



||=|||○|||

見下
三次位

戴|||○|||

餘二別求
六內起四

戴|||○|||

見下
三次位

戴|||○|||

見下
三次位

戴|||○|||

八十三歲百

乃戴|||○|||

呂變庭 / 著

杨辉算书及其经济数学思想研究



科学出版社

本书为河北省社会科学基金项目（HB1/LS006）的研究成果之一
教育部人文社会科学重点研究基地建设经费资助
河北大学历史学强势特色学科建设经费资助
河北大学中国史学科“双一流”建设经费资助

杨辉算书及其经济数学思想研究

吕变庭 / 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

杨辉算书包括的《详解九章算法》(1261 年)、《日用算法》(1262 年)、《乘除通变算宝》(1274 年)、《续古摘奇算法》(1275 年)、《田亩比类乘除捷法》(1275 年)是中国古代数学高峰时期的重要标志之一,对元明清数学的发展产生了重要影响。杨辉注重算题的典型性和趣味性,注重选择与生活实际和社会现实联系比较密切的问题,他在“算无定法,惟理是用”的原则指导下,主要围绕着实际问题而进行算法提炼和方法构造,并在此基础上形成了具有中国特色的古代经济数学思想体系。

本书可供历史、数学、科技类等领域的专业人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

杨辉算书及其经济数学思想研究 / 吕变庭著. —北京: 科学出版社, 2017.6
ISBN 978-7-03-053467-5

I. ①杨… II. ①吕… III. ①古典数学-中国-南宋 ②杨辉-数学-思想方法-研究
IV. ①0112 ②01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 136628 号

责任编辑: 陈 亮 杨 静 穆 俊 / 责任校对: 李 影

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 黄华斌

编辑部电话: 010-64011837

E-mail: yangjing@mail.sciencep.com

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2017 年 6 月第一次印刷 印张: 15 1/4

字数: 320 000

定价: 96.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



目录

第一章 绪论	1
第一节 宋朝的社会相貌与杨辉算书	6
第二节 杨辉算书的版本系统及其流传	15
第三节 杨辉算书的主要内容、特点及其历史地位	19
第二章 《详解九章算法》及其科学思想	32
第一节 《详解九章算法》的结构元素与体系	32
第二节 杨辉三角的发现与科学价值	50
第三节 从“增乘开方法”到中算系统的机械化方法	59
第三章 《乘除通变本末》及其科学思想	68
第一节 《乘除通变本末》的结构特点	68
第二节 《乘除通变本末》的科学价值	80
第四章 《田亩比类乘除捷法》及其科学思想	91
第一节 《田亩比类乘除捷法》的结构特点	91
第二节 《田亩比类乘除捷法》的科学价值	102

第五章 《续古摘奇算法》及其科学思想	116
第一节 《续古摘奇算法》的结构特点	116
第二节 《续古摘奇算法》的科学价值	130
第六章 《日用算法》与数学诗括	140
第一节 《日用算法》的主要结构特点	140
第二节 数学诗括与南宋民间数学知识的普及	149
第七章 杨辉的治学态度和科学方法	153
第一节 面向实际和求真务实的治学态度	153
第二节 杨辉的科学研究方法	166
第八章 杨辉算书与南宋社会	178
第一节 杨辉算书与南宋社会的物质文化	178
第二节 杨辉算书与南宋人口	189
第九章 杨辉算书与南宋社会意识	196
第一节 杨辉算书与宋代儒、道的关系	196
第二节 杨辉算书与宋代美学及社会心理	200
第十章 杨辉算书的时代局限与文化启示	210
第一节 杨辉算书与中国传统数学的固有内伤	210
第二节 杨辉算书的文化启示	217
主要参考文献	225

第一章 绪 论

宋代是一个承前启后的变革时代，尽管宋代的疆域被分割为几个部分，如北宋、辽、夏以及南宋、金、夏，先后鼎足而立，各自为政，但这并不影响宋朝在科学技术方面出现空前的繁荣与“大一统”局面。例如，沈括的《梦溪笔谈》可谓海纳百川，就其所含内容的广泛性而言，前及南北朝，后跨辽、夏，像“中国衣冠，自北齐以来，乃全用胡服”^①，“外国之声，前世自别为四夷乐。自唐天宝十三载（754年），始诏法曲与胡部合奏，自此乐奏全失古法。以先王之乐为‘雅乐’，前世新声为‘清乐’，合胡部者为‘宴乐’”^②，又“幽州僧行均，集佛书中字，为切韵训诂，凡十六万字，分四卷，号《龙龕手镜》，燕僧智光为之序，甚有词辩。契丹重熙二年（1033年）集。契丹书禁甚严，传入中国者法皆死。熙宁中有人自虏中得之，入傅钦之家。蒲传正帅浙西，取以镂版。其序末旧云：‘重熙二年五月序。’蒲公削去之。观其字音韵次序，皆有理法，后世殆不以其为燕人也”^③等等，这些记载表明，中国古代科学技术经过隋、唐和五代380年的积累和发展，入宋以后，科学技术的综合已经成为新时期历史发展的必然趋势。仅就《九章算术》而言，自汉代张苍、耿寿昌等编纂《九章算术》以来，历代研究和注释者不绝，并被推为“算经之首”。例如，三国魏景元四年（263年），刘徽注《九章算术》九卷不仅是现存最早的注本，而且使中国的算学达到高峰，“成为途径方法大不相同而东西辉映的两大数学体系，欧几里得和刘徽则成为古代东西方两大数学代表人物”^④。唐代李淳风注虽然成就不及刘徽，但是李注与刘注不同，后者仅仅是一种个人行为，而前者却是一种国家行为，据《新唐书·李淳风传》称，李淳风“奉诏与算经博士梁述、助教王真儒等是正《五曹》《孙子》等书，刊定注解，立于学官”^⑤。而对于这《十部算经》在唐代的刊刻，《唐会要》载：“永隆元年（650年）十二月，太史李淳风注释《五曹》《孙子》等十部算经，分为二十卷”^⑥，又“显庆元年（656年）十二月十九日，尚书左仆射

