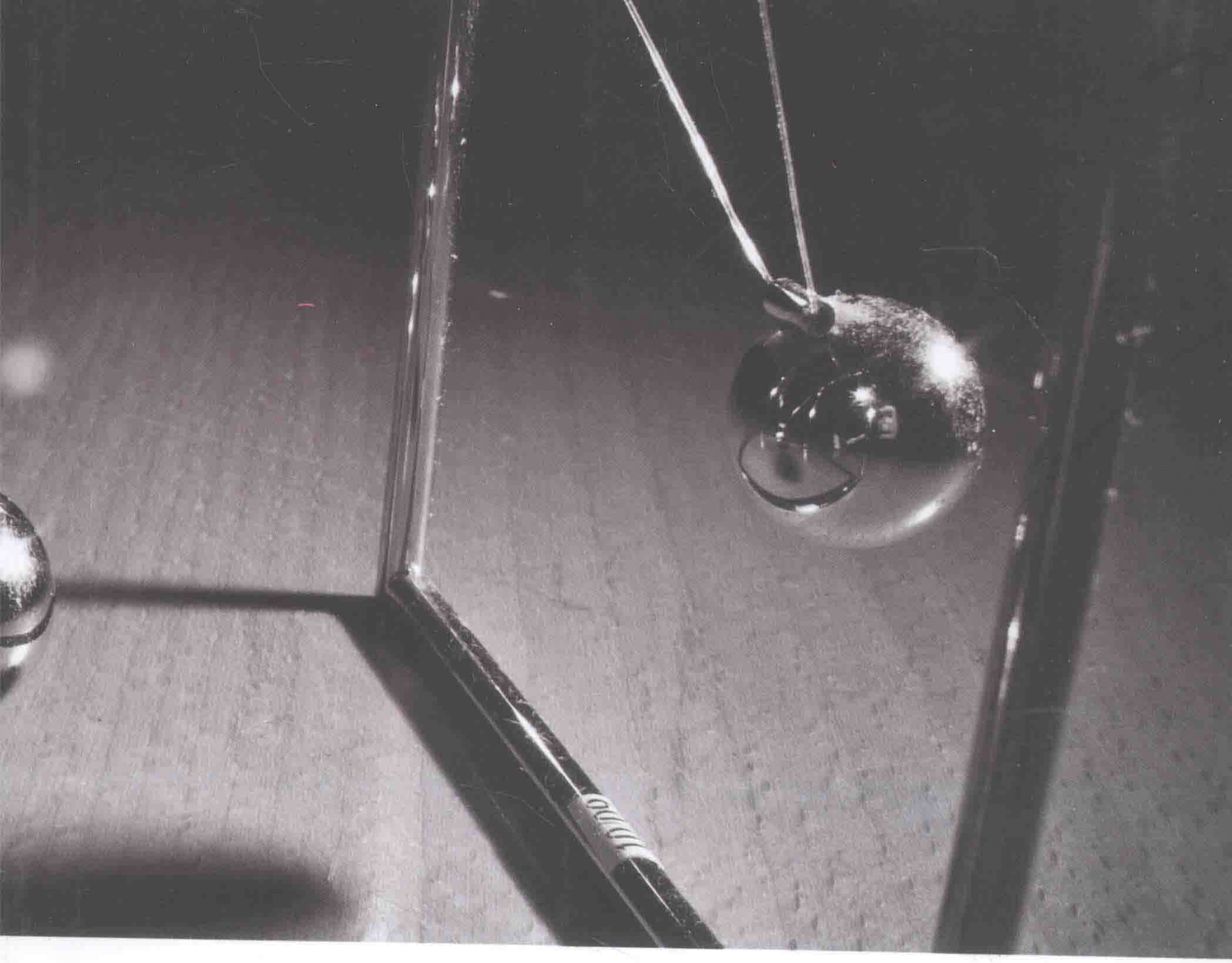

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

University Physics
大学物理学

（第5版）上册

主编 王少杰 顾牡 王祖源

高等教育出版社

第1篇　力　　学

自然界中一切物质都处在永恒不息的运动（motion）中，这种运动的普遍性和永恒性又称为运动的绝对性．而运动形式又是多种多样、千变万化的．其中最简单、最普遍而又最基本的一种运动形式是一个物体在空间相对另一物体的位置（或者一物体的某一部分相对于其他部分的位置）随时间而变化的运动，这种运动称为机械运动（mechanical motion）．例如，行星绕太阳的运转、列车的奔驰、货物的升降、大气和河水的流动……都是机械运动．力学（mechanics）就是研究机械运动规律及其应用的科学．

力学的历史悠久，是人类最早建立的学科之一．力学发展成为一门系统的独立学科始于17世纪末期．牛顿（Isaac Newton，1643—1727）在分析、总结前人实验和理论的基础上，提出了力学的三条基本定律，奠定了经典力学（classical mechanics）的基础．这部分内容又称牛顿力学（Newtonian mechanics）．以后力学得到了迅速的发展，在理论上形成了完整的体系．19世纪末期以来，随着科学技术的发展，产生了研究物体高速运动规律的相对论力学（relativistic mechanics）和研究微观客体运动规律的量子力学（quantum mechanics），使牛顿力学得以进一步的扩展和修正．尽管物理学的近代发展揭示了经典力学只在宏观低速领域内适用，然而，由于一方面在相当广阔的尺度和速率范围内经典力学仍具有较大的实用价值，另一方面在包括高速和微观领域在内的整个物理学中，经典力学的一些重要概念和定律，如动量、角动量、能量及其守恒定律也同样适用．于是，经典力学不仅没有失去其原有的光辉和存在的价值，而且仍然保持着作为整个物理学基础的重要地位．从而，在自然科学和工程技术的广阔领域内，经典力学仍然能够较精确地解决广泛的理论和实际问题．

