财 政 部 规 划 教 材

“十三五”普通高等教育规划教材

涂晓青 吴 曦 主编

线性代数

XIANXING DAISHU

中国财经出版传媒集团

中国财政经济出版社

财政部规划教材
“十三五”普通高等教育规划教材

线性代数

主　编　涂晓青　吴　曦
副主编　闫海波　赵　晓　付春红

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/涂晓青，吴曦主编．—北京：中国财政经济出版社，2016.8
财政部规划教材　“十三五”普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5095-6883-5

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①涂…　②吴…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第174909号

责任编辑：王　芳　　　　责任校对：李　静
封面设计：赫　健　　　　版式设计：王志强

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社 出版

URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：jiaoyu@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100142
营销中心电话：010-82333010　编辑部门电话：010-88190670
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×960毫米　16开　15.5印张　345 000字
2016年8月第1版　2016年8月北京第1次印刷
定价：32.00元
ISBN 978-7-5095-6883-5/O·0052
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：88190744
打击盗版举报热线：010-88190492、QQ：634579818

经济应用基础数学系列精品教材

线性代数编委会

涂晓青　吴　曦　白淑敏　崔红卫
李建平　李国东　王　宏　赵　晓
付春红

前　言

线性代数是高等学校财经类各专业必修的公共基础课.本书是根据教育部高等学校财经类专业核心课程“经济数学基础——线性代数”的教学大纲,为高等学校经济、管理类专业编写的一本线性代数教材,内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形、线性空间与线性变换、经济数学模型等.

为了符合一般本科教育的实际要求,贯彻“少而精”的原则,做到突出重点、详略得当、通俗易懂,在本书的编写过程中,我们作了以下一些尝试:

1.努力突出线性代数的基本思想和基本方法.本书注意对基本概念、基本定理和重要公式的介绍,以加深学生对它们的理解和印象;注重分析基本理论的实际意义及各部分内容的内在联系,以便学生在学习过程中能较好地认识基本概念和基本方法,从总体上把握线性代数的思想方法.

2.按照适当介绍和循序渐进的原则,在定理与性质的讨论中,尽量从简单、低维入手,适度推广,适度削弱一些定理与性质的讨论与证明,使教材具有可接受性,避免内容过深而脱离学生的实际情况.

3.本书增加了经济数学模型的初步内容,以使学生能了解线性代数在经济活动中的应用.

4.课后习题题量适当、题型丰富.每一章结束后,附有相关复习题,包括填空、选择、计算与证明等题型,书后附有习题参考答案.

本教材由涂晓青、吴曦担任主编,闫海波、赵晓、付春红担任副主编,参加本教材编写的人员还有王玟、买买提热依木·玉努斯、叶文春、张美玲、王志东、涂诗佳等,曾嵘博士对教材中的部分习题作了解答.

感谢西南财经大学经济数学学院领导的支持与关心,没有他们的努力,本书难以奉献给广大读者.

虽然我们对本书进行了认真编写和修改,但限于作者水平,本书不妥之处在所难免,恳请读者不吝指正.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

第一章　行列式 ……………………………………………… (1)

第一节　行列式的定义 ……………………………………… (1)

第二节　行列式的性质 ……………………………………… (10)

第三节　行列式按行(列)展开定理 ………………………… (19)

第四节　克莱姆(Cramer)法则 ……………………………… (28)

复习题一 …………………………………………………… (32)

第二章　矩阵 …………………………………………………… (34)

第一节　矩阵的概念 ………………………………………… (34)

第二节　矩阵的运算 ………………………………………… (39)

第三节　逆矩阵 ……………………………………………… (55)

第四节　分块矩阵 …………………………………………… (62)

第五节　矩阵的初等变换与初等矩阵 ……………………… (72)

第六节　矩阵的秩 …………………………………………… (84)

复习题二 …………………………………………………… (90)

第三章　线性方程组 …………………………………………… (92)

第一节　消元法 ……………………………………………… (92)

第二节　n 维向量 …………………………………………… (101)

第三节　向量组的线性关系 ………………………………… (104)

第四节　向量组的秩 ………………………………………… (112)

第五节　线性方程组解的结构 ……………………………… (120)

第六节　向量的内积与正交向量组 ………………………… (131)

复习题三 …………………………………………………… (140)

第四章　矩阵的特征值与特征向量 …………………………… (144)

第一节　矩阵的特征值与特征向量 ………………………… (144)

第二节　相似矩阵与矩阵对角化 …………………………… (152)

第三节　实对称矩阵的对角化 ……………………………… (158)

复习题四 …………………………………………………… (163)

