



世纪高等教育土木工程系列规划教材

结构力学

刘香 刘书智 银英姿 主编

Structural Me



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世

划教材

结构力学

主 编 刘 香 刘书智 银英姿
参 编 王晨霞 李 娟 李喜乐
田金亮



工业出版社

本书内容包含了教育部制订的“结构力学课程教学基本要求 (A类)”里规定的基本内容和专题部分的必修内容,教材共分10章,内容包括绪论、平面结构的几何组成分析、静定结构的受力分析、静定结构的位移计算、力法、位移法、渐近法和近似法、影响线及其应用、矩阵位移法、结构的动力计算。章后均有小结、思考题和习题,书后附有习题参考答案。

本书选材适当,叙述简明扼要,例题、习题典型适用,难度适中,重视基本概念、基本原理的介绍,符合学生的认知规律,深入浅出,联系实际,符合高素质工程应用型人才的培养要求。本书配套的教师用课件及部分习题解答过程等资源请登录机械工业出版社教育服务网 (www.cmpedu.com) 注册下载。

本书可作为高等工科院校土木工程、水利工程等专业通用教材,也可用作自学考试和电大、函大以及成人教育的教学参考书,并可供注册类考试考生以及土木工程类技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构力学/刘香,刘书智主编. —北京:机械工业出版社,2017.6
21世纪高等教育土木工程系列规划教材
ISBN 978-7-111-56997-8

I. ①结… II. ①刘…②刘… III. ①结构力学—高等学校—教材
IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 121994 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:马军平 责任编辑:马军平 林 辉

责任校对:刘志文 封面设计:张 静

责任印制:孙 炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2017年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·21.25印张·519千字

标准书号:ISBN 978-7-111-56997-8

定价:49.80元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

前 言

本书是按照全国高等学科土木工程学科专业指导委员会修订的《高等学校土木工程本科指导性专业规范》以及教育部高等学校非力学专业力学基础课程教学指导分委员会制定的“结构力学课程教学基本要求(A类)”编写而成。

在编写本书时,本着“厚基础、重能力、以培养高素质工程应用型人才为主”的总体思路,在保证课程体系完整的基础上,注重基本概念、基本原理的介绍,精选内容,力求概念准确,论述简明,思路清晰,符合学生的认知规律,深入浅出,联系实际;以教学为主,合理安排章节内容,使其既易教又易学,既能学会又能应用,更符合高素质工程应用型人才的培养要求;文字力求通俗、流畅、严谨、易懂;注重例题和习题的选择,力求做到典型、适用,强调思维能力、分析能力、计算能力和解决复杂工程问题能力的培养。

本书内容包含了“结构力学课程教学基本要求(A类)”里规定的基本内容和专题部分的必修内容,全书共分10章,内容包括:绪论、平面杆件体系的几何组成分析、静定结构的受力分析、静定结构的位移计算、力法、位移法、渐近法和近似法、影响线及其应用、矩阵位移法、结构的动力计算。章后有丰富的习题和思考题,书后附有习题答案。

本书由刘香、刘书智、银英姿担任主编。参加编写工作的有:刘香(第1、8章)、银英姿(第2、6章)、王晨霞(第3章)、刘书智(第4、7章)、李娟(第5章)、李喜乐(第9章)、田金亮(第10章)。全书由主编统稿并定稿。此外,李娟在教材的编写过程中做了大量工作,付出了辛勤劳动,在此表示衷心感谢。

在编写本书过程中,参考了许多同行专家的研究成果,还借鉴和参考了许多相关教材等,在此表示诚挚的谢意。限于编者的水平,书中如有缺点和错误,敬请读者和同行批评指正。

编 者

目 录

前 言

第1章 绪论	1
1.1 结构力学的研究对象和基本任务.....	1
1.2 结构的计算简图.....	1
1.3 平面杆件结构的分类.....	5
1.4 荷载的分类.....	6
本章小结	7
思考题	7
第2章 平面杆件体系的几何组成分析	8
2.1 几何组成分析中的几个基本概念.....	8
2.2 几何不变体系的基本组成规律	10
2.3 体系几何组成分析举例	12
2.4 体系的计算自由度	15
2.5 体系的几何组成与静定性的关系	16
本章小结.....	16
思考题.....	17
习题.....	17
第3章 静定结构的受力分析	19
3.1 单跨静定梁内力计算	19
3.2 斜梁	26
3.3 多跨静定梁	28
3.4 静定刚架	31
3.5 静定平面桁架	38
3.6 组合结构	48
3.7 三铰拱	52
3.8 静定结构小结	59
本章小结.....	64
思考题.....	65
习题.....	65
第4章 静定结构的位移计算	72
4.1 位移计算概述	72

