关系如图 1.2.

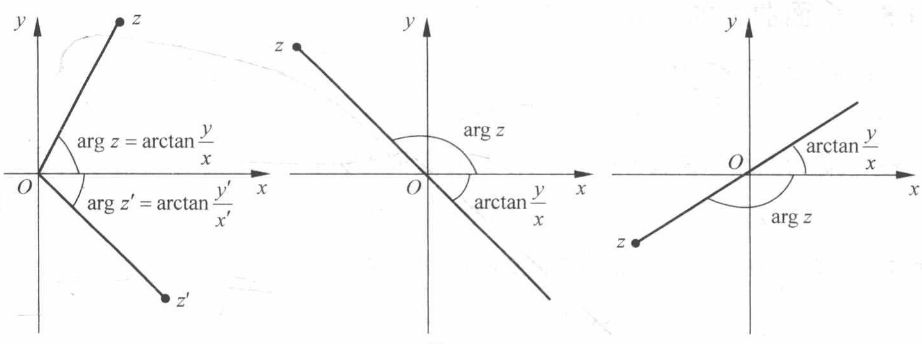

图　1.2

1.1.4　复数的三角表示

设 z 是一个不为 0 的复数，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，利用直角坐标与极坐标的关系 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 还可将复数 $z = x + iy$ 转化为下面形式：

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

上式右端称为复数的三角表示，显然由于辐角有无穷多种选择，一个复数的三角表示不是唯一的.

利用欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 又可将复数 z 转化为下面形式：

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

上式右端称为复数的指数表示.

复数的各种表示形式可以互相转换，以适应讨论不同问题及计算方面的需要.

例 1.1 写出复数 1+i 的三角表示和指数表示.

解 因为 $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}, \arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$，所以 $1+\mathrm{i}$ 的三角表示和指数表示可写成

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

如果取 1+i 的辐角为 $\dfrac{9\pi}{4}$，则 1+i 的三角表示也可写成 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{9\pi}{4}\right)$，$1+\mathrm{i}$ 的指数表示也可写成 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{4}}$.

例 1.2 写出复数 $-1-3\mathrm{i}$ 的三角表示式.

解 因为 $|-1-3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$ 以及 $\arg(-1-3\mathrm{i}) = \arctan 3 - \pi$，故所求三角表示式为

$$-1-3\mathrm{i} = \sqrt{10}\left[\cos(\arctan 3 - \pi) + \mathrm{i}\sin(\arctan 3 - \pi)\right].$$

1.1.5 平面曲线的实变量复值函数表示

在高等数学课程中已经知道，平面曲线可以用一对连续函数

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

来表示（称为曲线的参数方程表示）. 现在我们用实变量的复值函数 $z(t)$ 表示，即

$$z = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

例如，以原点为中心、以 a 为半径的圆周用实变量的复值函数表示，即为

$$z(t) = a(\cos t + \mathrm{i}\sin t) = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

又如，以 z_0 为中心、以 r 为半径的圆周用实变量的复值函数表示，即为

$$z(\theta) = z_0 + r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

再如，平面上连接点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线段其复数形式的参数方程可表示为

$$z = x(t) + \mathrm{i}y(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t + \mathrm{i}(y_1 + (y_2 - y_1)t) = z_1 + (z_2 - z_1)t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

如果曲线 $z=x(t)+\mathrm{i}y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 满足 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的，且对于 t 的每一个值都有 $\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2\neq 0$，则称曲线在区间 $[a,b]$ 上是光滑的.

1.1.6　复变函数的概念

设 G 是复平面上一点集，如果对于 G 中任意的一点 z，有确定的（一个或多个）复数 w 同它对应，则说在 G 上定义了一个复变函数，记作 $w=f(z)$（定义域与值域等名称都可以从高等数学中移植过来）. 如果对每个 $z\in G$ 有唯一的 w 同它对应，则称 $w=f(z)$ 为单值函数，否则称为多值函数.

例 1.3　对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，定义 $w=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，我们称此函数为指数函数，记作 $w=\mathrm{e}^z$.