本篇研究的问题包括经典力学（含刚体力学基础和流体力学简介）和狭义相对论．为研究方便起见，常把经典力学分为运动学和动力学．前者只描述物体在运动过程中，其位置随时间变化的规律；后者则从自然界的三个守恒定律，即动量守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律出发，研究物体的运动与物体间相互作用的内在联系和规律．本篇强调物理思想和物理图像的清晰性，广泛采用矢量、微积分等高等数学知识较准确地表达经典力学中的一些物理量和规律，这将有助于读者在中学物理基础上进一步加深对这些物理量和规律的理解和应用．

第 1 章
质点运动学

质点运动学（particle kinematics）的任务是描述作机械运动的物体在空间（space）的位置随时间（time）变化的关系，而不涉及引起运动和改变运动的原因.

本章首先阐明描述物质（matter）运动的测量标准及方法，并定义描述质点运动的物理量（quantity of physics），如位置矢量（position vector）、位移（displacement）、速度（velocity）和加速度（acceleration）等，进而讨论这些量随时间变化的关系. 然后讨论曲线运动（curvilinear motion）中的法向加速度（normal acceleration）和切向加速度（tangential acceleration）以及圆周运动（circular motion）的角量描述. 最后将介绍相对运动（relative motion）以及相对运动中的速度叠加原理.

位置、速度和加速度是运动学中的重要物理量，它们都具有相对性、瞬时性和矢量性，因而也反映了物体运动的基本特性. 只有掌握了这些特性，才能正确理解这些物理量的意义.

§1.1 运动 时空 测量

1.1.1 物质与运动

物理学（physics）是研究物质的基本结构、基本相互作用和基本运动规律的科学. 从古希腊时代的自然哲学到现代物理学，在不懈地追求和探索中，人们对物质世界形成了一个总体图像：物质是由基本粒子（basic particle）组成的；物质以实物（material object）和场（field）两种基本形式存在；物质在永不停息地运动着.

近代物理学观点认为：物质就是客观存在，是能量的表达. 运动是物质的固有属性，它是由能量的涨落引起的. 真空（vacuum）是一切场的基态，实物与场都是真空的激发态. 实物与场的主要区别在于，实物的能量密度远大于场的能量密度. 场的激发状态表现为出现相应的粒子. 粒子以一定的方式聚焦起来就构成实物，从这个意义上讲，在物质存在的两种基本形式中，场是更基本的. 每一种场对应于一种粒子，对应于不同粒子的各种场相互重叠地充满整个空间.

1.1.2 测量的标准

物理学是以测量为基础的. 我们可以从学习测量物理量的方法中认识物理学.

这些物理量包括长度（length）、时间、质量（mass）等.

将每个物理量自身单位与一标准（standard）相比较便可度量该物理量，其中单位（unit）是给该测量量指定的一个特定名称，如秒（s）是指定给时间这个物理量的；而标准则是相应于该量的一个精确单位. 我们可以用任何一种方法来定义物理量的单位和其标准，重要的是要用国际上认可而又实用的方法来定义它.

基本标准必须是易于获得和不变的. 以长度为例，若以人伸开手臂两食指间的距离作为标准极易获得，却因人而异. 而以光在真空中极短瞬间传播的距离作为长度的标准，易于获得且精确不变. 确定了长度的标准，就相当于规定了对任何长度测量都适用的一套方法. 利用该方法，不论是氢原子的半径，还是溜冰板的轴距，甚至是星际间的距离，均可用这个标准表示. 常近似用作长度标准的直尺，就提供给我们一种测量长度的方法. 不过，有时也很难与标准作直接比较，如我们无法用直尺来测量原子的半径或到一颗星球的距离.

1.1.3 国际单位制与量纲

每一个物理量都要有一个基准单位（datum unit），而表示物理规律的公式均与几个物理量相联系，显然各物理量选取的基准单位是不能各自独立和随意的. 在众多的物理量之间要一一确定合适的基准单位，必须要有一个简明易行的法则. 1960 年，第 11 届国际计量大会通过了国际单位制，缩写为 SI（源于法文 Le Systeme International de' Unites）. 选取 7 个物理量：长度（L）、时间（T）、质量（M）、电流（electric current）（I）、热力学温度（thermodynamic temperature）（Ⓗ）、物质的量（amount of substance）（N）、发光强度（luminous intensity）（J）作为基本量，这 7 个基本量的基准单位相应为：米（m）、千克（kilogram）（kg）、秒（second）（s）、安［培］（ampere）（A）、开［尔文］（kelvin）（K）、摩［尔］（mole）（mol）、坎［德拉］（candela）（cd），将它们称为基本量（base quantity）. 其他众多物理量都可以由这几个基本量来定义，称为导出量（derived quantity），与之相应的单位称导出单位（derived unit）.

量纲（dimension）是指某一物理量借助有关的定义或定律用基本量表示时，表达式中各基本量的乘方之积，而基本量的量纲就是它自身. 如在力学中长度（L），质量（M），时间（T）是基本量，其量纲分别用 L、M、T 表示，力的量纲可以用 MLT^{-2} 表示，这里的 M、L、T 的指数，即 1、1、−2 称为量纲指数. 所有量纲指数都等于零的量称为量纲为一的量（以前称为无量纲量），这类量的单位都是一，符号为 1，在表示量值时，它们一般并不明确写出，例如折射率 $n=1.53\times1=1.53$. 一个物理方程、定理或公式，等号两边各项量纲必定相同. 所以，可以通过量纲分析检查方程正确与否，甚至通过量纲的分析寻找某些复杂的物理规律.