4.2 虚功原理、结构位移计算的一般公式	73
4.3 静定结构由荷载引起的位移	76
4.4 图乘法	81
4.5 静定结构由于支座移动和温度改变引起的位移	87
4.6 互等定理	90
本章小结	93
思考题	93
习题	94
第5章 力法	100
5.1 超静定结构概述	100
5.2 超静定次数的确定	100
5.3 力法的基本概念	104
5.4 力法方程	106
5.5 力法计算示例	108
5.6 对称性的利用	115
5.7 超静定拱	121
5.8 温度变化和支座移动时超静定结构的计算	129
5.9 超静定结构的位移计算及内力图校核	134
本章小结	138
思考题	138
习题	139
第6章 位移法	144
6.1 位移法的基本概念	144
6.2 等截面直杆的形常数和载常数	145
6.3 位移法基本未知量和基本体系	151
6.4 位移法方程	155
6.5 位移法计算连续梁和无侧移的刚架	157
6.6 位移法计算有侧移刚架	163
6.7 位移法计算对称结构	170
6.8 支座位移时的计算	174
6.9 用直接平衡法建立位移法方程	175
本章小结	177
思考题	177
习题	178
第7章 渐近法和近似法	182
7.1 渐近法概述	182
7.2 单结点的力矩分配	182
7.3 多结点的力矩分配	189
7.4 无剪力分配法	196
7.5 多层多跨刚架的近似计算	201
7.6 超静定结构的特性	207
本章小结	208

思考题	209
习题	209

第8章 影响线及其应用 213

8.1 影响线的概念	213
8.2 用静力法作单跨静定梁的影响线	214
8.3 结点荷载作用下梁的影响线	220
8.4 静力法作桁架的影响线	221
8.5 机动法作静定梁的影响线	223
8.6 机动法作超静定梁的影响线	227
8.7 影响线的应用	229
8.8 公路、铁路的标准荷载制和换算荷载	231
8.9 利用影响线确定移动荷载最不利位置	233
8.10 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩	236
本章小结	239
思考题	240
习题	240

第9章 矩阵位移法 243

9.1 概述	243
9.2 单元刚度矩阵	244
9.3 单元刚度矩阵的坐标转换	248
9.4 结构的整体刚度矩阵	251
9.5 等效结点荷载	260
9.6 计算步骤和算例	264
9.7 桁架的整体分析	269
本章小结	271
思考题	272
习题	272

第10章 结构的动力计算 274

10.1 结构动力计算概述	274
10.2 单自由度体系振动微分方程的建立	277
10.3 单自由度体系的自由振动	283
10.4 单自由度体系的强迫振动	287
10.5 阻尼对振动的影响	295
10.6 多自由度体系的自由振动	299
10.7 多自由度体系的强迫振动	310
10.8 无限自由度体系的自由振动	317
本章小结	320
思考题	320
习题	321

附录 部分习题参考答案 324

参考文献 331

绪 论 第1章

1.1 结构力学的研究对象和基本任务

建筑物、构筑物或其他工程对象中支承和传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构(简称结构)。例如,房屋建筑中由楼板、梁、柱、剪力墙以及基础等组成的结构体系,水工建筑物中的大坝和闸门,公路和铁路桥梁、隧道和涵洞,飞机、汽车中的受力骨架等,都是工程结构的典型例子。

按照几何特征的不同,结构可分为以下三类:

(1) **杆件结构**(又称杆系结构) 它是由若干根长度远大于其他两个尺度的杆件相互连接而组成的结构。梁、刚架、拱和桁架等都是杆系结构的典型形式。

(2) **板壳结构**(又称薄壁结构) 它是厚度远小于其他两个尺度的构件。房屋建筑中的楼板、壳体屋盖,飞机和轮船的外壳等均属于板壳结构。

(3) **实体结构**(又称三维连续体结构) 它是三个方向的尺度大约为同一量级的结构。重力式挡土墙和块式基础等均属于实体结构。

结构力学的研究对象主要为杆件结构,因此,也可称为杆件结构力学。

结构力学着重讨论结构的强度、刚度、稳定性计算和动力反应,以及结构的组成规律。具体包括以下几个方面:

- 1) 讨论结构的组成规律、合理形式及结构计算简图的合理选择。
- 2) 讨论结构内力和变形的计算方法,进行结构的强度计算和刚度验算。
- 3) 讨论结构的稳定性以及在动力荷载作用下的结构反应。

