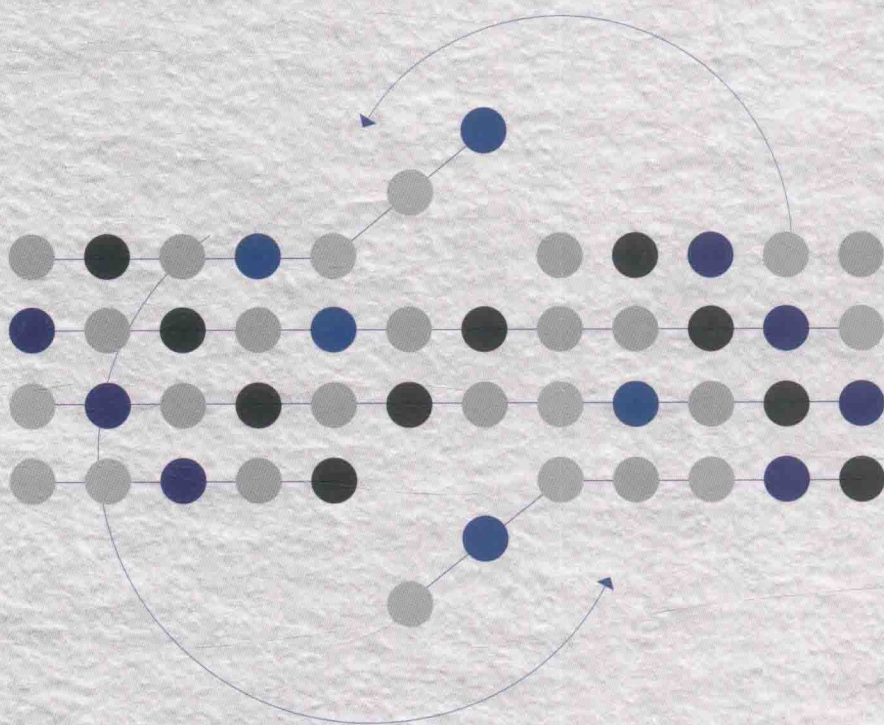




STRUCTURAL PLASTIC
MECHANICS

结构塑性力学

秦荣 著



科学出版社

结构塑性力学

秦 荣 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍结构塑性力学的新理论新方法,重点介绍作者的新成果。本书内容包括基本概念、弹塑性应变增量理论、塑性力学中的新理论新方法、大变形塑性力学、大变形塑性动力学、混凝土非线性力学、弹塑性损伤力学、岩土塑性力学、智能结构塑性力学及其工程应用。本书内容丰富、新颖,富有创造性,对促进固体力学、结构力学、工程力学、计算力学、土木工程等领域的发展具有积极意义。

本书可供固体力学、结构力学、工程力学、计算力学、土木工程等领域的科技人员及高等院校相关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构塑性力学/秦荣著. —北京: 科学出版社, 2016

ISBN 978-7-03-050048-9

I. ①结… II. ①秦… III. ①结构力学②塑性力学 IV. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 232847 号

责任编辑: 童安齐 / 责任校对: 刘玉靖

责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencecp.com>

北京中科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 10 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2016 年 10 月第一次印刷 印张: 19 3/4

字数: 450 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈中科〉)

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

弹塑性问题普遍发生在工程中，它是塑性力学的一个主要问题，与安全及经济有密切关系。因此，结构工程中的弹塑性分析就显得尤为重要。目前，国内外对结构工程中的弹塑性分析，主要利用传统的经典本构关系与有限元法结合起来创立的传统方法。这种方法对结构工程弹塑性分析有很大贡献，但存在下列缺陷：①经典本构关系与屈服曲面、加载曲面及流动法则有关，而屈服曲面及加载曲面在复杂应力状态中是否存在，现在还未得到实验证明；屈服条件及加载条件与实际有一定的差距；流动法则会导致复杂的应力-应变关系；不仅计算复杂，而且难保逼真度。②有限元法是一种网格法，利用它来分析大型复杂结构的弹塑性问题会带来巨大的困难及严重缺陷，甚至得不到正确解。③数值计算量过于庞大，迭代收敛很慢，甚至收敛于错误解。由上述可知，利用流动法则理论及有限元法分析大型复杂结构弹塑性问题有巨大困难及严重缺陷，显然需要另外创立一些经济有效的新理论新方法。现在有许多科学家正在探索塑性力学的新理论新方法。