1.1.4 时间与空间

时间和空间是客观存在的. 时间反映物质运动过程的持续性和顺序性；空间反映了物质存在的广延性. 时间和空间是运动着的物质存在形式. 没有脱离物质的时间和空间，也没有不在空间和时间中运动的物质. 时间和空间彼此不是独立的，物质的运动是时间和空间联系的纽带.

物理学所描述的现象都离不开时间和空间. 物理学史上重大思想和观念的变革无不与人们的时间和空间观念演变密切相关.

时间和空间量度的标准是怎样定义的?

时间和空间是可量度（measurable）的. 时间的计量有赖于周期性现象. 1967年，第13届国际计量大会定义：秒为铯-133（^{133}Cs）原子基态（atomic ground state）的两个超精细能级（hyperfine energy level）之间跃迁（transition）所对应的辐射（radiation）的9 192 631 770个周期（period）的持续时间.

空间量度最基本的是长度计量（由此可确定面积、体积的计量）. 1960年，第11届国际计量大会定义：米（meter）为氪-86（^{86}Kr）原子的$2p_{10}$和$5d_5$能级之间跃迁辐射（橙黄色光）在真空中波长（wavelength）的1 650 763.73倍.

时间和空间的标准，历史上经过多次演变最后都采用了原子标准，这是由于原子标准的不变性和复现性所决定的.

由于光在真空中传播速度的大小是一个常量，1973年发布的光速最佳值是$(2.997\,924\,58\times10^8+400)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，1983年，第17届国际计量大会定义：米为光在真空中（1/299 792 458）s时间间隔内所经路径的长度.

1.1.5 参考系和坐标系

1. 参考系

运动是绝对的，但不同运动状态的观察者对其描述却是不同的. 例如，在行进中的车厢里的观察者与站在地面的观察者对路边漂浮风筝的描述一定不相同. 因此，对物体的观测和描述必须选择另一些物体作为参考，这被选作参考的物体称为参考系（reference frame）. 在后续章节中我们在物理定律里用到的一些物理量，必须是对同一参考系的. 所以处理问题一定要明确为描述各物体运动所选择的参考系，而各物理量必须经过变换统一到同一参考系才能求解有关问题.

2. 坐标系

为了对物体的位置和运动状态作定量描述，则要在参考系中建立合适的坐标系（coordinates system）. 常用的有笛卡儿（直角）坐标系（Cartesian（rectangular）coordinates system）、自然坐标系（natural coordinates system），也可选极坐标系（polar coordinates system）、球坐标系（spherical coordinates system）、柱坐标系（cylindrical coordinates system）等. 由于坐标系与参考系相关，一旦选定了坐标系，也表示参考系被选定. 选择何种坐标系及坐标系设置的原则是使问题的分析和计算更加简明方便.

§1.2　质点运动的描述

1.2.1　质点

在物理学中，为了突出研究对象的主要性质，暂不考虑一些次要因素，常引入一些理想化的模型来替代实际的物体."质点"就是力学中的一个理想化模型.

在机械运动中，物体上的各部分具有相同的运动规律，或物体的大小、形状对所研究的问题影响不大，可以忽略，这时可用一个集中质量的几何点——质点（mass point，particle）来替代该物体，质点具有相对意义，如讨论地球绕太阳公转时，地球上各点相对于太阳的运动可认为近似相同，地球可以被看做质点（图 1-1）；讨论地球自转时显然就不可以把地球看做质点了.

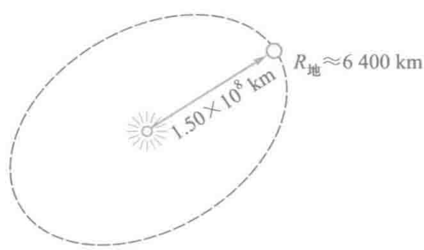

图 1-1　地球绕太阳运动

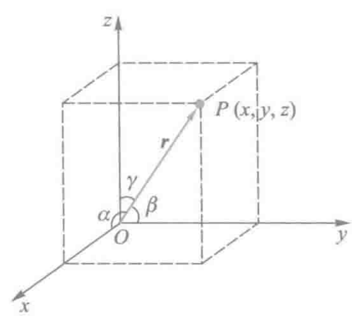

图 1-2　位置矢量

1.2.2　位置矢量与运动方程

为了方便、有效、准确地反映质点的运动状态，在某确定的参考系上，如图 1-2 所示，选择一固定点 O 作为原点，用一个矢量由原点 O 指向质点某时刻在空间的位置 P，该矢量$\overrightarrow{OP}$称为位置矢量，简称位矢（又称径矢），用 $\boldsymbol{r}$ 表示，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$. 质点运动时，其位置不断变化，可见位矢是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1-1}$$

式（1-1）描述了质点空间位置随时间的变化规律，称为质点的运动方程（equation of motion）.