结构力学是理论力学和材料力学的后续课程。理论力学着重讨论刚体机械运动的基本规律。材料力学着重讨论单根杆件的强度、刚度和稳定性问题。同时,结构力学又为弹性力学以及混凝土结构、砌体结构和钢结构等专业课程提供了进一步的力学知识基础。结构力学是一门专业基础课,在专业学习中占有重要的地位。学习结构力学要“抓住重点、灵活分析、多做练习”。

1.2 结构的计算简图

实际结构是很复杂的,如果完全按照实际结构的工作状态进行分析,既不可能,也无必要。因而在对实际结构进行力学分析之前,需要做出某些简化和假设。

在结构计算中,经过科学抽象加以简化,用以代替实际结构的计算图形称为结构的计算

简图。

1.2.1 选取的原则及要求

- 1) 保留主要因素，略去次要因素，使计算简图能反映出实际结构的主要受力特征。
- 2) 根据需要与可能，并从实际出发，力求使计算简图便于计算。

有时，根据不同的要求与具体情况，对同一实际结构可选取不同的计算简图。例如，在初步设计阶段，可选取较为粗略的计算简图，而在施工图设计阶段，则可选取较为精确的计算简图；采用手算时，可选取较为简单的计算简图，而采用电算时，则可选取较为复杂的计算简图。

1.2.2 实际杆件结构的简化

在选择计算简图时，需要对实际结构的情况进行多方面的简化，通常包括以下内容：

1. 杆件体系的简化

实际结构一般都是空间结构，但在多数情况下常可以忽略一些次要的空间约束作用，或是将这种空间约束作用转化到平面内，从而将实际结构分解为平面结构，使计算得以简化。本书主要讨论平面杆件结构的计算问题。

2. 杆件的简化

组成平面杆件结构的各个杆件，其长度远大于截面的高度和宽度，尽管杆件的材料、截面形状、所受荷载、两端约束可能各有不同，但其变形都符合平截面假定，即变形前为平面的横截面，变形后仍保持为平面。这样，截面上的应力就可由截面内力按照材料力学的方法确定。于是，在受力分析时，只需确定杆件截面的位置，而无须确定截面的形状。因此，在计算简图中，无论是直杆或曲杆，均可以用杆件的轴线（截面形心的连线）来表示，杆件的长度一般可用轴线交点间的距离表示。

3. 结点的简化

杆件间相互连接处称为结点。木结构、钢结构和混凝土结构等的结点，具体构造形式虽不尽相同，但通常可以简化为以下两种基本结点和一种组合结点。

(1) **铰结点** 铰结点的特征是所连接各杆可以绕铰做自由转动，如图 1-1a 所示。工程中，通过螺栓、铆钉、楔头、焊接等方式连接，各杆端虽不能绕结点任意转动，但各杆件之间仍有微小相对转动的可能，计算时常作为铰结点处理。铰结点只能传递力，不能传递力矩。

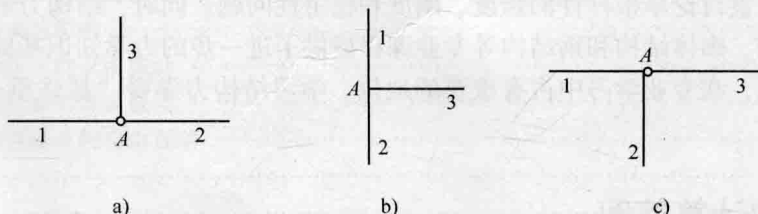


图 1-1 平面杆件结构的结点

a) 铰结点 b) 刚结点 c) 组合结点

(2) **刚结点** 刚结点的特征是所连接杆件之间不能在结点处产生相对转动，即在刚结

点处各杆之间的夹角在变形前后保持不变。工程中,现浇钢筋混凝土框架由于边柱与横梁间为整体浇筑,同时横梁的受力钢筋伸入柱内并满足锚固长度的要求,因而保证了横梁与边柱能相互牢固地连接在一起,构成了刚结点,如图1-1b所示。

(3) **组合结点**(又称半铰结点) 在同一结点上,部分杆件之间刚性连接,部分杆件之间铰连接,如图1-1c所示。

4. 支座的简化

结构与基础相连接的部分称为支座。结构所受的荷载通过支座传递给基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式主要有以下五种类型:

(1) **活动铰支座** 图1-2a是活动铰支座的构造简图,其机动特征是结构可绕铰 A 做自由转动,并允许沿支承面 $m-n$ 有微量的移动,但限制铰 A 沿垂直于支承面方向的移动。在计算简图中,可用图1-2b所示一根竖向支座链杆来表示。