①（宋）沈括著，侯真平校点：《梦溪笔谈》卷1《故事一》，长沙：岳麓书社，1998年，第3页。

②（宋）沈括著，侯真平校点：《梦溪笔谈》卷5《乐律一》，长沙：岳麓书社，1998年，第39页。

③（宋）沈括著，侯真平校点：《梦溪笔谈》卷15《艺文二》，长沙：岳麓书社，1998年，第127页。

④《〈九章算术〉推出法文版》引吴文俊院士语，《科学时报》2005年8月4日。

⑤《新唐书》卷204《李淳风传》，北京：中华书局，1987年，第5798页。

⑥（宋）王溥撰：《唐会要》卷36《修撰》，上海：上海古籍出版社，2006年，第766页。

于志宁奏置,令习李淳风等注释《五曹》《孙子》等十部算经,为分二十卷行用”^①。在这里,“行用”与“立于学官”是一个意思,即把《九章算术》纳入国家的官学系列,成为明算科的教材,此举意义重大,确为两宋代数学的超常发展奠定了坚实的理论基础。

与宋元的其他数学家相比,杨辉算学著作的主要内容不仅流传了下来,代代有人研究和发 展,而且《杨辉算法》在 14 世纪传入朝鲜、日本等国家,对亚洲乃至欧洲数学的发展作出了巨大的历史贡献。

有鉴于此,笔者有必要从以下两个方面,试就国内外学界研究杨辉算书及其科学思想的历史状况略作阐述。

一、国外学界对杨辉数学著作及其数学思想的研究

(1) 日本。由中国传入日本的几本数学书,尤以《杨辉算法》《算学启蒙》《算法统宗》的影响最为巨大。例如,被誉为“日本数学之父”的关孝和从《杨辉算法》中得到了“剪管术”的名称和问题形式,并结合自己发明的剩一术,再通过引入逐约和互约概念,进一步完善了“剪管术”。同时,他还从《杨辉算法》中类似于“霍纳法”的解方程方法中受到启发,从而提出了分别相当于霍纳法和牛顿逼近法的两种解方程方法。后来,经过石黑高树(亦称石黑信由)(1760—1836 年)和三上义夫(1875—1950 年)发扬光大,尤其是三上义夫对中算史的研究成就深刻影响了我国中算史的奠基者李俨和钱宝琮等人。1913 年,三上义夫的代表作《中国和日本的数学发展》在欧洲出版,这是第一部用英语向西方世界系统介绍中国和日本古代数学的专著,全书共 21 章,其中该书的第 13 章专论杨辉。在三上义夫的影响下,日本学界涌现出了一批专心致力于研究中算史(包括杨辉数学思想研究)的学者,成绩斐然。例如,藤原著《宋元明数学の史料》(1944 年)、薮内清著《宋末の数学者杨辉について》(1956 年)及《宋元時代の科学技术史》(1967 年)、阿部荣方著《杨辉算法の方阵》(1976 年)、川原秀城著《中国の数学》(1987 年)、城地茂著《杨辉算法伝説再考》(2003 年)及《中田高寛写・石黒信由蔵〈杨辉算法〉について》(2004 年)等。虽然学界对个别日本学者研究中算史的学术动机存有疑问,但就杨辉这个人物个案来说,日本学界确实取得了令世界震惊的成绩,并为我国学者开始利用近现代数学概念对中国数学史进行研究和整理,奠定了比较坚实的理论基础。

(2) 朝鲜。据李俨先生考证,《九章算法》《算学启蒙》及《杨辉算学》三书于宋、元、明时传入朝鲜,之后李氏王朝加以复刻,遂成为其选仕(算官)的基本书籍。从时间看,《杨辉算法》传入朝鲜的时间(1143 年)早于传入日本的时间(1660 年),然而朝鲜学界对《杨

^① (宋)王溥撰:《唐会要》卷 66《广文馆》,上海:上海古籍出版社,2006 年,第 1163 页。

辉算法》的研究成就在整体上显然稍弱于日本。众所周知,在朝鲜学界,研究《杨辉算法》的学者主要有金始振(1582—1667年)、任濬(1605—1675年)、庆善徵(1616—?)、崔锡鼎(1645—1715年)、黄胤锡(1729—1791年)等,其中庆善徵在吸收和消化《杨辉算法》《算学启蒙》《算法统宗》等中算内容的前提下,撰写了具有东算(朝鲜算学)特色的《莫思集算法》,对17—18世纪的东算发展产生了深远影响。而作为“儒家名算法者”的崔锡鼎(1645—1715年)则将《摘奇算法》(即《杨辉算法》)、《算学启蒙》等中算著作加以形而上的“儒学”解释,遂撰成《九数略》一书。在《九数略》里,杨辉的“纵横图”变成了崔锡鼎的“魔方阵”,崔锡鼎用儒学的阴阳、三才、八卦、纲常伦理等核心概念去比附杨辉著作的数学思想和内容,出现了杨辉数学思想被儒化的倾向。例如,他在评价杨辉的“连环图”时说:“此乃易象八范数九,错综变化之数,河洛生成之数、化裁通变之妙,至此而无以复加矣。”将“数学”儒学化和神秘化,实际上就走上了欧洲数学神化了的进路。因此,金容云认为,崔锡鼎的《九数略》堪与欧洲僧侣波依修斯(480—525年)的数学著作相媲美。从长远的观点看,这种把数学儒学化和神秘化的研究进路,极大地妨碍了数学研究向更高的层次和水平提升与发展,因为它使数学研究失去了相对独立的个性,更背离了杨辉数学思想的本质。