为定量表示 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向，在直角坐标系里设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为 x，y，z 轴上的单位矢量，则质点 $P(x,\ y,\ z)$ 的位矢可用三个相互正交的分量表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1-2}$$

或

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \tag{1-3}$$

于是，质点 P 到原点 O 的距离，即位矢的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \tag{1-4}$$

P 相对于 O 的方位（称位矢的方向）由 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦决定

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r}. \tag{1-5}$$

质点运动的空间轨迹（径迹）（track）称为轨道（orbit）. 由运动方程的分量式（1-3）消去参数 t，便可得到轨道方程（equation of orbit）. 质点运动的轨迹若为直线则称为直线运动，若为曲线则称为曲线运动.

运动方程与轨道方程有何差异?

1.2.3　位移与路程

如图 1-3 所示，设质点 P 沿曲线运动，t 时刻质点位于 A 处，位矢为 $\boldsymbol{r}_A$，经过 Δt 时间间隔质点位于 B 处，位矢为 $\boldsymbol{r}_B$. 在 Δt 时间间隔内位矢的增量称为位移矢量（displacement vector），简称位移. 即

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A. \tag{1-6}$$

在图 1-3 所示的直角坐标系里写为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=(x_B\boldsymbol{i}+y_B\boldsymbol{j}+z_B\boldsymbol{k})-(x_A\boldsymbol{i}+y_A\boldsymbol{j}+z_A\boldsymbol{k})\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{1-7}$$

位移的大小：　$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

位移的方向：从 A 指向 B.

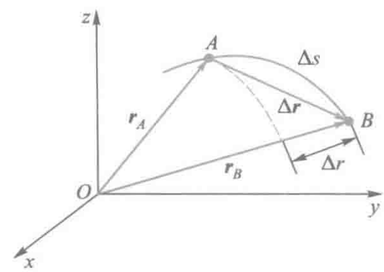

图 1-3　位移与路程

需要注意，$\Delta r=r_B-r_A=\sqrt{x_B^2+y_B^2+z_B^2}-\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$，所以一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$.

路程（path）Δs 是质点在 Δt 时间间隔内运动的路径长度，是个标量（scalar）. 而位移是描述质点位置变动的大小和方向的矢量，它并不反映质点真实的运动路径长度，只反映位置变化的净效果. 一般地，路径 Δs 与位移大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 之间没有确定的关系，只有当 Δt 趋近于零或质点做单向直线运动时，两者才相等，即 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\Delta s=\lim\limits_{\Delta t\to0}|\Delta\boldsymbol{r}|$，也就是 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$.

1.2.4　速度矢量

速度是描述质点运动快慢和方向的物理量. 如图 1-4 所示，质点在 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内位矢的平均变化率称为质点在该时间间隔内的平均速度（mean velocity），常用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{1-8}$$

它的方向与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 相同.

当 $\Delta t\to0$ 时，平均速度的极限称为质点在 t 时刻的瞬时速度（instantaneous velocity），简称速度，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1-9}$$

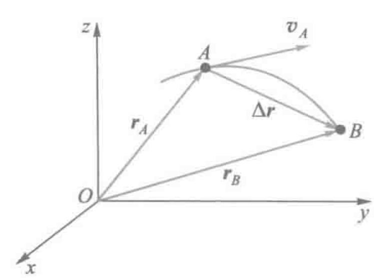

图 1-4　速度矢量

由图 1-4 可见，$\Delta t\to0$ 时，$\boldsymbol{r}_B$ 趋近 $\boldsymbol{r}_A$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向趋近于 A 点的切线方向，

说明 A 点处的速度方向即为运动曲线上 A 点的切线方向，且指向质点前进的一侧.

在国际单位制中，速度的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$（米每秒），量纲为 $\mathrm{M^0LT^{-1}}$.

在直角坐标系中，速度矢量可以表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}. \tag{1-10}$$

瞬时速度的数值大小叫瞬时速率（instantaneous speed），简称速率（speed），即

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}. \tag{1-11}$$

还要注意，平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的大小与平均速率不是一回事. 通常速率是指质点经历路程 Δs 的快慢，而不考虑质点运动的方向.

§1.3　质点运动变化的描述

1.3.1　加速度矢量

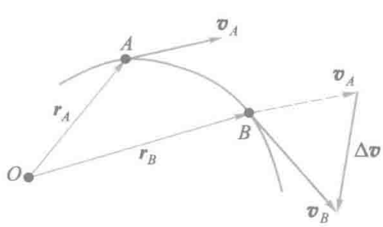

图 1-5　速度的增量

加速度是描述质点速度矢量（大小、方向）变化的快慢程度的物理量. 如图 1-5 所示，t 时刻质点位于 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_A$；$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_B$，则 Δt 时间间隔内速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，$\Delta t$ 时间间隔内的平均加速度（mean acceleration）为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-12}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时得到 t 时刻质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1-13}$$

在直角坐标系中，加速度矢量可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{1-14}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}, \tag{1-15}$$

它的方向是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向，一般与 $\boldsymbol{v}$ 的方向不同.

在国际单位制中，加速度的单位是 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（米每平方秒），量纲为 $\mathrm{M^0LT^{-2}}$.

质点运动状态通常用位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 来描述，所以 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$ 称为质点的运动状态量. 而 $\Delta\boldsymbol{r}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{a}$ 是描述质点运动状态变化的物理量，称为状态变化量.

从位置矢量式（1-2）、位移矢量式（1-7）、速度式（1-10）、加速度式（1-14）可以看出，任一曲线运动都可以看成沿 x，y，z 三个方向上各自独立的

直线运动的叠加；反之，一个复杂的曲线运动也可以分解成几个简单的直线运动来处理，这就是运动叠加原理（superposition principle of motion）或运动独立性原理（independence principle of motion）.