1986年以来，作者致力于研究塑性力学的新理论新方法及其应用，有一些新发现，取得了一些新成果，创立了结构塑性力学的新理论新方法：①建立了塑性应变向量增量与总应变向量增量及屈服应变向量增量的新关系，创立了金属材料、混凝土、岩土及智能材料的新本构关系，避免了屈服曲面、加载曲面及流动法则，避免了经典本构关系带来的巨大困难及严重缺陷。②利用加权残数法，创立了新的大变形弹塑性变分原理，突破了传统变分原理。③将新的本构关系、新的变分原理及样条离散化结合起来创立了结构弹塑性分析的新方法，避免了弹塑性有限元法带来的巨大困难及严重缺陷，突破了弹塑性有限元法。④利用样条加权残数法，创立了非线性静力分析及非线性动力分析的新算法，比传统的算法优越。利用上述新理论新方法分析大型复杂结构弹塑性问题，计算工作量比有限元法少很多，迭代收敛速度很快，不仅计算简便，而且精度也很高，为结构弹塑性分析开拓了新途径。这些新成果大多数在国内外已公开发表，被引用很多，有些论文被EI（美国）、SCI（美国）、ISTP（美国）及PJK（俄罗斯）收录或引用；有些成果2006年被载入美国出版的《世界名人录》。这些成果获广西自然科学优秀论文成果一等奖1项，省部级科技进步二等奖7项。同行专家鉴定认为，这些成果为国内外首创，达到国际先进水平，有的为世界领先水平。

本书是在上述成果的基础上撰写的，是作者科研成果的科学总结，是一部科研成果专著，内容包括基本概念、新的弹塑性本构关系、新的大变形弹塑性变分原理、结构弹塑性分析的新理论新方法、大变形塑性力学、塑性动力学、混凝土塑性力学、岩土塑性力学、智能结构塑性力学及其应用。本书的内容丰富、新颖，富有创造性，对促进结构塑性力学的发展及应用有重要

意义。

目前,国内外出版的有关塑性力学方面的书籍,对传统的经典本构关系及有限元法介绍较多,因此,本书不再重复,只适当引用。本书主要介绍结构弹塑性分析的新理论新方法,重点介绍作者所取得的新成果。

本书共 16 章。第一章主要介绍塑性力学的基本概念,简介塑性力学传统的经典理论,指出经典理论的优点、缺陷及塑性力学今后研究的方向及探索新途径。第二章主要介绍弹塑性本构关系,即塑性应变与总应变及温度应变的新关系,粘塑性应变与总应变及温度应变的新关系,以及新的弹塑性本构关系。第三章主要介绍弹塑性变分原理。第四章至第六章主要介绍作者提出的塑性力学新理论新方法。第七章主要介绍大变形塑性力学。第八章及第九章主要介绍塑性动力学。第十章主要介绍混凝土塑性力学。第十一章主要介绍结构塑性损伤力学。第十二章主要介绍岩土塑性力学。第十三章主要介绍结构塑性极限分析的新方法。第十四章主要介绍作者创立的智能结构塑性力学。第十五章主要介绍高层建筑结构弹塑性分析的新方法。第十六章简介大跨度桥梁结构非线性分析的新方法。

20 世纪 80 年代以来,作者在结构弹塑性及结构非线性方面,做过许多项目研究。这些项目分别获得国家自然科学基金、广西自然科学基金及广西科学研究与技术开发基金的资助,现借此机会表示衷心感谢!