(3)欧美。美国李约瑟研究所设法从中国获得了李俨1917年校勘本的日本三上义夫《杨辉算书》抄本的副本(即microfilm,微型胶片),这也成为李约瑟研究杨辉数学思想的第一手史料。1959年,李约瑟撰著的《中国科学技术史》第三卷《数学、天文学和地学》由剑桥大学出版社出版。在该著中,李约瑟虽然片面地认为“中国古代数学没有形式逻辑,尤其没有演绎逻辑”,但面对《杨辉算法》中的数学成就,他还是不得不承认杨辉有演绎推理的倾向。为了向西方世界推介《杨辉算法》这部中算巨著,新加坡学者蓝丽蓉将李俨刊的微缩《杨辉算法》于1977年左右全部译成英文。为此,李约瑟在1979年专门撰写了书评,对蓝丽蓉的研究工作给予了积极肯定和高度评价。现在西方关注中算的学者越来越多,并正在形成一个比较庞大的研究群体,诸如美国纽约的J.道本,英国剑桥的古克礼(C. Cullen),法国巴黎的马若安、林力娜、詹嘉玲与新秀白安雅,俄罗斯的 Volkov 等,都对宋元数学有比较深入的研究,其中杨辉数学思想也是他们经常讨论的话题。

二、国内学界对杨辉数学著作及其数学思想的研究

1. 中国大陆学者对杨辉数学著作及其数学思想的研究

1912年,李俨先生从清抄本《诸家算法》(自宋、元时期的数学著作内容辑录而成的算法汇编)中得到属于《永乐大典》系统的《杨辉算法》。不久,日本学者石黑准一郎将三上义夫《杨辉算法》的再度抄本送给李俨,1917年李俨完成了对该抄本的校勘(现保存在中

国科学院自然科学史研究所图书馆), 于是, 正式开启了大陆学者研究《杨辉算法》的先河, 由此日本学者数内清称李俨是“中国数学史研究第一人”。李俨在“中国算学在世界有千余年之历史, 中国国民对于中国算学之历史自然要深切详细”信念的驱使下, 于 1930 年发表了《宋杨辉算数考》一文, 分“书录”和“辑佚”两节, 对《杨辉算法》的流传及内容作了比较全面的阐释, 这是大陆学者研究杨辉的第一篇论文。接着, 李俨先生又于 1937 年出版了《中国算学史》一书, 这是我国出版的第一部数学全史。以此为前提, 严敦杰先生于 1966 年发表《宋杨辉算数考》(与李俨前揭论文同名) 一文, 在李俨论文的基础上增加了“杨辉的历史”“杨辉书中引用的数学书”及“杨辉书中所见数学新术语”等几节内容, 提出了杨辉《详解九章算法》对《九章算术》所涉及的 246 道题重新分类是一个创举和杨辉是中国古代教育家的观点, 这些观点成为后来人们研究杨辉数学思想的重要指南, 影响深远。

另外, 燕星和熊拯生于 1955 年分别在《数学通讯》上发表《杨辉弧矢公式质疑》及《杨辉五五图浅释》两文。华罗庚先生在 1956 年出版了《从杨辉三角谈起》这部科普小册子, 他以生动而流畅的语言, 阐述了杨辉三角的历史和实际应用。1988 年, 杭州大学的张加敏完成了硕士论文《南宋杨辉数学成就、影响及其重要意义》, 用今天的眼光看, 由于史料的局限, 尽管该文对某些问题的研究尚不够深入, 但它毕竟对杨辉的数学研究进行了比较系统的总结, 有助于后人在更高层次上提升对杨辉数学思想的学术研究水准。1994 年, 周瀚光和徐灵芳合作出版了《杨辉评传》一书, 填补了杨辉研究的空缺, 可惜该著对杨辉数学思想的研究和阐释在深度方面略显不足。

据不完全统计, 目前与“杨辉三角”相关的各种论文已逾 200 篇。受严敦杰先生观点的影响, 20 世纪 90 年代以来学界对杨辉教育思想的专题研究渐成气候, 出现了一批水平比较高的学术论文, 如张永春的《〈习学纲目〉是杨辉对数学课程论的重大贡献》(1993 年)、孔国平的《杨辉〈详解九章算法〉初探》(1993 年)、沙娜的《杨辉〈详解九章算法纂类〉研究》(1993 年)、杨燕的《南宋杨辉的数学教育思想》(1994 年)、孙宏安的《杨辉与数学教育》(1995 年)、佟建华和刘善修的《杨辉的数学教育方法》(1997 年)、邓玉文的《杨辉的数学教育思想及其现代意义》(2008 年)、肖学平的《中国传统数学教学概论》(2008 年) 等。这些论文从不同侧面针对同一问题进行分析论证, 它们在史料挖掘、视角切入及知识面的拓展等方面各有所长, 共同促进了大陆学者对杨辉教育思想的深入研究。除了专题研究之外, 中国数学通史、断代史及专题史研究也对杨辉的数学著作及其思想进行了详略不同的考校和探索。比如, 在校注方面, 主要有郭书春的《评宋景昌对〈详解九章算法〉的校勘》(1994 年)、郭熙汉的《杨辉算法导读》(1996 年) 及孙宏安译注的《杨辉算法》等; 在数学通史方面, 主要有钱宝琮的《中国数学史》(1964 年)、李俨和杜石然合著的《中国数学简史》(1964 年)、李迪的《中国数学通史·宋元卷》(1999 年)、欧阳录的《幻方与幻立方的当代理论》