在质点运动学中，所研究的问题大致可归结为以下两种类型：

（1）已知运动方程，求质点的速度和加速度. 这类问题只需按公式

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\text{和 }\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

将已知的位矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 t 求导即可求解.

（2）已知速度函数（或加速度函数）及初始条件（即 $t=0$ 时的初位置、初速度）求质点的运动方程. 这类问题需用积分法（微分法的逆运算）来解决. 下面用具体的实例来说明以上两类问题的求解方法.

例 1-1　已知质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}\ (\text{SI 单位}).$$

（1）描绘质点的运动轨道；

（2）求 $t=4$ s 时质点的速度和加速度.

解　（1）由运动方程可知

$$x=3t+5,$$

$$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4,$$

列表（表 1-1），描出轨道如图 1-6 所示.

表 1-1

t/s	0	1	2	3	4
x/m	5	8	11	14	17
y/m	−4	−0.5	4	9.5	16

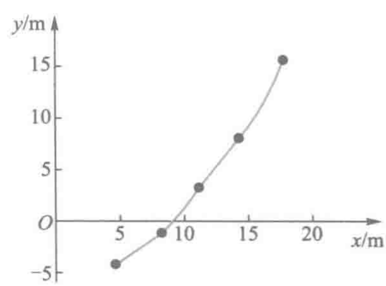

图 1-6　质点的运动轨道

（2）由于 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(t+3)\ (\text{SI 单位}),$$

故

$$\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}\ (\text{SI 单位}).$$

所以，$t=4$ s 时，$v_4=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,\Big|_{t=4}=\sqrt{3^2+7^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=7.6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，

以 θ 表示速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴间的夹角，则

$$\theta=\arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\arctan\left(\frac{7}{3}\right)=66°48',$$

$$a_x=0,\ a_y=1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ a=1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿 y 轴正方向.

例 1-2 质点以加速度 a 在 x 轴上运动，开始时速度为 v_0，处在 $x=x_0$ 的位置，求质点在任意时刻的速度和位置.

解 由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$.

于是，在 0~t 时间内，速度的总增量为

$$v-v_0=\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t,$$

即 t 时刻速度为

$$v=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t. \quad ①$$

同理，由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，得 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$.

于是，得 0~t 时间内的位移

$$x-x_0=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t,$$

即 t 时刻的位置坐标为

$$x=x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t. \quad ②$$

作为特例，设质点作匀加速直线运动，此时 a 为常量，依次对式①、式②求积分，可得

$$v=v_0+at, \quad ③$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2. \quad ④$$

由式③、式④消去 t 可得

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \quad ⑤$$

式③、式④、式⑤便是读者早就熟悉的匀变速直线运动公式.

从上例中还可以看出，质点在任意时刻的运动状态（位置和速度）都和它开始计时（$t=0$）的初始运动状态（初位置、初速度）有关. 另外，对于质点的任一复杂的曲线运动，根据运动叠加原理都可以分解成沿 x，y，z 三个方向各自独立的直线运动. 这样，例 1-2 中所描述直线运动的式①和式②，便适用于任一坐标方向的独立分运动. 只不过公式中的坐标有所不同，速度和加速度函数有所不同而已.

例 1-3 一人在阳台上以仰角 $\theta=30°$ 和速度 $v_0=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 向阳台前地面投出一小球. 球离手时距离地面的高度为 $h=10\ \mathrm{m}$，试问球投出后何时着地？在何处着地？着地时速度的大小和方向各如何？

解 以投出点为原点，建立坐标轴 Oxy（图1-7），则有

$$v_{0x}=v_0\cos\theta,$$

$$v_{0y}=v_0\sin\theta.$$

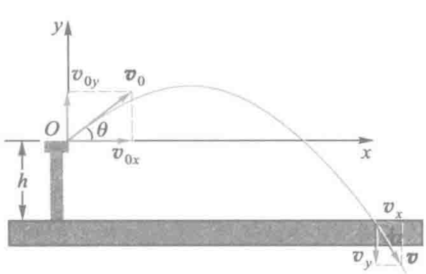

图 1-7 抛体运动

小球的加速度在水平和竖直方向上的分量分别为

$$a_x=0,\ a_y=-g.$$

若忽略空气阻力等影响，则小球在水平方向作匀速直线运动，以竖直方向作匀变速直线运动. 以小球抛出时为 $t=0$，则可得

$$x=v_0\cos\theta\cdot t, \quad ①$$

$$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2. \quad ②$$

取着地点纵坐标 $y=-h$，代入式②得

$$-10=20\times\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\times9.8t^2,$$

解得 $t=2.78$ s（舍去 $t=-0.74$ s），即球出手后 2.78 s 着地.

根据式①可求得着地点与投射点的水平距离为

$$x=v_0\cos\theta\cdot t=20\cos 30^\circ\times2.78\ \mathrm{m}=48.2\ \mathrm{m},$$

着地时小球的速度分量为

$$v_x=v_0\cos\theta=20\cos 30^\circ\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=17.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_y=v_0\sin\theta-gt=(20\sin 30^\circ-9.8\times2.78)\mathrm{m\cdot s^{-1}}=-17.2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

着地时速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{17.3^2+17.2^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=24.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

速度与 x 轴夹角

$$\alpha=\arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\arctan\left(\frac{-17.2}{17.3}\right)\approx-44.8^\circ.$$

若 $\theta=90^\circ$，则小球作竖直上抛运动. 任意时刻小球的速度和位置分别是

$$v_y=v_0-gt,$$

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2.$$

这也是大家所熟悉的公式. 应该明确指出，v_y 和 y 的值都是代数值，可正可负. $v_y>0$ 表示该时刻小球沿 y 轴正向运动；$v_y<0$ 表示该时刻小球沿 y 轴负向运动. $y>0$ 表示小球在该时刻的位置处在 y 轴正轴上；$y<0$ 表示小球在该时刻位置已回落到 y 轴负轴.