例 1.4　对于复数 $z(z\neq 0)$，我们把满足方程 $\mathrm{e}^w=z$ 的函数 $w=f(z)$ 称为对数函数，记作 $w=\mathrm{Ln}\,z$.

类似地，分别称函数 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$ 与 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ 为复变量 z 的余弦函数与正弦函数，分别记作 $\cos z$ 与 $\sin z$，即

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\quad \sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

由于给定了一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就相当于给定了两个实数 x 和 y，而复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 亦同样地对应着一对实数 u 和 v，所以复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w=f(z)$ 相当于两个关系式:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实函数.

1.1.7　复变函数的极限与连续性

定义 1.1　设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若存在确定的复数 $A(A\neq\infty)$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使得对满足 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\leqslant\rho)$ 的一切 z，都有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(z)$ 当 z 趋向 z_0 时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 或 $f(z)\to A(z\to z_0)$.

复变函数极限有类似于实函数极限的性质，例如当 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$ 时，有

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=A\pm B,$$
$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).$$

复变函数极限的计算可归结为实数对极限的计算，具体来说，有以下定理:

定理 1.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$， $A=u_0+\mathrm{i}v_0$， $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

证明 必要性. 若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，根据极限定义，当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，则有

$$|f(z)-A|=|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon.$$

于是显见，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，则有

$$|u-u_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

充分性. 当上面两式成立，即当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，就有

$$|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是便有当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-A|=|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)|\leqslant|u-u_0|+|v-v_0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A.$$ □

定义 1.2 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ 成立，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 中每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

1.2 解析函数

1.2.1 复变函数的导数

定义 1.3 设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的某邻域内有定义， $z_0+\Delta z$ 是邻域内任

一点，$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在有限的极限值 A，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可导；A 记作 $f'(z)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1.5}$$

此时也称 $f(z)$ 在 z_0 处可微.

由定义易知，如果 $f(z)$ 在 z_0 处可导（或可微），则 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

例 1.5　证明：函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导，且导数等于 0.

证明　看商式 $\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}=\dfrac{|z|^2}{z}=\overline{z}$，当 $z\to 0$ 时，$\overline{z}\to 0$，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导且导数等于 0. □

1.2.2　解析函数的概念与求导法则

定义 1.4　如果 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析；如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或说 $f(z)$ 是 D 内的解析函数；如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点.

由定义可知，若函数在一点解析，则一定在该点可导，反之则不一定. 但是函数在区域内解析与在区域内处处可导是等价的.

由于复变函数的导数定义在形式上类似于高等数学中单元实函数导数的定义，因此用高等数学中类似的方法就可以证明下述各求导法则.

1. 四则运算法则

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是区域 D 上的解析函数，则 $f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$ 以及 $\dfrac{f(z)}{g(z)}\left(g(z)\neq 0\right)$ 在 D 上为解析，且有

$$\left[f(z)\pm g(z)\right]'=f'(z)\pm g'(z),\ \left[f(z)g(z)\right]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}.$$

2. 复合函数的求导法则

设函数 $\xi=f(z)$ 在区域 D 内解析，函数 $w=g(\xi)$ 在区域 G 内解析，又

$f(D)\subset G$ ($f(D)$ 表示函数 $\xi=f(z)$ 的值域，也就是区域 D 的像)，则复合函数 $w=g\left(f(z)\right)=h(z)$ 在 D 内解析，且有 $h'(z)=g'\left(f(z)\right)f'(z)$.

3. 反函数的求导法则

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内为解析且 $f'(z)\neq 0$，又反函数 $z=f^{-1}(w)=\varphi(w)$ 存在且连续，则 $\varphi'(w)=\dfrac{1}{f'\left(\varphi(w)\right)}$.

1.2.3 解析函数的一个充分必要条件

设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内为解析，根据复变函数与二元实变函数的联系，我们自然要问：作为解析函数的实部与虚部的两个二元函数有什么特性？下面的定理回答了这个问题.