(2004 年)、田淼的《中国数学的西化历程》(2005 年)、王渝生的《中国算数史》(2006 年)、佟建华等的《中国古代数学教育史》(2007 年)、傅海伦的《中外数学史概论》(2007 年)、郭金彬和孔国平合著的《中国传统数学思想史》(2007 年)、杜石然和孔国平主编的《世界数学史》(2009 年)、郭书春等的《中国科学技术史·数学卷》(2010 年)等;在断代史和专题史方面,主要有钱宝琮主编的《宋元数学史论文集》(1966 年)、郭书春主编的《中国科学技术典籍汇编》(1993 年)、刘邦凡的《中国古代数学及其逻辑推类思想》(2006 年)、冯立昇的《中日数学关系史》(2009 年)、陈美东主编的《简明中国科学技术史话》(2009 年)、郭世荣的《中国数学典籍在朝鲜半岛的流传与影响》(2009 年)、管成学的《南宋科技史》(2010 年)等。上述这些著作从资料收集、跨学科和多专业交叉、整体把握与不同立意等角度,对杨辉的数学成就及数学思想作了较为精当的论述,这些研究者用大量事实证明杨辉的科学贡献是多方面的,他的影响广泛而深远,其科学思想内容既丰富深刻,同时又取之不尽。从这个意义上来说,杨辉思想研究还有很大的拓展空间。

2. 中国台湾地区学者对杨辉数学著作及其数学思想的研究

中国台湾地区对杨辉数学著作及思想进行成系统的专题研究,主要始于《HPM 通讯》的创刊。《HPM 通讯》创刊于 1998 年 10 月 5 日,发起人为台湾师范大学的洪万生教授。目前,在台湾地区以该刊为学术研究和思想交流平台,吸引了不少中国数学史的爱好者,并已经通过《HPM 通讯》聚集起一个渐成规模的民间研究团体,集群效应明显。如上所述,《HPM 通讯》的主旨就是“Relations between History and Pedagogy of Mathematics”(简称 HPM),即探讨“历史与数学教育两者之间的关系”,换言之,就是以推动数学史融入数学教学为职志,这是一个颇具新史学意义的研究视角,其对杨辉数学思想的研究自然也会被置于这样的学术背景之下来进行考量和测度。于是,中国台湾地区研究杨辉算法及其科学思想就具有了突出的个性特征和区域风格,当然,更加重要的是,中国台湾地区的学者由此而对杨辉的学术研究形成了一股非常具有冲击性的劲度与张力。例如,王文佩的《杨辉算书的探讨:一个 HPM 的观点》(2002 年)及《杨辉算书与 HPM——以“加因代乘三百题”为例》(2004 年)、洪万生的《杨辉算书与 HPM: 以〈习算纲目〉为例》(2006 年)等,这些论文都有一个显著的共同特点,那就是它们把杨辉算书研究与现实的数学教育实践相结合,重在通过杨辉的数学教育思想来反思目前中国台湾地区数学教育的一些理念和做法,从而达到提升数学成效的目的。

第一节 宋朝的社会相貌与杨辉算书

关于杨辉算书〔包括《详解九章算法》（1261年）、《日用算法》（1262年）、《乘除通变算宝》（1274年）、《续古摘奇算法》（1275年）、《田亩比类乘除捷法》（1275年）〕的创作环境，杜石然、郭书春、郭汉熙、郭金彬等已有详论。例如，郭汉熙指出，就整个宋代科学技术的发展环境来说，首先宋代商品经济有了明显发展，其次宋代发生了土地所有权的迅速转移，具体地讲，可分为如下几个方面：印刷术、火药和指南针的应用与发展；天文学、医学、生物学和建筑技术的进步；哲学、文学和史学的繁荣；宋代数学发展本身的需要；学校和书院的普及；中外经济、文化交流的日益频繁等。^①由于科技史论家对上述背景已经讲得很多和很到位了，笔者不想再重复。下面着重从王安石变法和宋代筹算工具的变化两个视角，拟对杨辉算书的形成条件略作阐释。

一、北宋的社会相貌与贾宪的《黄帝九章算经细草》

北宋初立，面临的社会问题比较多，像如何消除藩镇割据对宋代政治的影响；如何解决在科举制和恩荫制之下所出现的机构臃肿和人浮于事的现象；随着对辽及夏战争的逐步升级，军费开支与财政收入的矛盾变得越来越突出，越来越尖锐；为了刺激农业经济的发展，北宋推行“不立田制”和“不抑兼并”^②的政策，结果造成了土地高度集中的现象，而贫富不均则成为影响北宋社会稳定的一个重要因素；尤其是北宋治平年间，政府财政出现了严重的入不敷出现象，如《宋史·食货志》记载：“治平二年（1065年），内外入一亿一千六百一十三万八千四百五，出一亿二千三十四万三千一百七十四，非常出者又一千一百五十二万一千二百七十八。”^③在此情况下，统治者必然会通过提高赋税的办法来增加国家的财政收入，以维持政府财政收支平衡。北宋的赋税“其类有五：曰公田之赋，凡田之在官，赋民耕而收其租者是也。曰民田之赋，百姓各得专之者是也。曰城郭之赋，宅税、地税之类是也。曰丁口之赋，百姓岁输身丁钱米是也。曰杂变之赋，牛革、蚕盐之类，随其所出，变而输之是也”^④。细言之，可谓无物不赋，名目繁多，诚如《宋史》所载：“岁赋之物，其类有四：曰谷，曰帛，曰金、铁，曰物产是也。谷之品七：一曰粟，二曰稻，三曰麦，四曰黍，五曰稷，六曰菽，七曰杂子。帛之品十：一曰罗，二曰绫，三曰绢，四曰样，五曰绉，六曰绸，