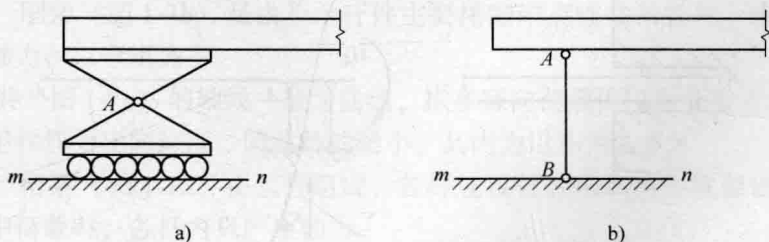


图1-2 活动铰支座

a) 构造简图 b) 计算简图

(2) **固定铰支座** 图1-3a是固定铰支座的构造简图,其机动特征是结构仍可绕铰 A 转动,但沿水平和垂直方向的移动受到限制。其受力特点是支座反力通过铰 A 的中心,但力的大小和方向未知。在计算简图中,可以用相交于 A 点的两根支承链杆来表示(图1-3b、c)。

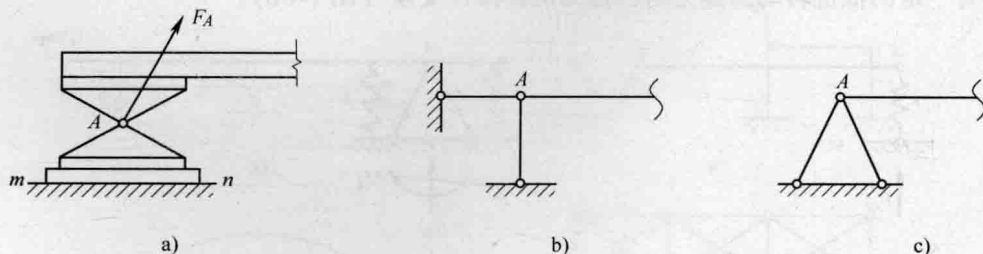


图1-3 固定铰支座

a) 构造简图 b)、c) 计算简图

(3) **固定支座** 图1-4a是固定支座的构造简图,如悬臂梁,当梁端插入墙身有一定长度时,则可视作固定支座。固定支座的机动特征是结构与支座相连接的 A 处,既不能发生转动,也不能发生水平和垂直方向的移动。相应的支座反力可用水平反力、竖向反力和反力偶矩来表示(图1-4b)。

(4) **滑动支座** 图1-5a是滑动支座的构造简图,它能限制结构的转动和沿一个方向上的移动,但允许结构在另一方向上有微量滑动。在计算简图中;可以用两根竖向平行支杆来表示这类滑动支座的机动特征和受力特征(图1-5b)。相应的支座反力为一个垂直于支承面

的力和一个力偶矩。

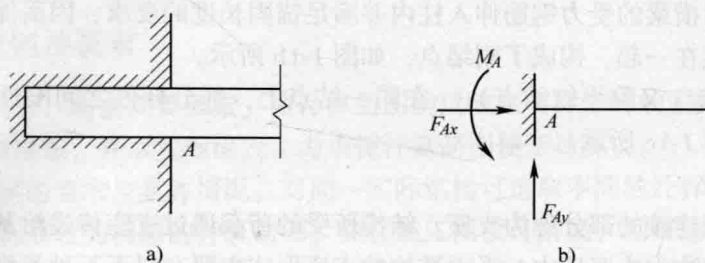


图 1-4 固定支座
a) 构造简图 b) 计算简图

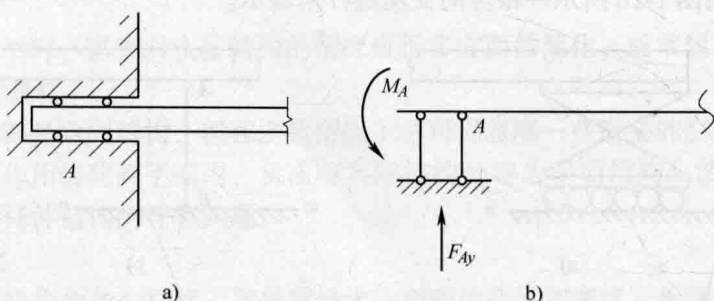


图 1-5 滑动支座
a) 构造简图 b) 计算简图

(5) **弹性支座** 若要考虑支座本身的变形, 则这类支座称为弹性支座。当支座具有一定的抵抗移动的能力时, 称为抗移弹性支座, 可用一根弹簧来表示这种支座 (图 1-6a)。当支座具有一定的抵抗转动的能力时, 称为抗转弹性支座 (图 1-6b)。