1.3.2　自然坐标系中的速度和加速度

在质点的平面曲线运动中，当已知运动轨道时，常用自然坐标系表述质点的位置、路程、速度和加速度.

在图 1-8 所示轨迹曲线上取一点 O 为自然坐标原点，以质点与 O 点间轨道长度 s 来确定质点的位置，称 s 为质点的自然坐标. 质点运动时的自然坐标为

$$s=s(t).\tag{1-16}$$

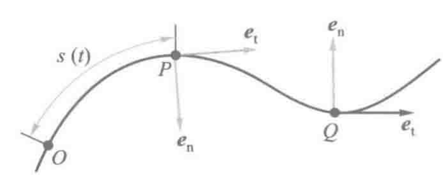

图 1-8　自然坐标系

设 t 时刻质点处于 P 点，在质点上作相互垂直的两个坐标轴，其单位矢量为 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{e}_t$ 沿轨道切向并指向质点前进方向，$\boldsymbol{e}_n$ 沿轨道法向并指向轨道凹侧. 由于切向和法向坐标轴随质点沿轨道的运动自然变换位置和方向，通常称这种坐标系为自然坐标系. 显然，自然坐标系并不起参考系的作用.

当质点经 Δt 时间从 P 点运动到 Q 点时，Δt 时间内质点经过的路程为

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t).\tag{1-17}$$

我们将质点在 t 时刻沿轨道运动的快慢定义为瞬时速率，即

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.\tag{1-18}$$

考虑到 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=|\boldsymbol{v}|$，则在自然坐标中，质点的速度可表

示为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}e_t=ve_t \tag{1-19}$$

由加速度的定义，有

$$a=\frac{\mathrm{d}(ve_t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t+v\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}, \tag{1-20}$$

其中，第一项$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t$为质点速率的变化率，表示速度大小的变化，而方向沿切向，称之为切向加速度 a_t，即

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}e_t. \tag{1-21}$$

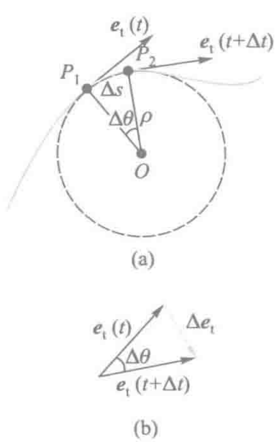

图 1-9 自然坐标系中的方向增量

下面借助几何方法来分析$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}$的意义. 如图 1-9（a）所示，当时间间隔 Δt 足够小时，路程 Δs 可以看成半径为 ρ 的一段圆弧. 设 t 时刻质点在 P_1 处，切向单位矢量为 $e_t(t)$，$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 P_2，切向单位矢量为 $e_t(t+\Delta t)$，$\Delta e_t=e_t(t+\Delta t)-e_t(t)$，当 $\Delta t\to0$，P_2 趋近于 P_1，由图 1-9（b）中可见 $|\Delta e_t|=|e_t|\Delta\theta$，因为 $|e_t|=1$，所以 $|\Delta e_t|=\Delta\theta$；又因为 $\Delta t\to0$ 时，$\Delta\theta$ 越来越小，Δe_t 的方向趋近于垂直 $e_t(t)$ 的方向，即 e_n 方向. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta e_t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}e_n.$$

由图 1-9(a) 可知，$\Delta\theta=\frac{\Delta s}{\rho}$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\rho\Delta t}e_n=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}e_n=\frac{v}{\rho}e_n,$$

则式（1-20）右边第二项 $v\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{\rho}e_n$，它的方向沿 e_n 而与第一项切向加速度 e_t 相垂直，称为法向加速度（normal acceleration），记为 a_n，则

$$a_n=v\frac{\mathrm{d}e_t}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{\rho}e_n, \tag{1-22}$$

式中 ρ 称为曲线在 P_1 处的曲率半径（radius of curvature），通常是变化的. 所以，自然坐标系中的加速度

$$a=a_t+a_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_t+\frac{v^2}{\rho}e_n, \tag{1-23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{加速度大小 } a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{\rho}\right)^2},\\ \text{加速度方向与切线方向夹角 } \alpha=\arctan\dfrac{a_n}{a_t}\end{array}\right\} \tag{1-24}$$

可见，a_t 反映速度大小的变化，a_n 反映速度方向的变化.

由切向加速度和法向角速度的物理意义，我们还可以得到

$$\boldsymbol{a}_n\begin{cases}\text{恒等于零，} & \text{质点作直线运动，}\\ \text{不恒等于零，} & \text{质点作曲线运动；}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_t\begin{cases}\text{恒等于零，} & \text{质点作匀速率运动，}\\ \text{不恒等于零，} & \text{质点作变速率运动；}\end{cases}$$

所以，直线运动和匀速率曲线运动都是一般平面曲线运动的特例.

1.3.3　圆周运动的角量描述

研究圆周运动有着重要的意义：因为一般质点曲线运动的轨道都可以看成是由曲率中心不断变化和曲率半径也不断变化的小段圆弧所连接成的；而且圆周运动也是研究刚体转动的基础.