① 郭熙汉：《杨辉算法导读》，武汉：湖北教育出版社，1997年，第12—33页。

② 《宋史》卷174《食货上二》，北京：中华书局，1985年，第4206页。

③ 《宋史》卷179《食货下一》，北京：中华书局，1985年，第4353页。

④ 《宋史》卷174《食货上二》，北京：中华书局，1985年，第4202页。

七曰杂折，八曰丝线，九曰绵，十曰布葛。金铁之品四：一曰金，二曰银，三曰铁、镞，四曰铜、铁钱。物产之品六：一曰六畜，二曰齿、革、翎毛，三曰茶、盐，四曰竹木、麻草、刍菜，五曰果、药、油、纸、薪、炭、漆、蜡，六曰杂物。其输有常处，而以有余补不足，则移此输彼，移近输远，谓之‘支移’。其入有常物，而一时所输则变而取之，使其直轻重相当，谓之‘折变’。其输之迟速，视收成早暮而宽为之期，所以纾民力。”^① 在这里，有两个问题需要说明：一个是过多过滥的赋税名目加重了农民的经济负担，因而成为北宋社会发展的主要矛盾；另一个是为了与这种赋税制度相适应，对算术本身则必然会提出更高的要求，如加快对算术人才的培养，以及对算术方法的改进，尤其是加快对《九章算术》相关内容的进一步阐释和研究，以期满足北宋经济发展对算术的客观需要，已经成为北宋社会经济发展必须面对并需要加以解决的现实问题。

如果把王安石变法与庆历新政作比较，我们会发现，王安石变法中的理财诸法几乎都需要以一定的算术知识为基础。例如，方田均税法需要对宋朝北方境内的各种土地进行丈量，均其赋于民。

方田均税法亦称“千步方田法”，始创于景祐年间（1034—1037年），李裕民先生考证为景祐三年（1036年）或四年（1037年）。^② 据《宋史·河渠志》记载，仁宗明道二年（1033年），刘平上奏说：“今契丹国多事，兵荒相继，我乘此以引水植稻为名，开方田，随田塍四面穿沟渠，纵广一丈，深二丈，鳞次交错，两沟间屈曲为径路，才令通步兵。引曹河、鲍河、徐河、鸡距泉分注沟中，地高则用水车汲取，灌溉甚便。”^③ 由于方田均税牵涉田农的切身利益，在具体的实践和操作过程中，假如没有科学和公平的丈量手段，显然不能得到广大田农的认可，甚至会引发社会矛盾。事实上，宋人孙琳在主持河中府（治所在今山西永济市西南24里蒲州镇）的方田均税时，就出现了“均税”不公和丈量山田不科学的现象。因此，刘攽认为孙琳用方田法丈量农田，“但为能知田亩高下耳”，然若“以地肥瘠为差”，则“其勤力从事，田亩修治者则赋重，自若其惰窳不事事，而田亩荒瘠者，因获减赋”；又万泉（在今山西万荣县西南万泉村南）、龙门（在今山西河津市西）田，“此两邑皆山田，崎岖二三百里间，人以谓审如琳法，非旬岁不可周遍也”，而孙琳却不足一个月，结果引起当地田农的不满。^④ 在这里，造成上述后果的原因比较复杂，但有一点可以肯定，那就是具体操持丈量田亩，尤其是丈量山间田亩的官员，缺乏相应的算术知识，应是一个不可忽视的因素。因此，在王安石的主持下，熙宁五年（1072年）所颁行的《方田均税条约并式》充分考虑了田农

① 《宋史》卷174《食货上二》，北京：中华书局，1985年，第4202—4203页。

② 李裕民：《北宋前期方田均税考》，《晋阳学刊》1988年第6期，第776页。

③ 《宋史》卷95《河渠志五》，北京：中华书局，1985年，第2360页。

④ （宋）刘攽：《彭城集》卷35《故朝散大夫给事中集贤院学士权判南京留司御史台刘公行状》，台北：“商务印书馆”影印，文渊阁《四库全书》本，1983年版。

的实际,比较深刻地总结了先前推行方田均税法的工作经验教训,在“条约”中尽量体现科学和公平原则。例如,《方田均税条约并式》规定:

方田之法,以东西南北各千步,当四十一顷六十六亩一百六十步为一方。岁以九月,县委令、佐分地计量,据其方庄帐籍验地土色号,别其陂原、平泽、赤淤、黑垆之类凡几色。方量毕,计其肥瘠,定其色号,分为五等,以地之等均定税数。至明年三月毕,揭以示民,仍再期一季以尽其词,乃书户帖,连庄帐付之,以为地符……均税法,以县租额税数,毋以旧收蹙零数均摊,於元额外辄增数者,禁之。若丝帛绉绢之类,不以桑柘有无,止以田亩为定。仍豫以示民,毋胥动以浮言,辄有斩伐。荒地以见佃为主,勿究冒佃之因。若瘠鹵不毛听占佃,众得樵采不为家业之数,众户殖利山林、陂塘、道路、沟河、坟墓荒地皆不许税,诡名挟佃,皆合并改正。凡田方之角有埤植以野之所宜木。有方帐,有庄帐,有甲帖,有户帖,其分烟析生、典卖割移,官给契,县置簿,皆以今所方之田为正。^①