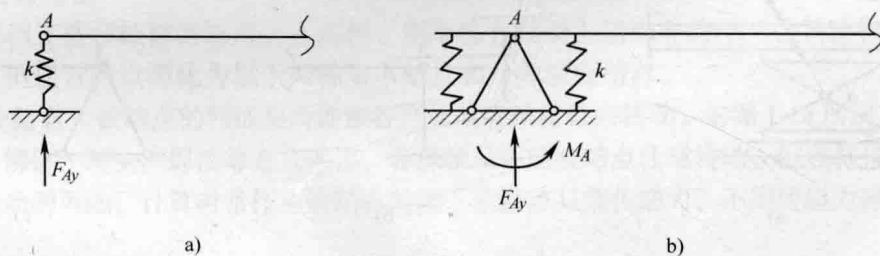


图 1-6 弹性支座
a) 抗移弹性支座 (k 为抗移动刚度系数) b) 抗转弹性支座 (k 为抗转动刚度系数)

5. 荷载的简化

在对结构进行分析时, 常将荷载简化为沿杆轴连续分布的线荷载或作用在一点的集中力。

例如, 对于横放的等截面直杆, 可以将其自重简化为沿杆长均匀分布的线荷载; 对水坝进行计算时, 常取单位长度的坝段, 将水压力简化为作用在坝段对称面内, 与水深成正比的线性分布荷载。

又如,当荷载的作用面积相对于构件的几何尺寸很小时,可以将其简化为集中力。工业厂房中,通过轮子作用在吊车梁上的起重机荷载,由于轮子与吊车梁的接触面积很小,可以将轮压看作是作用在吊车梁上的集中荷载。

1.3 平面杆件结构的分类

在结构分析中,是用计算简图代替实际结构的。所谓结构分类,实际上是指结构计算简图的分类。

杆件结构按受力和变形特性可分为六种类型:

(1) 梁 梁(图 1-7a)是一种受弯构件,它的轴线一般为直线,在竖向荷载作用下支座不产生水平反力。梁可以是单跨的,也可以是多跨的。

(2) 刚架 刚架(图 1-7b)是由若干杆件主要用刚结点连接的结构,刚架各杆件承受弯矩、剪力和轴力,以弯矩为主。

(3) 拱 拱(图 1-7c)的轴线一般为曲线,拱在竖向荷载作用下支座会产生水平反力,从而使拱内弯矩和剪力比同跨度、同荷载的梁小。其内力以压力为主。

(4) 桁架 桁架(图 1-7d)由直杆组成,各杆连接处的结点均为理想铰结点。当桁架仅承受结点集中荷载时,各杆内只产生轴力。

(5) 组合结构 组合结构(图 1-7e)是由桁架杆件和梁或桁架杆件和刚架等组合而成的结构,其中含有组合结点。其受力特点为除桁架杆件只承受轴力外,其余受弯杆件能同时承受轴力、剪力和弯矩。