20 世纪 80 年代以来,广西大学及相关高等院校的百余名硕士生、博士生参考作者的新理论新方法发表学位论文,编制有关程序,计算大量例题,分析实际工程,有的还做实验及实测,均证实了作者的新理论新方法的正确、可靠,不仅精度高,而且计算简捷。国内外有很多科技人员利用作者的新理论新方法进行相关研究,也都证实了作者的新理论新方法不仅正确、可靠、精度高,而且计算非常简便。作者借此机会表示衷心感谢!

本书获得广西大学及广西大学土木建筑工程学院资助出版,特此表示衷心感谢!

在本书撰写过程中,作者得到许多同行的热情关照及大力支持;黄玉盈教授、陈祥福教授、李秀梅教授、文红老师为本书做了许多有益工作,特此表示衷心感谢!

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请指正。

目 录

第一章 基本概念	1
1.1 材料力学特性	1
1.1.1 屈服极限 σ_s	1
1.1.2 强化现象	2
1.1.3 弹塑性变形	2
1.1.4 后继屈服极限	2
1.1.5 强度极限 σ_b	3
1.1.6 $\sigma-\varepsilon^p$ 曲线与 $\sigma-\varepsilon$ 曲线的关系	3
1.2 应力状态	3
1.2.1 应力张量	3
1.2.2 应力张量不变量	4
1.2.3 应力偏量不变量	5
1.2.4 应力空间	5
1.2.5 八面体正应力及剪应力	6
1.3 应变状态	7
1.3.1 应变张量	7
1.3.2 应变张量不变量	7
1.3.3 应变偏张量不变量	7
1.3.4 八面体正应变及剪应变	8
1.4 基本假设	8
1.5 简化模型	9
1.5.1 理想塑性材料	9
1.5.2 强化材料	9
1.6 塑性力学基本方程	10
1.7 张量记号	11
1.8 传统的经典塑性本构关系	12
1.9 屈服条件	12
1.9.1 初始屈服条件	13
1.9.2 常用的几种屈服条件	13
1.9.3 加载条件	17
1.10 流动法则理论	21
1.10.1 流动法则本构关系	21
1.10.2 弹塑性矩阵 (一)	22
1.10.3 弹塑性矩阵 (二)	26
1.10.4 弹粘塑性模型	29
1.10.5 本构关系	30
参考文献	33

第二章 弹塑性应变理论	34
2.1 弹塑性应变增量理论	34
2.1.1 单向拉伸状态	34
2.1.2 简单加载状态	35
2.1.3 复杂加载状态	39
2.1.4 应力-应变关系	39
2.2 热弹塑性应变增量理论	40
2.2.1 材料性质与温度无关的本构关系	40
2.2.2 材料性质与温度有关的本构关系	41
2.3 弹粘塑性应变增量理论	42
2.3.1 单向应力状态	42
2.3.2 复杂应力状态	43
2.3.3 应力-应变关系	44
2.4 热弹粘塑性应变增量理论	44
2.4.1 材料性质与温度无关	44
2.4.2 材料性质与温度有关	45
2.4.3 统一的本构理论	45
2.5 新的本构关系	45
2.6 结语	46
参考文献	46
第三章 弹塑性变分原理	48
3.1 虚功原理	48
3.1.1 全量虚功原理	48
3.1.2 增量虚功原理	50
3.2 弹塑性变分原理	50
3.2.1 最小势能原理	50
3.2.2 最小余能原理	52
3.2.3 带权参数变分原理	53
3.2.4 本构关系	53
3.3 弹塑性广义变分原理	54
3.3.1 第一种广义变分原理	54
3.3.2 第二种广义变分原理	55
3.3.3 等价定理	56
3.4 大变形弹塑性变分原理	56
3.4.1 基本方程	56
3.4.2 有限变形弹塑性变分原理	57
3.5 大变形弹塑性广义变分原理	58
3.5.1 有限变形弹塑性广义变分原理	58
3.5.2 带权参数变分原理	59
参考文献	59