由这段记载可知,方田均税法的施行确实需要大量的算术人才。然而,对于王安石变法的评价,史学界历来看法不一,李华瑞先生在《王安石变法研究史》一书中业已作了非常详尽的阐述,笔者不必重复。从历史的角度讲,王安石变法本身可分为三个阶段:自熙宁二年(1069年)二月至熙宁七年(1074年)四月,即王安石第一次被罢相,为第一个阶段,此阶段改革成就最大,也是北宋社会经济和科学文化最为繁荣的历史时期;自熙宁七年(1074年)四月至熙宁八年(1075年)二月,即王安石再次被起用为宰相,改革阻力重重,难以深入;自熙宁八年(1075年)二月至熙宁九年(1076年)十月,即王安石第二次被罢相,改革实际上已经进入僵持阶段。此后,宋神宗主持变法,史称“元丰改制”,但改革的力度大为减弱,已与王安石变法不可同日而语。如前所述,王安石变法离不开算术人才,像薛向“尤善商财,计算无遗策,用心至到”^②,沈括则“提举司天监,日官皆市井庸贩,法象图器,大抵漫不知。括始置浑仪、景表、五护浮漏,招卫朴造新历,募天下上太史占书,杂用士人,分方技科为五,后皆施用”^③。过去,凡言及王安石变法,少有议论沈括对北宋“方技科”的改革的,当时的“方技科”相当于今天的两院(即中国科学院和中国工程院)。在这些专业性较强的科研部门,起用优秀的专业人才而非“市井庸贩”,对宋代整个科学技术的发展影响巨大。可惜的是,因史料所阙,除了薛向、沈括等,我们不知道究竟还有哪些具体参与实施均输法和方田均税法的科技人员。但是,根据明程大位的《算法统宗》记载,北宋元丰七年(1084年)刊《黄帝九章》《周髀算经》《五经算法》《海岛算经》《孙子算经》《张丘建

① (宋)李焘:《续资治通鉴长编》卷237“熙宁五年八月甲辰”条,上海:上海古籍出版社,1985年,第2223页。

② 《宋史》卷328《薛向传》,北京:中华书局,1985年,第10588页。

③ 《宋史》卷331《沈括传》,北京:中华书局,1985年,第10654页。

算经》《五曹算经》《缉古算法》《夏侯阳算法》《算术拾遗》等十书入秘书省。^①对于此举，不能孤立地看，它显然是王安石变法的产物之一。因为从相关史籍的记载来看，入北宋后，人们并未终止对《九章算术》的研究。例如，“楚衍，开封胙城人（治所在今河南延津县东北三十五里）”，他“于《九章》《缉古》《缀术》《海岛》诸算经尤得其妙”^②。传承其学者计有三人：“有女亦善算术”^③；又《王氏谈录·历官》载：“近世司天算楚衍为首，既老昏，有弟子贾宪、朱吉著名。宪今为左班殿直，吉隶太史。宪运算亦妙，有书传于世，而吉驳宪弃去余分，于法未尽。”^④这是宋代唯一保存下来的关于贾宪的史料，弥足珍贵。尽管受到北宋“朋党思维”的影响，王钦臣站在两军对峙的立场，认为楚衍的两位弟子存在着比较严重的学术分歧，但是他们对《九章算术》的研究与传承却是一致的。另外，从种种迹象看，贾宪的算术成就高于朱吉，应当是不争的事实。可惜的是，贾宪仅仅是一介武夫，在北宋左班殿直为武阶名，属小使臣，元丰官制为正九品，政治地位很低，这是他的算术著作不能在北宋广泛传播的原因之一。对于贾宪的主要生活时段，学界有多种说法：①生于1000年，卒于1090年^⑤；②宋仁宗时为左班殿直^⑥；③（他在11世纪上半叶撰成《黄帝九章算经细草》，书中附有“开方作法本源图”^⑦；④或云约于1050年完成《黄帝九章算经细草》^⑧；⑤或云《黄帝九章算经细草》成书于1023—1050年^⑨，甚或约1100年成书^⑩，等等。诸多观点之间，相互抵牾之处甚多，在没有新的史证之前，究竟孰是孰非，颇难取舍。当然，笔者可以肯定的是，贾宪经历了王安石变法，而他的《黄帝九章算经细草》亦在元丰年间（1078年—1085年）刊刻，另一部著作《算法斠古集》则不知去向。此间，根据《算法统宗》卷17记载，已刊算术著作除《黄帝九章算经细草》外，可考的尚有刘益的《议古根源》，蒋周的《益古集》（或称《益古算法》，约1080年）^⑪，蒋舜元的《应用算法》（1080年）以及不知著者的《证古算法》《明古算法》《辨古算法》《明源算法》《金科算法》《指南算法》等。在宋代，以元丰年间刊刻的算术著作最多，然而却没有一本完整的著作流传下来。即使保存在《详解九章算法》中的《黄帝九章算经细草》，如今也缺少了“方田”和“粟米”两章。不过，由元