(6) 悬索结构 悬索结构(图 1-7f)通常以仅能承受拉力的柔性缆索作为主要受力构件。

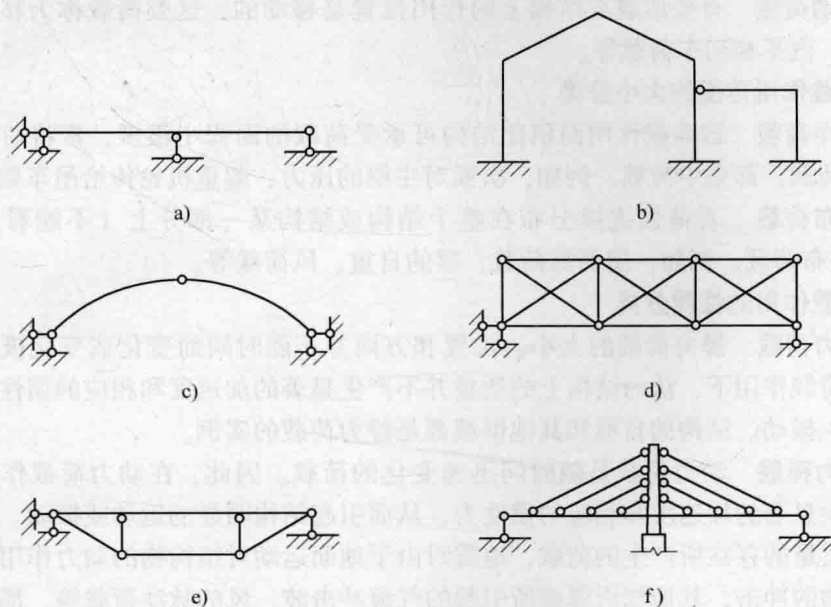


图 1-7 平面杆件结构

a) 梁 b) 刚架 c) 拱 d) 桁架 e) 组合结构 f) 悬索结构

根据结构计算特点,结构可分为静定结构和超静定结构两大类。静定结构的杆件内力(包括反力)可由静力平衡条件唯一确定。超静定结构的杆件内力(包括反力)仅由静力平衡条件不能唯一确定,而必须同时考虑变形条件才能确定。

根据杆件和荷载在空间的位置,结构可分为平面结构和空间结构。平面结构各杆的轴线和外力的作用线均在同一平面内。空间结构各杆的轴线不在同一平面内,如空间刚架、电视塔等。

1.4 荷载的分类

荷载是主动作用于结构上的外力,它将使结构产生内力和位移。例如,结构本身的自重,工业厂房结构上的起重机荷载,行驶在桥梁上的车辆荷载,作用于水工结构上的水压力或土压力等。

根据不同情况,荷载的分类如下:

1. 按荷载作用时间的长短分类

(1) **恒载**(又称永久荷载) 永久作用在结构上的不变荷载称为恒载。如结构本身的自重以及永久固定在结构上的设备重力等。在结构的使用阶段,上述荷载的大小、位置和方向均不改变。

(2) **活载**(又称可变荷载) 暂时作用在结构上的可变荷载称为活载。例如,列车、起重机荷载,人群、风、雪荷载等。

2. 按荷载作用位置的变化情况分类

(1) **固定荷载** 在具体进行结构计算时,通常把恒载及有些活载在结构上的作用位置视作是固定的,这类荷载称为固定荷载。例如,梁的自重、人群、风、雪荷载等。

(2) **移动荷载** 有些活载在结构上的作用位置是移动的,这类荷载称为移动荷载。例如,起重机、汽车和列车荷载等。

3. 按荷载作用范围的大小分类

(1) **集中荷载** 若荷载作用面积比结构可承受荷载的面积小很多,常将荷载简化为作用于一点的荷载,即集中荷载。例如,次梁对主梁的压力、起重机轮传给吊车梁的压力等。

(2) **分布荷载** 若荷载连续分布在整個结构或结构某一部分上(不能看成集中荷载时),则为分布荷载。例如,屋面雪荷载、梁的自重、风荷载等。

4. 按荷载作用的性质分类

(1) **静力荷载** 静力荷载的大小、位置和方向并不随时间而变化或变化极为缓慢。因此,在静力荷载作用下,认为结构上的质量并不产生显著的加速度和相应的惯性力,从而不会使结构产生振动。结构的自重和其他恒载都是静力荷载的实例。

(2) **动力荷载** 动力荷载是随时间迅速变化的荷载。因此,在动力荷载作用下,结构的质量将产生显著的加速度和相应的惯性力,从而引起结构明显的运动或振动。如机器运转时由于偏心质量的存在所产生的荷载,地震时由于地面运动对结构物的动力作用,波浪压力对水工结构物的冲击,其他如因爆破所引起的气浪冲击波,风的脉动荷载等,都是动力荷载的实例。

应该指出,除荷载外结构还会因其他因素,如温度改变、支座移动、制造误差、材料收

缩等产生内力或变形。

本章小结

本章介绍了结构力学的一些预备知识：计算简图选取的原则及实际杆件结构的简化方法，包括杆件体系的简化、杆件的简化、结点的简化、支座的简化、荷载的简化等；结构的分类和各类结构的受力特点；各种荷载的作用效应。这些知识为进一步进行结构受力分析打下基础。其中计算简图选取的原则及实际杆件结构的简化方法应理解并掌握，这是以后计算的出发点。

思考题

- 1-1 结构力学的研究对象和基本任务是什么？
- 1-2 简述计算简图选取的原则及方法。
- 1-3 杆件结构按受力和变形特性可分为几种类型？各有什么特点？
- 1-4 简述荷载的概念及分类。

平面杆件体系的几何组成分析

第 2 章

2.1 几何组成分析中的几个基本概念

2.1.1 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构是由若干杆件按一定规律互相连接在一起的，是用来承受和传递荷载作用的体系。在荷载作用下，杆件材料会产生应变，使得结构因荷载作用而变形，但这种变形与结构的尺寸相比是微小的，故在几何组成分析中，对这种材料应变的影响是不考虑的。在进行体系的几何组成分析时，体系的形状和各个杆件的相对位置不发生变化的体系称为几何不变体系，如图 2-1a、b 所示；体系的位置或形状是可以改变的称为几何可变体系，如图 2-1c 所示。