第四章 塑性力学中的新理论新方法	60
4.1 弹塑性应变增量理论	60
4.1.1 应力-应变曲线	60
4.1.2 简单加载状态	61
4.1.3 复杂加载状态	63
4.1.4 应力-应变关系	64
4.2 变分原理	64
4.3 弹塑性分析的新方法	65
4.3.1 计算原理	65
4.3.2 新算法	68
4.4 计算例题	69
4.5 样条函数	70
4.5.1 B 样条函数构造的方法	70
4.5.2 B 样条函数的性质	71
4.5.3 B 样条函数的数值方法	71
4.6 样条基函数	73
4.6.1 广义参数法	73
4.6.2 混合参数法	73
4.6.3 位移参数法	74
4.7 样条离散化	75
4.7.1 单样条离散化	75
4.7.2 双样条离散化	76
4.7.3 三样条离散化	76
4.7.4 沿弧方向样条离散化	77
4.8 非均匀分划问题	77
4.9 结构分析的新方法	79
4.10 大型复杂结构分析的 QR 法	80
4.10.1 计算原理	80
4.10.2 高层复杂结构体系	83
4.10.3 非节点荷载作用下的梁单元	83
4.11 开洞剪力墙	84
参考文献	85
第五章 弹塑性样条有限点法	87
5.1 基本原理	87
5.2 薄板弹塑性样条有限点法	89
5.2.1 基于弹粘塑性理论的样条有限点法	89
5.2.2 基于弹塑性流动法则理论的样条有限点法	93
5.2.3 基于弹塑性应变理论的样条有限点法	96

5.3	二维问题弹塑性样条有限点法	100
5.4	薄壳弹塑性样条有限点法	107
5.5	计算例题	111
	参考文献	112
第六章	弹塑性 QR 法	113
6.1	基本原理	113
6.2	结构弹塑性分析的 QR 法	116
6.2.1	结构样条离散化	116
6.2.2	建立 $\{V\}_e$ 与 $\{V\}$ 的关系	117
6.2.3	建立单元变分方程	117
6.2.4	样条初应力法的刚度方程	117
6.2.5	样条变刚度法的刚度方程	118
6.2.6	应力公式	118
6.3	结构弹塑性分析的新算法	119
6.3.1	增量初应力迭代法	119
6.3.2	增量变刚度迭代法	120
6.3.3	作者的新算法	121
6.4	计算例题	121
	参考文献	122
第七章	结构大变形弹塑性力学	124
7.1	大变形弹塑性本构关系	124
7.1.1	一般原理	124
7.1.2	大变形弹塑性本构关系	125
7.1.3	本构关系的客观性原理	126
7.1.4	Jauman 应力率	128
7.1.5	证明大变形弹塑性本构关系	129
7.1.6	作者的新成果	129
7.2	大变形弹塑性变分原理	130
7.3	结构大变形弹塑性分析的 QR 法	130
7.3.1	基本理论	130
7.3.2	初应力理论与几何非线性结合的格式	131
7.3.3	变刚度理论与几何非线性结合的格式	133
7.3.4	大型复杂结构双重非线性分析的 QR 法	136
7.3.5	作者的新算法	142
7.4	计算例题	142
7.5	附录	144
7.5.1	结构双重非线性问题	144
7.5.2	大变形弹塑性单元刚度矩阵	145
7.5.3	非线性单元	145