通常，我们把自然坐标系中质点的位置 s、路径 Δs、速率 v、加速度 a_t 和 a_n 叫做质点运动的线量（linear quantity），而把极坐标中对应的物理量——角位置（angular position）θ、角位移（angular displacement）$\Delta\theta$、角速度（angular velocity）ω 和角加速度（angular acceleration）α 称为描述质点运动的角量（angular quantity）. 质点作圆周运动时，除了用线量描述外，还常用角量来描述.

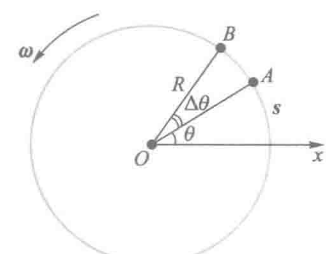

图 1-10　角位置和角位移

质点在平面 Oxy 内以半径 R 绕原点 O 作圆周运动（图 1-10），质点的位矢与 x 轴正向的夹角 θ 称角位置. 经过 Δt 时间间隔，位矢转过角度 $\Delta\theta$，称之为质点在 Δt 时间内对 Ox 轴的角位移，并规定逆时针绕行为正值，顺时针绕行为负值.

与前述速度通常称线速度（linear velocity）、线加速度（linear acceleration）的定义相仿有

$$\text{角速度}\quad \omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{1-25}$$

$$\text{角加速度}\quad \alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1-26}$$

在 SI 制中，角速度单位为弧度每秒（$\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$），角加速度单位为弧度每平方秒（$\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$）.

由图 1-10 可知角量和线量的关系为

$$\begin{cases} v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{R\Delta\theta}{\Delta t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega,\\ a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha,\\ a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{R^2\omega^2}{R}=R\omega^2. \end{cases} \tag{1-27}$$

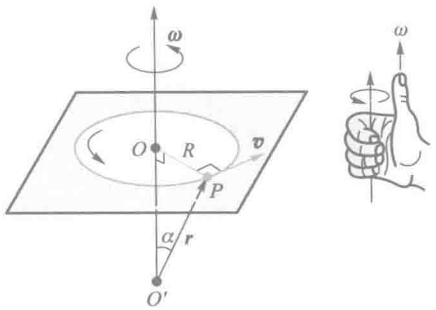

图 1-11　角速度的方向

一般地，角位移不满足矢量加法的交换律，但无限小的角位移是遵守矢量运算法则的，可以视为矢量，因而瞬时角速度和瞬时角加速度也可以看作矢量，记为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$. 角速度的方向由质点 P 实际运动方向按右手螺旋定则确定. 如图 1-11 所示，右手四指弯曲方向与质点实际运动方向一致，伸直的大拇指的指向为角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向. 当 $\boldsymbol{\omega}$ 数值增大时，角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 同向；反之，当 $\boldsymbol{\omega}$ 数值减少时，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 反向.

角量与线量的关系用矢量一般表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{1-28}$$

参考点 O'可为 $\boldsymbol{\omega}$ 所在直线上的任意一点（图 1-11）. 由矢积的定义可知，$\boldsymbol{v}$ 的方向沿圆周的切向，$\boldsymbol{v}$ 的大小 $v=\omega r\sin\alpha=\omega R$，与式（1-27）一致.

对式（1-28）求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}. \tag{1-29}$$

上式第一项即为切向加速度，第二项为法向加速度.

例 1-4　汽车以 $v_0=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$的匀速率在广场上沿半径为 $R=250$ m 的环形马路上行驶. 当汽车油门关闭以后，由于与地面的摩擦作用，汽车沿马路匀减速滑行 50 m 而停止. 试求

（1）汽车在关闭油门前运动的加速度；

（2）汽车在关闭油门后 4 s 时运动的加速度.

解　（1）如图 1-12 所示，汽车关闭油门前是作匀速率圆周运动，$a_t=0$，

$$a_n=\frac{v_0^2}{R}=\frac{5^2}{250}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

则 $a=a_n=0.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，方向指向环心 O.

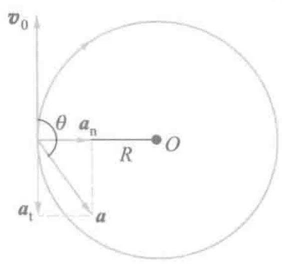

图 1-12　汽车的匀速圆周运动

（2）汽车关闭油门后滑行 50 m 而停止. 汽车的切向加速度 a_t 为

$$a_t=\frac{v^2-v_0^2}{2s}=\frac{0-5^2}{2\times50}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=-0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

油门关闭 4 s 时，汽车的速率为

$$v_4=v_0+a_tt=5+(-0.25)\times4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

此时，法向加速度 a_n 为

$$a_n=\frac{v_4^2}{R}=\frac{4^2}{250}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.064\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{0.25^2+0.064^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.258\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 与速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\arctan\frac{0.064}{-0.25}\approx165°38'.$$

例 1-5　一飞轮以速率 $n=1\ 500\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$（转/分）转动. 当受到制动而均匀地减速，并经

$t=50$ s 后静止.

（1）求角加速度 α 和从制动开始到静止飞轮转过的转数 N；

（2）求开始制动后 $t=25$ s 时飞轮的角速度 ω；

（3）设飞轮的半径 $R=1$ m，求 $t=25$ s 时，飞轮边缘上一点的速度、切向加速度和法向加速度.