①（明）程大位：《算法统宗》卷13，《古今图书集成·算法部汇考十七·历法典》卷125，上海：中华书局，1934年，第35页。

②《宋史》卷462《楚衍传》，北京：中华书局，1985年，第13517—13518页。

③《宋史》卷462《楚衍传》，北京：中华书局，1985年，第13518页。

④（宋）王钦臣：《王氏谈录·历官》，朱易安等主编，上海师范大学古籍整理研究所编：《全宋笔记》第1编10，郑州：大象出版社，2003年，第80页。

⑤徐飞、柯资能：《中国科学技术》，合肥：安徽教育出版社，2003年，第117页。

⑥傅海伦：《中外数学史概论》，北京：科学出版社，2007年，第76页。

⑦王渝生：《中国算学史》，上海：上海人民出版社，2006年，第187页。

⑧李文林：《数学史教程》，北京：高等教育出版社，施普林格出版社，2000年，第91页；陈书凯：《中国人一定要知道的历史小常识》，北京：中国城市出版社，2008年，第250页；姬小龙、刘夫孔：《中外数学拾零》，兰州：甘肃教育出版社，2004年，第67页。

⑨郭金彬、孔国平：《中国传统数学思想史》，北京：科学出版社，2004年，第166页。

⑩马光思：《组合数学》，西安：西安电子科技大学出版社，2002年，第73页。

⑪郭金彬、孔国平：《中国传统数学思想史》，北京：科学出版社，2007年，第186页。

丰年间的诸多算术刻本可以推知,熙宁变法期间的算术教育非常发达,从这个意义上说,《黄帝九章算经细草》无疑是王安石变法实践的产物之一。至于元丰年间算术刻本的失传是否与宋高宗对王安石变法的否定有关,目前尚不能定论。

另外,关于《黄帝九章算经细草》的主要数学成就,详见后论。

二、南宋社会相貌的变化与《杨辉算法》

南宋占据了经济富庶的江南地区,而经济发展相对落后的北方地区则多丢给了金朝,这样就出现了“高宗南渡,虽失旧物之半,犹席东南地产之饶,足以裕国”^①的局面。故其经济发展的整体水平略高于北宋,但南宋的通货膨胀较北宋要更加严重,捐税苛重,民众困苦不堪,因而反抗沉重赋税的农民起义不断,这是南宋社会的基本相貌。

与北宋相较,南宋的商品经济更加发达。从大处说,南宋“经界”法的推行迫切需要大量数学人才,《宋史》载:“盖经界之法,必多差官吏,必悉集都保,必遍走阡陌,必尽量步亩,必审定等色,必纽折计等,奸养转生,久不迄事。乃若推排之法,不过以县统都,以都统保,选任才富公平者,订田亩税色,载之图册,使民有定产,产有定税,税有定籍而已。”^②其中,“走阡陌”及“量步亩”与方田法和勾股法联系密切,考《九章算术》共有38题,包括“方田”“圭田”“邪田”“圆田”“箕田”“宛田”“弧田”等7种土地几何形式。然而,为了与南宋的“经界”实际相适应,特别是针对人们在“经界”过程中遇到的各种问题,杨辉加以分析归类,并在《详解九章算法纂类》里列出“方田八法”,即“直田法”“里田方田法”“圭田法”“斜田法”“圆田法”“畹田法”“弧田法”“环田法”。关于“方田八法”与《详解九章算法》的关系,将在后面加以详论,兹不赘言。例如,浙东运河“富商大贾,捩拖挂席,夹以大舳,明珠、大贝、翠羽、瑟瑟之宝,重载而往者,无虚日也”^③,又如“青龙镇瞰松江上,据沪渎之口,岛夷闽粤交广之途所自出,风樯浪舶,朝夕上下,富商巨贾、豪宗右姓之所会”^④;从小处看,则“要买物事只于门首,自有人担来卖,更是一日三次会合”^⑤。所以,随着物质交流日益频繁,商业数学无处不在。此时,为了适应商品经济的深入发展,传统的筹算工具必然会发生相应变化,从而使之更趋于便捷和高效。

顾名思义,筹算就是用尺寸粗细都一样的竹棒(也有的由木、金属、玉、骨等质料制成),先摆成数字,然后依加减乘除法则得出运算结果的一种数学方法,不用时放在算袋或算子筒里,使用时则摆在地上或在特制的算板、毡及桌上操作。故《说文解字》云:“算,数也。

① 《宋史》卷173《食货一》,北京:中华书局,1985年,第4156页。

② 《宋史》卷173《食货一》,北京:中华书局,1985年,第4181—4182页。

③ (宋)陆游:《渭南文集》卷20《法云寺观音殿记》,文渊阁《四库全书》本。

④ (宋)杨潜:《云间志》卷下《陈林·隆平寺经藏记》,《丛书集成续编》228《史地类》,台北:新文丰出版公司,1988年,第325页。

⑤ (宋)朱熹:《朱子语类》卷86《礼三·周礼》,北京:中华书局,2004年,第2209页。

从竹，从具，读若筭”，而“筭，长六寸，计历数者。从竹，从弄，言常弄不误也”。^①其数字的排列方式有两种：纵式与横式。隋唐以前，筹算主要用于锺律和天文历法的计算，故《汉书·律历志》与《隋书·律历志》都载有筹算的方法，如《隋书·律历志》云：“其算用竹，广二分，长三寸，正策三廉，积二百十六枚，成六觚，乾之策也。负策四廉，积一百四十四枚，坤之策也，觚方皆径十二天，天地之大数也。”^②而作为筹算在历法方面的最高成就，祖冲之所著《缀术》一书特别值得一说。《隋书·律历志》载：

宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈、二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。^③