7.5.4 梁的几何非线性分析的新方法	146
参考文献	151
第八章 结构大变形塑性动力学	153
8.1 动力本构关系	153
8.2 瞬时变分原理	153
8.3 建立结构非线性动力分析的新模型	153
8.3.1 结构几何非线性动力问题	154
8.3.2 结构双重非线性动力问题	155
8.3.3 结构材料非线性动力问题	156
8.4 结构非线性动力分析的新算法	157
8.4.1 非线性动力方程	157
8.4.2 第三种样条递推算法	158
8.4.3 几种新算法	162
8.4.4 无条件稳定算法	164
8.5 结构非线性动力特性的新算法	165
8.5.1 建立新模型	165
8.5.2 新算法	165
8.5.3 结构非线性振动周期的算法	166
8.5.4 求自振频率	167
8.5.5 结构的质量矩阵及阻尼矩阵	167
8.6 计算例题	167
参考文献	171
第九章 结构非线性动力稳定性分析的新方法	172
9.1 结构动力稳定性	172
9.2 结构非线性动力稳定性问题的新模型	172
9.3 结构非线性动力稳定性问题的新算法	173
9.3.1 新算法	173
9.3.2 计算步骤	175
9.4 求解结构动力失稳临界荷载的实用方法	176
9.4.1 动力时程分析法	176
9.4.2 静力变换法	176
9.4.3 静力法	177
9.4.4 几点注意	177
9.5 计算例题	178
参考文献	178
第十章 钢筋混凝土结构非线性分析的新方法	179
10.1 混凝土破坏准则	179
10.1.1 单轴受力状态的破坏准则	179

10.1.2	双轴受力状态的破坏准则	179
10.1.3	混凝土破坏准则	181
10.2	混凝土本构关系	183
10.2.1	混凝土单轴应力-应变关系	183
10.2.2	应力增量-应变增量关系	185
10.2.3	等效单轴应力-应变关系	186
10.2.4	弹塑性理论(流动法则理论)	188
10.2.5	弹粘塑性理论	191
10.2.6	弹塑性应变理论	192
10.3	钢筋本构关系	194
10.3.1	分布模式	194
10.3.2	离散模式	195
10.4	钢筋与混凝土的粘结关系	195
10.4.1	τ - s 关系	196
10.4.2	粘结性能的模拟方法	196
10.5	混凝土弹塑性应变理论	199
10.5.1	应力-应变曲线	199
10.5.2	简单加载状态	200
10.5.3	复杂加载状态	202
10.5.4	应力-应变关系	203
10.5.5	混凝土屈服应力	203
10.6	钢筋混凝土结构非线性分析的新方法	204
10.6.1	QR 法	204
10.6.2	曲箱梁桥材料非线性分析的 QR 法	208
10.6.3	曲箱梁桥材料非线性分析的样条子域法	210
10.6.4	曲箱梁桥材料非线性分析的样条有限点法	210
10.6.5	箱拱桥材料非线性分析的 QR 法	210
10.7	非线性方程组解法	210
10.7.1	增量迭代法	210
10.7.2	过渡子域或过渡单元	211
10.7.3	算法	212
10.8	计算例题	212
	参考文献	215
第十一章 结构弹塑性损伤力学		216
11.1	基本概念	216
11.1.1	结构损伤	216
11.1.2	基本方程	216
11.1.3	损伤变量	217
11.1.4	应力-应变关系	218
11.1.5	演化方程	218
11.1.6	应力等效原理	218