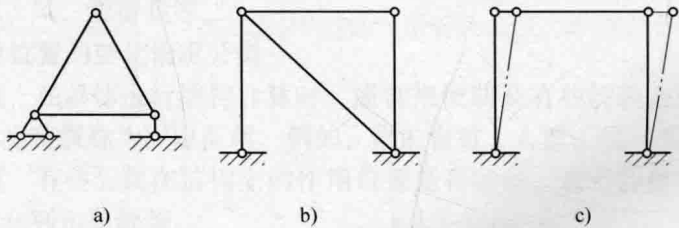


图 2-1 几何不变体系和几何可变体系
a)、b) 几何不变体系 c) 几何可变体系

一般结构都必须是几何不变体系，不能采用几何可变体系。

2.1.2 刚片、自由度

1. 刚片

对体系进行几何组成分析时，由于不考虑材料的应变，故将每一根杆件视为刚体。在平面体系中又把刚体称为刚片。体系中已证实的几何不变的某个部分，也可看作是一个刚片；同理，支承体系的基础也可看成是一个刚片。

2. 自由度

一个体系的自由度，是确定该体系在运动时的位置所需的独立坐标参数的数目。假设一个点 A 在平面内运动时，确定其位置用两个坐标 x 、 y ，如图 2-2a 所示，所以平面上的一个点有两个自由度。一个刚片在

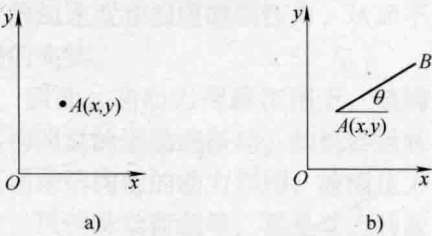


图 2-2 点和刚片的自由度
a) 两个自由度 b) 三个自由度

平面内运动时, 确定其位置可用刚片上任一个点的两个坐标 x 、 y 和过点 A 的任一条直线 AB 的倾角 θ 来确定, 如图 2-2b 所示, 所以平面上的一个刚片有三个自由度。

2.1.3 约束

约束是减少自由度的装置, 也称联系, 是限制体系运动的一种条件。它是体系中杆件之间或体系与基础之间的装置。若它能减少一个自由度就称为一个约束。减少两个自由度就是两个约束, 依此类推。通常的约束有链杆、支座、铰、刚性连接等。

1) 一个链杆或一个支杆减少一个自由度, 相当于一个约束, 如图 2-3a 所示。

2) 一固定铰支座或单铰减少两个自由度, 相当于两个约束, 如图 2-3b 所示。同理, 一个单铰也相当于两相交链杆的约束作用。

3) 固定端或一刚性杆减少三个自由度, 相当于三个约束, 如图 2-3c、d 所示。

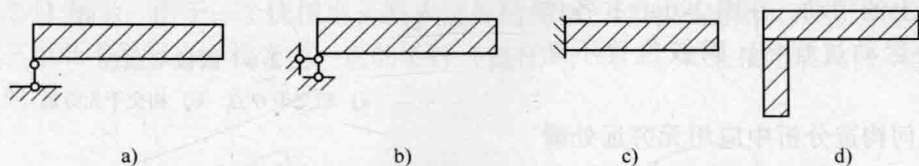


图 2-3 各种约束

a) 链杆约束 b) 固定铰支座 c) 固定端 d) 刚性杆

约束还可分为单铰和复铰。单铰是两个刚片的连接形式, 复铰是三个刚片以上的连接形式。一般来说, n 个刚片的连接相当于 $n-1$ 个单铰的约束。图 2-4a 所示为一个单铰, 图 2-4b 为一个复铰。

4) 多余约束。若一个体系中增加一个约束, 体系的自由度并不改变则称这种约束为多余约束。平面内一个点 A 有两个自由度, 若用两根不共线的链杆将点 A 与基础相连接, 则点 A 减少了两个自由度, A 点即被固定, 如图 2-5a 所示; 若再增加一根与前两根链杆不共线的链杆来固定点 A , 减少的自由度仍为两个, 则增加的一根链杆为多余约束, 如图 2-5b 所示。多余约束对体系的自由度没有影响, 只有非多余约束对体系的自由度有影响。如图 2-5b 中的三根链杆中的任何一根都可以是多余约束, 所以多余约束的答案并不唯一。