第五章 二次型及其标准形 …………………………………………………… (166)
第一节 二次型及其标准形 …………………………………………………… (166)
第二节 二次型的标准形 …………………………………………………… (172)
第三节 正定二次型 …………………………………………………… (181)
复习题五 …………………………………………………… (185)
第六章 线性空间与线性变换* …………………………………………………… (187)
第一节 线性空间 …………………………………………………… (187)
第二节 线性空间的有关性质 …………………………………………………… (189)
第三节 线性变换 …………………………………………………… (196)
复习题六 …………………………………………………… (206)
第七章 经济数学模型 …………………………………………………… (211)
第一节 投入产出数学模型 …………………………………………………… (211)
第二节 线性规划数学模型 …………………………………………………… (217)
第三节 层次分析数学模型 …………………………………………………… (219)
习题参考答案 …………………………………………………… (227)
参考文献 …………………………………………………… (240)

第一章 linear algebra

行　列　式

行列式是线性代数的一个最基本的内容，它是现代数学各个分支必不可少的重要工具，是研究线性方程组的主要方法，在生产实际和经济管理中有着广泛的应用. 本章从行列式的概念出发，介绍行列式的性质和计算方法，并提供求解一类线性方程组的方法 —— 克莱姆(Cramer) 法则.

第一节　行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

行列式的概念最早是由17世纪日本数学家关孝和提出来的，他在1683年写了一部叫作《解伏题之法》的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书中对行列式的概念和展开已经有了清楚的叙述. 行列式的概念来源于线性方程组的求解问题. 为此，我们先回顾初等代数中二元、三元线性方程组的求解过程，从中引出二阶、三阶行列式的概念.

设含有两个未知变量 x_1, x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为了消去方程组(1.1) 中的未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以方程组(1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，则方程组(1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为便于研究与计算，在(1.2) 式中引入**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中横排称为行，纵排称为列. $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为二阶行列式的元素，二阶行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**. 计算方法可用图 1-1 来帮助记忆，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1-1

即二阶行列式的值就等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

利用上述定义，(1.2) 式中的分母、分子可以分别记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1.4}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1.5}$$

因此，(1.2) 式可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.6}$$

上式为二元线性方程组(1.1) 的求解公式. 值得注意的是，分母 D 是由线性方程组(1.1) 的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)；x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第一列的元素 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式；x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第二列的元素 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式. 故当 $D \neq 0$ 时，线性方程组(1.1) 有唯一解(1.6).

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以二元线性方程组有解，且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

于是方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-1}{1}=-1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{1}=2$$

类似地，对于三个未知变量 x_1,x_2,x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.7}$$

我们引入记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\tag{1.8}$$

称为**三阶行列式**. 其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数，分别称为行标与列标. 计算方法可用图 1-2 来帮助记忆.

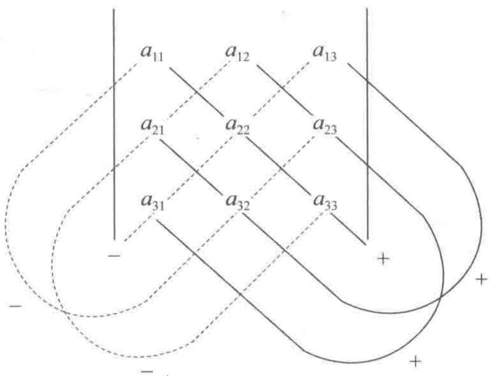

图 1-2

利用消元求解三元线性方程组(1.7)，当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

如果记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

可得方程组(1.7) 有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}\tag{1.9}$$

例 2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解 由行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D &= 2\times 2\times 2+3\times 1\times(-1)+1\times(-1)\times 4 \\ &\quad -3\times 2\times 4-2\times 1\times 1-(-1)\times(-1)\times 2 \\ &= 8-3-4-24-2-2=-27 \end{aligned}$$

例 3 当行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$ 时,x 为何值.

解 由行列式的定义,有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= 3\times 5\times 2+(-1)\times 2\times 3+1\times x\times 2 \\ &\quad -(-1)\times 5\times 2-3\times x\times 3-1\times 2\times 2 \\ &= 30-7x=2 \end{aligned}$$

解得

$$x=4$$

故当 $x=4$ 时,行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解 由系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

知方程组有唯一解,而

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=6$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

由(1.9)式可知

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 0 \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{3}{2} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

二、排列中的逆序与逆序数

为了获得 n 阶行列式的定义，我们需要先介绍全排列、逆序数及其有关的概念.

定义 1.1 把 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 排成一个有序数组

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

称为一个 n **级全排列**，简称**排列**.

例如，123 是 3 级排列，42351 是 5 级排列，21458673 是 8 级排列.

一般地，n 级排列的总数为 $n!$种. 例如，3 级排列的总的排列方法有 $3! = 6$ 种，即

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321$$

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $s < t$ 时，$i_s > i_t$，即排列中一对数的前后位置与大小顺序相反，则称数对 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为 n 级排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，在排列 12 中逆序数为 0，排列 21 中逆序数为 1；在 5 级排列 42351 中，构成逆序的数对有 42,43,41,21,31,51 共 6 个. 故

$$\tau(42351) = 3 + 1 + 1 + 1 = 6$$

在 n 级排列 $123\cdots n$ 中，没有构成逆序的数对，故 $\tau(123\cdots n) = 0$. 我们称这种逆序数为零的排列为 n 级**自然排列**.