11.2 钢材损伤理论	219
11.2.1 弹性各向同性损伤本构关系	219
11.2.2 弹塑性各向同性损伤本构关系	220
11.2.3 各向同性损伤的弹塑性应变理论	222
11.2.4 各向同性损伤的弹粘塑性理论	223
11.2.5 弹性各向异性损伤本构关系	223
11.2.6 弹塑性各向异性损伤本构关系	225
11.2.7 损伤演化模型	227
11.3 混凝土损伤本构关系	229
11.3.1 混凝土弹性各向同性损伤本构关系	229
11.3.2 混凝土弹塑性各向同性本构关系	229
11.3.3 混凝土粘弹塑性各向同性本构关系	231
11.3.4 各向同性损伤的弹塑性应变理论	231
11.3.5 损伤演化方程	233
11.4 损伤变分原理	233
11.4.1 损伤变分原理	233
11.4.2 三类变量损伤广义变分原理	233
11.4.3 二类变量损伤广义变分原理	234
11.5 结构损伤分析的新方法	234
11.5.1 建新模	234
11.5.2 新算法	235
11.6 计算例题	235
参考文献	235
第十二章 岩土塑性力学中的新理论新方法	237
12.1 破坏条件	237
12.2 岩土本构关系	237
12.3 层状地基非线性分析的新理论新方法	237
12.3.1 弹塑性应变理论	238
12.3.2 变分原理	238
12.3.3 总应力-QR 法	238
12.3.4 地基弹塑性问题的算法	240
12.4 岩土弹粘塑性分析的新方法	241
12.4.1 弹粘塑性理论	241
12.4.2 平面层状地基分析的总应力-QR 法	243
12.4.3 时间步长的限制条件	243
12.4.4 岩土弹粘塑性问题的算法	244
12.5 岩土弹塑性分析的新方法	245
12.5.1 位移函数	245
12.5.2 总应力-QR 法	247
12.5.3 岩土弹塑性分析的算法	249

12.6	岩土非线性分析的新理论新方法	250
12.6.1	应力-应变关系	250
12.6.2	总应力分析方法	252
12.7	地下结构非线性分析的新方法	253
12.8	计算例题	253
12.9	有效应力分析方法	255
	参考文献	257
第十三章 结构塑性动力极限分析的新方法		258
13.1	结构动力极限承载能力分析的 QR 法	258
13.1.1	建立新模型	258
13.1.2	选用新算法	259
13.2	动力弹性调整-QR 法	260
13.2.1	计算原理	260
13.2.2	计算步骤	264
13.3	二阶动力弹性调整-QR 法	265
13.3.1	计算原理	265
13.3.2	计算步骤	265
13.4	动力塑性铰模型-QR 法	266
13.4.1	一阶动力塑性铰模型-QR 法	266
13.4.2	二阶动力塑性铰模型-QR 法	266
13.5	静力法	267
13.6	计算例题	267
	参考文献	268
第十四章 智能结构力学		269
14.1	智能线弹性-压电本构关系	269
14.2	弹塑性-压电本构关系	270
14.2.1	弹塑性-压电本构关系	272
14.2.2	热弹塑性-压电本构关系	273
14.2.3	非线性-压电本构关系	276
14.3	形状记忆合金智能本构关系	276
14.4	形状记忆聚合物智能本构关系	277
14.5	智能结构分析的新理论新方法	277
14.6	计算例题	278
	参考文献	279
第十五章 高层建筑结构弹塑性分析的新方法		280
15.1	弹塑性应变理论	280
15.1.1	单向应力状态	280

15.1.2	平面受力状态	281
15.1.3	空间应力状态	282
15.2	弹塑性分析的新方法	282
15.2.1	位移函数	282
15.2.2	基本方程	283
15.2.3	单元弹塑性刚度矩阵	285
15.2.4	迭代算法	286
15.3	平面框架弹塑性分析的 QR 法	288
15.3.1	本构关系	288
15.3.2	变分原理	288
15.3.3	框架弹塑性分析的 QR 法	288
15.4	高层复杂结构材料非线性分析的 QR 法	291
15.5	结构材料非线性分析的新算法	293
15.5.1	增量初应力迭代法	293
15.5.2	增量变刚度迭代法	294
15.5.3	作者的新算法	295
15.6	计算例题	295
	参考文献	296
第十六章 大跨度桥梁结构非线性分析的新方法		298
16.1	新理论新方法	298
16.2	结构非线性动力问题的新模型	298
16.3	计算例题	299
	参考文献	299

第一章 基本概念

结构非线性问题可以分为三类：①材料非线性问题。②几何非线性问题。③双重非线性问题，即既含材料非线性又含几何非线性，有时也称混合非线性问题。本章主要介绍一些与材料非线性问题有关的基本概念，作为本书的阅读基础。