定理 1.2 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而且满足柯西-黎曼方程（简称 C-R 方程）：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad 且 \quad f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.6}$$

定理 1.3 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析（即在 D 内可导）的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 D 内处处可微，而且满足 C-R 方程.

推论 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，如果在 D 内 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的四个偏导数 u'_x,u'_y,v'_x,v'_y 存在且连续，并且满足 C-R 方程，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证明 由于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，因而 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微，由定理 1.2 知 $f(z)$ 在 D 内解析. □

例 1.6 讨论下列函数的可导性和解析性.

（1） $w=z^2$；（2） $w=\mathrm{e}^z$.

解 （1）因为 $w=z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，所以 $u=x^2-y^2;v=2xy$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

从而满足 C-R 方程，因上面四个一阶偏导数均连续，故 $w=z^2$ 在复平面上处处解析.

（2）因为 $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$，所以 $u=\mathrm{e}^x\cos y,\ v=\mathrm{e}^x\sin y$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y.$$

从而满足 C-R 方程，因上面四个一阶偏导数均连续，故 $w=\mathrm{e}^z$ 在复平面上处处解析.

同样可知 $w=\sin z, w=\cos z$ 都在复平面上处处解析，验证留给读者完成.

1.3　复变函数的积分

1.3.1　复积分的定义与计算

定义 1.5　设 C 是平面上一条光滑的简单曲线，其起点为 A，终点为 B（图 1.3），函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 C 上有定义，把曲线 C 任意分成 n 个小弧段，设分点为 $A=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=B$，其中 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k(k=0,1,2,\cdots,n)$，在每个小弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 上任取一点 $\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$，作和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$，其中 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$.

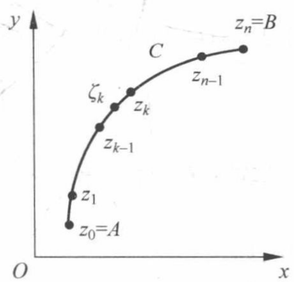

图　1.3

设 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\Delta z_k|$，当 $\lambda\to 0$ 时，如果和式的极限存在，且此极限值不依赖 ζ_k 的选择，也不依赖对 C 的分法，那么就称此极限为 $f(z)$ 沿曲线 C 自 A 到 B 的复积分，记作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k. \tag{1.7}$$

沿 C 负方向（即由 B 到 A）的积分则记作 $\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$，当 C 为闭曲线，那么此闭曲线的积分就记作 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$（C 正方向为逆时针方向）.

定理 1.4　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续，则复积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，且可以表示为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1.8}$$

证明　将 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$ 的实部和虚部分开，得

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right].$$

由于 $f(z)$ 在 C 上连续，从而 u,v 在 C 上连续，当 $\lambda \to 0$ 时，有 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\Delta x_k| \to 0$ 和 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\Delta y_k| \to 0$，于是上式右端极限存在，且有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y. \qquad \square$$

式 (1.8) 说明了两个问题：

（1）当 $f(z)$ 是连续函数而 C 是光滑曲线时，积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在；

（2）$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算.

利用式 (1.8) 还可把复积分化为普通的定积分，设曲线 C 的参数方程为 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$，将它代入式 (1.8) 右端得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\,. \tag{1.9}$$

例 1.7 计算 $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中 n 为任意整数，C 为以 z_0 为中心、r 为半径的圆周.

解 C 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，由式 (1.9) 得

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\cos[(n-1)\theta]\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\sin[(n-1)\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1. \end{cases}$$

此例的结果很重要，以后经常要用到. 以上结果与积分路径圆周的中心和半径无关.

例 1.8 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$，其中 C 为从原点到点 3+4i 的直线段.

解 直线段 C 的方程可写作 $z=3t+\mathrm{i}4t\,(0\leqslant t\leqslant 1)$. 在 C 上，$z=(3+4\mathrm{i})t$，$\mathrm{d}z=(3+4\mathrm{i})\mathrm{d}t$，于是

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (3+4\mathrm{i})^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2 = -\frac{7}{2}+12\mathrm{i}.$$