然而，唐代《算经十书》还有《缀术》，到北宋元丰七年（1044年）刊刻十部算经时，以《算术拾遗》（或称《数术记遗》）^④取代了《缀术》的位置。《数术记遗》在唐代为算学生的考试科目之一，但没有列入十部算经里。明人程大位著《算法统宗》记载，北宋元丰所刊十部算经，到南宋时由鲍擗之重新刊刻于汀州学校，此时刻板的重要变化就是原来的《算术拾遗》变为《数术记遗》。那么，鲍版《数术记遗》与唐版《数术记遗》是不是一回事，目前学界争议比较大，具体情况可参见华印椿编著的《中国珠算史稿》一书第21—23页。前已述及，宋代商业获得了空前的发展，它使宋朝的社会相貌产生了很大变化，其中对算术的影响便是适应商业经济发展的算学著述大量出现。在这样的历史背景下，纯理论的《缀术》渐渐淡出了人们的视野，最后归于湮灭。从相关史料看，《缀术》在北宋初年尚在民间流传，如楚衍所习算经就有《缀术》，而北宋元丰七年（1044年）刊刻《算经十书》时，《缀术》却不见行世。其间究竟是《缀术》原本已经失传，还是北宋政府故意舍《缀术》而取《算术拾遗》，由此导致《缀术》的失传，目前难以定论。不过，商业经济的发展促使宋人的思维方式由魏晋时期的玄学转向实用，这可能是《缀术》在宋代不被人们重视的主要原因。

《数术记遗》与宋代商业经济的发展关系密切，而最能反映和体现当时筹算已商业化的标志应是筹算工具的变化。考，《数术记遗》载有14种算法：“其一积算，其一太一，其一两仪，其一三才，其一五行，其一八卦，其一九宫，其一运算，其一了知，其一成数，其一把头，其一龟算，其一珠算，其一记数。”^⑤在此，笔者无意将上述14种算法的内涵一一揭

①（汉）许慎：《说文解字》，北京：中华书局影印，1987年，第99页。

②《隋书》卷16《律历志上》，北京：中华书局，1987年，第387页。

③《隋书》卷16《律历志上》，北京：中华书局，1987年，第388页。

④当然，两书是否为一书，学界尚有争议。另外，现传本《数术记遗》的真伪，在学界亦有争议。

⑤李培业：《数术记遗释译与研究》，北京：中国财政经济出版社，2007年，第28页。

示出来，事实上，日本学者三上义夫在《中国数学的特色》一书中对此均有详论。笔者之所以将 14 种算法列举出来，主要是因为在上述算法中，其筹算工具已经发生了比较大的改革，即从算筹转向了算珠。商业经济的重要特征是讲求效率，而传统的算筹工具由于占位大，操作起来非常不便，不仅运算速度较慢，而且差错率也较高，已经无法与迅猛发展的宋代商业经济相适应了，所以对算器的改革势在必行。例如，《明道杂志》载：

卫朴，楚州人。病瞽。居北神镇一神祠中。与人语，虽若高阔，而间有深处，类有道者，莫能测。虽病瞽，而说书。遣人读而听之，便达其义，无复遗忘。每筭历，布筭满案，以手略抚之。人有窃取一筭，再抚之即觉。其市物，择其良苦，虽毫厘不可欺。有取其已弃者与之，朴即怒曰：“是已尝弃矣！”由是人无能欺，亦莫知何以能若此也。^①

“每筭历，布筭满案”说明宋代“布筭”有专门的案几，而这些案几为一般商家和店主所必备。如宋人黄伯思在《燕几图》中载有专门用于布算的案几，分别名为“布筭”和“小布筭”。^②可见，从唐代以前“布筭于地”到宋代出现“布筭满案”，筹算工具已经发生了一定的变化，诚如清人劳乃宣所说：“盖古者，席地而坐，布筭于地……后世施于几案。”^③事实上，宋代的筹算工具并未到此为止，而是很快就又朝着珠算方向改革和发展了。

珠算起源于何时？目前学界没有定论，如清代算学家梅启照主张东汉、南北朝说，其依据就是东汉徐岳所撰《数术记遗》一书中有“珠算”法，赵钟邑先生亦力主此说^④；另一位清代学者钱大昕则主张元明说，其主要依据是陶宗仪的《南村辍耕录》中载有“井珠”，同时，刘因在《静穆先生文集》中写有一首以“算盘”为题的五言绝句。多数学者认为，宋朝出现了算盘较为可信，其理由是：第一，张择端的《清明上河图》中一家药店的柜台上摆放着一架算盘；第二，河北巨鹿县曾发掘出一枚宋代的木制算盘珠；第三，前述刘因生活于宋末元初，他所作“算盘”一词反映的主要是宋代的生活情形；第四，根据陶宗仪《南村辍耕录》的记载，《四库全书》提要明确指出算盘一法“盛行于宋矣”；第五，元初蒙学课本《新编相对四言》中绘有一幅“九档算盘图”，它说明至少在南宋时期算盘已经开始出现。^⑤此外，从杨辉《日用算法》所出现的运算口诀来看，当时南宋民间已经使用算盘是可信的，详论见后。

不过，从案几到算盘的转化是一个渐进的过程，由于传统习惯的作用，人们还不可能一

①（宋）张耒：《张太史明道杂志》，涵芬楼影印顾氏文房小说本。

②（宋）黄伯思：《燕几图》“六之体有四”及“七之体有二”，《丛书集成新编》48，台北：新文丰出版公司，1985年，第409、410页。

③（清）劳乃宣：《古筹算考释》卷1，光绪十二年（1886）刊本。

④ 赵钟邑：《蜗庐漫笔》，广州：广东人民出版社，1980年，第134—135页。

⑤ 吴晓静：《人类文明之谜》，北京：中国戏剧出版社，2006年，第99页。