1.1 材料力学特性

在结构工程中，所使用的材料很多，广泛使用的材料有钢材、混凝土、岩土及各种砖石，本章介绍钢材的强度及其变形特性。

1.1.1 屈服极限 σ_s

图 1.1 是一个软钢试件受拉情况的应力-应变曲线。有明显的屈服现象。图 1.2 是一个合金钢试件受拉情况的应力-应变曲线，没有明显的屈服现象。由图 1.1 可知，当试件中的应力 σ 超过弹性极限后便发生屈服现象^[1]，A 点称为屈服点，与此对应的应力称为屈服极限应力 σ_s 。由于比例极限、弹性极限及屈服极限在数值上相差不多，常认为三者都可以用相同的值 σ_s ，可以认为材料在应力 σ 达到屈服极限应力 σ_s 以前是弹性的，而且应力 σ 与应变 ε 成正比，服从胡克定律。由此可知，如果 $\sigma < \sigma_s$ ，则试件是弹性的；如果 $\sigma > \sigma_s$ ，则试件处于塑性状态。

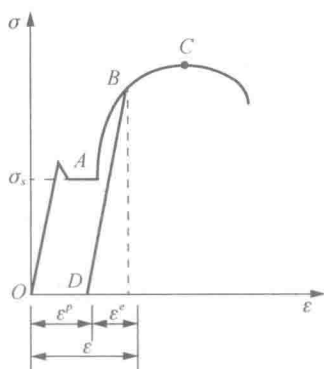


图 1.1 软钢 σ - ε 曲线

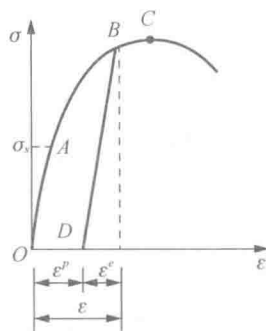


图 1.2 合金钢 σ - ε 曲线

由上述可以得出一个结论：在单向拉伸状态中，材料由初始弹性状态进入塑性状态的界限是屈服极限。这个结论称为单向拉伸状态的屈服条件，也称初始屈服条件，它的表达式为

$$f(\sigma) = \sigma - \sigma_s = 0 \quad (1.1)$$

式中， σ 及 σ_s 分别为应力及屈服极限应力； $f(\sigma)$ 为屈服函数。如果 $\sigma < \sigma_s$ ，则 $f(\sigma) < 0$ ，这时试件处于弹性状态。如果 $\sigma > \sigma_s$ ，则 $f(\sigma) > 0$ ，这时试件进入塑性状态。

1.1.2 强化现象

经过屈服阶段后,材料又恢复抵抗变形的能力,必须增加荷载才能产生变形,这种现象称为材料强化,也称硬化。在强化阶段中,应力-应变曲线上任一点的斜率 E_t 称为切线模量,其值一般低于弹性模量 E ,即

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} < E \quad (1.2)$$

1.1.3 弹塑性变形

在屈服极限之前,如果卸除荷载,则变形可以完全恢复,这是弹性的基本特征,这种变形称为弹性变形。在超过屈服极限以后,如果卸除荷载,则试件仍保留一部分变形,这是塑性的基本特性,这种变形称为塑性变形,它是一种不可逆的永久变形。如果应力到达 B 点相应的应力开始卸载,则应力-应变曲线沿 BD 下降,且 $BD \parallel OA$ 。由图1.1可知,当 $\sigma > \sigma_s$ 时,应变包括两部分,即一部分为弹性应变,另一部分为塑性应变,即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.3)$$

式中, ε^e 及 ε^p 分别为弹性应变及塑性应变。当荷载完全卸载后,应变的弹性部分就会完全恢复。因为应变中的弹性部分为 $\varepsilon^e = \sigma / E$,因此