解　（1）对比一维匀加速直线运动公式 $v=v_0+at$ 可得匀变速圆周运动基本公式 $\omega=\omega_0+\alpha t$，由此求得

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{0-2\pi\times1\ 500/60}{50}\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}\approx-3.14\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}. \qquad ①$$

将式①代入式（1-25）得 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_0+\alpha t$，进而知角位移与角加速度有关系

$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2. \qquad ②$$

于是，从开始制动到静止时飞轮的角位移 $\Delta\theta$ 及转数 N 分别为

$$\Delta\theta=50\pi\times50+\left(-\frac{1}{2}\pi\times50^2\right)\ \mathrm{rad}=1\ 250\pi\ \mathrm{rad},$$

$$N=\frac{1\ 250\pi}{2\pi}=625\ 转.$$

（2）$t=25$ s 时，飞轮的角速度为

$$\omega=2\pi\times\frac{1\ 500}{60}-\pi\times25\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=25\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

（3）$t=25$ s 时，飞轮边缘上一点的速度为

$$v=\omega R=25\pi\times1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=25\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

相应的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 分别为

$$a_t=\alpha R=-\pi\times1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=-3.14\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_n=\omega^2R=(25\pi)^2\times1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=6.16\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

§1.4　相对运动

§1.1 已经指出，运动总是相对于某个参考系来描述的. 所以，描述运动的基本物理量均与参考系的选择有关，因而都具有相对性. 在同一参考系中质点的位置矢量与选用的坐标系相关，坐标系不同，位置矢量也不同. 但质点的位移矢量是位置矢量间的相对变化，与坐标系的选择无关，因而速度的表示也与坐标系的选择无关. 但是，当两个参考系之间有相对运动时，它们对同一质点的运动描述是不同的，且有着内在的联系. 下面我们讨论在不同参考系中描述同一物体运动的基本物理量间的关系.

设两参考系 S 和 S′之间存在相对平移（无相对转动），S′相对于 S 沿 x 轴以速度 $\boldsymbol{u}$ 平移. 在两参考系里分别建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 和 $O'x'y'z'$，且使 x，x'轴方向与 $\boldsymbol{u}$ 方向一致（图 1-13 只画出 x，y 坐标的情况示意）.

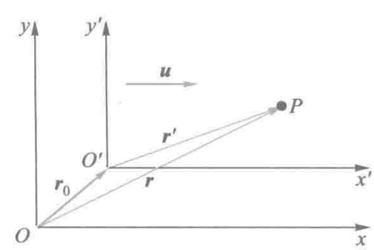

图 1-13　质点相对不同参考系的运动

质点 P 在 S 系中的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，在 S′系中的位置矢量为

$\boldsymbol{r}'$，S′系原点 O' 对 S 系原点 O 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$. 从 S 系看，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 有关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0, \tag{1-30}$$

对式（1-30）两边求增量，可以得到两个参考系中描述的质点位移的矢量关系

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}'+\Delta\boldsymbol{r}_0, \tag{1-31}$$

式（1-30）对时间求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}.$$

其中，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 是质点相对 S 系的速度 $\boldsymbol{v}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}$ 是质点相对 S′系的速度 $\boldsymbol{v}'$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}$ 是 S′系相对 S 系的速度 $\boldsymbol{u}$，所以可写成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}. \tag{1-32}$$

这就是伽利略的速度变换关系. 再将上式对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}.$$

显然，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 是质点对 S 系的加速度 $\boldsymbol{a}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}$ 是质点对 S′系的加速度 $\boldsymbol{a}'$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 是 S′系相对 S 系的加速度 $\boldsymbol{a}_0$，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_0. \tag{1-33}$$

当 S′系相对 S 系作匀速直线运动，$\boldsymbol{a}_0=0$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'. \tag{1-34}$$

式（1-32）—式（1-34）都是物体运动速度远小于光速（velocity of light）时的结论.

处理相对运动的问题常用两种方法：（1）画出相应的速度矢量关系图，由图可以简捷地用三角函数关系求出结果；（2）将速度分解，再由分量计算. 下面通过实例予以说明.

例 1-6　在湖面上以 3.0 m · s^{-1} 的速率向东行驶的 A 船上看到 B 船以 4.0 m · s^{-1} 的速率由北面驶近 A 船.

（1）在湖岸上看，B 船的速度如何？

（2）如果 A 船的速率变为 6.0 m · s^{-1}（方向不变），在 A 船上看，B 船的速度又如何？

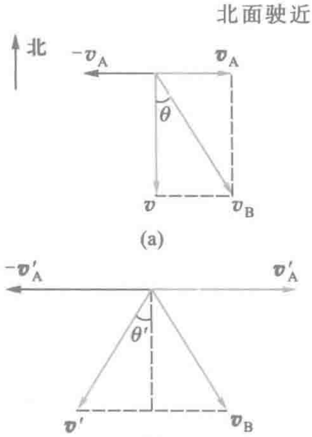

图 1-14　船的运动

解　（1）设岸上的人看到 A 船与 B 船的速度分别是 $\boldsymbol{v}_A$，$\boldsymbol{v}_B$. A 船看到 B 船的速度为 $\boldsymbol{v}$，由式（1-32）有

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_A\rightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A.$$

矢量关系如图 1-14（a）所示.

由图中很容易得出，

$$v_B=\sqrt{v^2+v_A^2}=\sqrt{4.0^2+3.0^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=5.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$\theta=\arctan\frac{v_A}{v}=\arctan\frac{3.0}{4.0}\approx 36°54',$$

即 B 船向南偏东 36°54′方向行进.