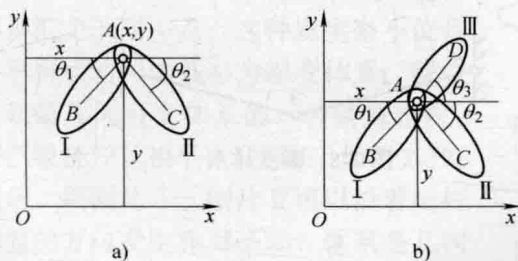


图 2-4 单铰与复铰

a) 单铰约束 b) 复铰约束

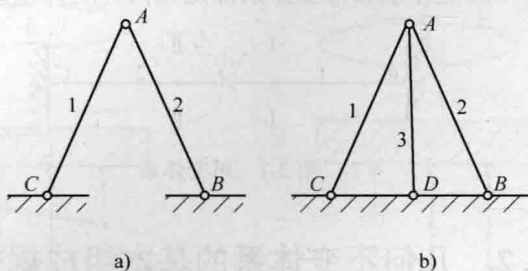


图 2-5 多余约束与必要约束

a) 无多余约束 b) 有一个多余约束

5) 必要约束。除去约束后, 体系的自由度将增加。

在有多余约束的系统中, 要分析清楚什么约束是多余的和什么约束是必要的。

2.1.4 虚铰（瞬铰）

两刚片间以两链杆相连，其两链杆约束相当（等效）于两链杆交点处一简单铰的约束，这个铰称为瞬铰或虚铰，如图 2-6a 所示。

图 2-6a 中，链杆 1 和链杆 2 交于 O 点，刚片 I 可以发生以 O 为中心的微小转动。

图 2-6b 中，链杆 1 和链杆 2 的交点在无穷远处，因此两根链杆所起的作用相当于无穷远处的瞬铰所起的约束作用，绕瞬铰的转动转化为沿两根链杆的正交方向上的平动。在图 2-6a、b 各体系的相对运动过程中，瞬铰位置不断变化。

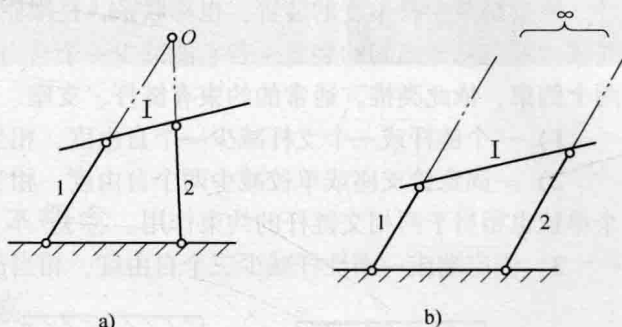


图 2-6 瞬铰与虚铰

a) 相交于 O 点 b) 相交于无穷远

在几何构造分析中应用无穷远处瞬铰的概念时，可以采用射影几何中关于 ∞ 点和 ∞ 线的下列四点结论：

- 1) 每个方向有一个 ∞ 点（即该方向各平行线的交点）。
- 2) 不同方向上有不同的 ∞ 点。
- 3) 各 ∞ 点都在同一直线上，此直线称为 ∞ 线。
- 4) 各有限远点都不在 ∞ 线上。

2.1.5 瞬变体系

1) 当链杆 1 和链杆 2 共线时，圆弧 I 和圆弧 II 在 A 点相切，如图 2-7 所示，因此 A 点可沿公切线方向做微小运动，体系是可变体系。

2) 当 A 点沿公切线发生微小位移后，链杆 1 和链杆 2 不再共线，如图 2-8 所示，因此体系不再是可变体系。本来是几何可变，经微小位移后成为几何不变的体系称为瞬变体系。可以发生大位移的几何可变体系称为常变体系。

瞬变体系和常变体系都是几何可变体系。

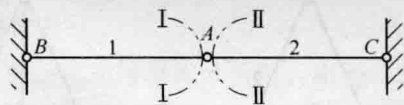


图 2-7 可变体系

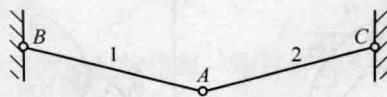


图 2-8 瞬变体系

2.2 几何不变体系的基本组成规律

2.2.1 二元体规则

在图 2-9 中，由两根不共线的链杆 AB 和 AC 连接成一个新结点 A 的装置称为二元体。由一个结点的自由度等于 2，用两根不共线的链杆相连，其约束数也等于 2，所以增加一个