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma / E \quad (1.4)$$

1.1.4 后继屈服极限

在小变形的情况,如果从 B 点卸载到 D 点后又重新从 D 点开始加载,则应力-应变曲线沿 DBC 上升。这时在 BD 段中的变形处于弹性状态,直到应力超过 B 点对应的应力值以后才会发生新的塑性变形。由此可知,当应力超过屈服极限时,如果卸载后再加载,则可以提高材料的屈服极限。这种新的屈服极限称为后继屈服极限。如果后继屈服极限比初始屈服极限提高,则这种现象称为强化现象。这种强化程度与塑性变形的历史有关,它表示塑性抗力的提高。后继屈服极限与塑性变形的历史有关,因此它可以写成下列形式,即

$$\sigma = H(\varepsilon^p) \quad (1.5)$$

由此可得

$$\Phi(\sigma, k) = \sigma - k = 0 \quad (1.6)$$

式中, k 为记录材料塑性加载历史的参数; Φ 称为加载函数, $k = H(\varepsilon^p)$ 。式(1.6)称为后继屈服条件,也称加载条件。

由上述可知,当 $\sigma > \sigma_s$ 时,加载和卸载的应力-应变关系是不同的,加载时服从弹塑性规律,卸载时服从弹性规律,这是材料在塑性阶段的一个重要特点。因此,需要有一个判断材料是加载还是卸载的准则,这个准则称为加载卸载准则。在单向受拉状态下,这个准则可写成

$$\left. \begin{array}{l} \sigma d\sigma \geq 0 \quad \text{加载过程} \\ \sigma d\sigma < 0 \quad \text{卸载过程} \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

此式对单向压缩状态也适用。如果 $\sigma > 0$, $d\sigma > 0$,则为拉伸加载;如果 $\sigma < 0$, $d\sigma < 0$,则为压缩加载。

当 $\sigma d\sigma > 0$ 时, 应力可以从一个屈服点到达后继的另一个屈服点, 材料从一个塑性状态进入另一个新的塑性状态。在这个过程中, 有新的塑性变形, 应力增量与应变增量有下列关系为

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = E_t (d\varepsilon^e + d\varepsilon^p) \quad (1.8)$$

当 $\sigma d\sigma < 0$ 时, 处于卸载过程。在这个过程中, 材料从塑性状态进入弹性状态, 应力-应变关系服从胡克定律, 即

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (1.9)$$

1.1.5 强度极限 σ_b

后继屈服极限的提高是有限的。图 1.1 及图 1.2 的最高点 C 对应的应力值 σ_b 称为材料的强度极限, 它是材料所能承受的最大应力。如果 $\sigma > \sigma_b$, 则试件破坏。

1.1.6 σ - ε^p 曲线与 σ - ε 曲线的关系

如果对式 (1.5) 两边微分可得

$$d\sigma = H' d\varepsilon^p \quad (1.10)$$

式中, H' 为 σ - ε^p 曲线的斜率, 称为强化系数, 即

$$H' = \frac{dH}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (1.11)$$

由上式可得

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (1.12)$$

式中, E_t 为 σ - ε 曲线的斜率, 称为切线模量, 见式 (1.2)。由上述可知, σ - ε^p 曲线可以由单向拉伸的 σ - ε 曲线确定。

由上述实验现象, 可以看到材料的塑性变形有下列特点:

- (1) 应力-应变关系是非线性的。
- (2) 应力与应变之间不存在单值对应关系。同一个应力可对应于不同的应变, 反过来也是这样。应力的大小不仅与当时的应变大小有关, 而且还与应变的历史有关。
- (3) 由于塑性应变不可恢复, 外力所做的塑性功具有不可逆性或耗散性。

1.2 应力状态

1.2.1 应力张量

由弹性力学可知^[2], 物体中任一点的应力状态可由九个应力分量来描述, 而且这些分量构成一个二阶对称张量, 即

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.13)$$