如果一个 n 级排列的逆序数为偶数，则称之为**偶排列**. 如 5 级排列 42351 的逆序数是 $\tau(42351) = 6$，所以 5 级排列 42351 是偶排列. 如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，则称之为**奇排列**. 如 5 级排列 24135 是奇排列，因为 $\tau(24135) = 3$ 是奇数.

定义 1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置，其余各数位置不变，就得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的互换称为排列的一次**对换**，记作 (i_s, i_t). 特别地，若互换的是相邻的两个数，则称为**相邻对换**.

例如，$42351 \xrightarrow{(5,1)} 42315$.

对换有如下重要性质.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性要改变一次.

证 (1) 如果对换是相邻对换,在排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s i_t \cdots i_n$$

中,将 i_s 与 i_t 对换,得

$$i_1 i_2 \cdots i_t i_s \cdots i_n$$

因为对换后除了 i_s 与 i_t 外,其余任意两数间的逆序数都未动,所以当 $i_s < i_t$ 时,对换后排列仅增加一个逆序,当 $i_s > i_t$ 时,对换后排列仅减少一个逆序. 因此经相邻对换后排列的逆序数增加或减少 1 个,故相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 如果对换不是相邻对换,在排列

$$i_1 i_2 \cdots i_s a_1 a_2 \cdots a_k i_t \cdots i_n$$

中,将 i_s 与 i_t 对换,得

$$i_1 i_2 \cdots i_t a_1 a_2 \cdots a_k i_s \cdots i_n$$

可以看成由原排列中的 i_t 依次和前面的数作 $k+1$ 次相邻对换,变成

$$i_1 i_2 \cdots i_t i_s a_1 a_2 \cdots a_k \cdots i_n$$

后,再让 i_s 依次和它后面的数作 k 次相邻对换得到的,即对换后的排列可由原排列经 $2k+1$ 次相邻对换得到. 所以非相邻对换亦改变排列的奇偶性.

综上所述:对换改变排列的奇偶性.

进一步可以证明,任意一个 n 级排列,经过有限次对换总可变成自然排列.

定理 1.2 在所有 n 级排列中,奇排列和偶排列的个数相同,各为 $\frac{n!}{2}$ 个(证明略).

三、n 阶行列式的定义

为了定义更具普遍意义的 n 阶行列式,先观察三阶行列式的结构. 在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

的展开式中具有如下特征.

(1) 三阶行列式的值表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \tag{1.10}$$

$j_1 j_2 j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1 j_2 j_3$ 遍取了 3 级排列时,即得到三阶行列式的所有项(不包含符号),共为 $3! = 6$ 项.

(2) 展开式中每一项都带有符号. 项中的行标成自然排列时,当其列标 $j_1 j_2 j_3$ 为偶排列,项

(1.10) 前取正号；当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，项(1.10) 前就取负号. 因此，项(1.10) 前的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

所以三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示遍取所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 时，对项 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 求和.

显然，二阶行列式也符合这些特征，并可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

受此启发，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

为 **n 阶行列式**，它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.12}$$

的代数和. 其中行标依次构成自然排列，列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(1.12) 式前带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(1.12) 式前带负号. 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.13}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和. 有时简记行列式 $D=|a_{ij}|$.

我们称(1.13) 式为 n 阶行列式的展开式，它是前面二阶行列式和三阶行列式的推广. 显然，由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11} 本身，即 $|a_{11}|=a_{11}$. 注意不要与绝对值记号相混淆.

例如，一个四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

根据定义 1.4,行列式 D 的展开式表示的代数和中有 $4!=24$ 项.考虑其一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由于第一行中除 a_{14} 外全为0,故只考虑 $j_1=4$;同理,只需考虑 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$,这就是说,行列式展开式中不为0的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$,而其逆序数为 $\tau(4321)=6$,故此项的符号为正号.因此行列式 D 的值为

$$D=1\times2\times3\times4=24$$

例 5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ii}\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$$

解 根据行列式的定义式(1.13)

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

因为在 D 的 n 个数乘积的代数和中,只有当 $j_n=n,j_{n-1}=n-1,\cdots,j_2=2,j_1=1$ 时,乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才不等于零.所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上述行列式称为**上三角行列式**,其特征为在 a_{11} 到 a_{nn} 所构成的主对角线以下的元素全为零.上三角行列式的值等于其主对角线上 n 个元素的乘积.

作为例 5 的特殊情况,如下行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种除主对角线上的元素外,其余元素全为零的行列式称为**对角行列式**.

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据行列式的定义式(1.13)

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

根据 D 的特点,D 中各项的 n 个元素的乘积,除

$$a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$$

外,其余全部为零,所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$$

我们称上述行列式为**反对角行列式**.

下面我们不加证明地给出 n 阶行列式的等价表达形式. 有时采用这些等价形式的定义更方便.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$中的乘积项可以表示成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \tag{1.14}$$

或

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n} \tag{1.15}$$

(1.14) 式为列标是自然排列、行标是 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 时的乘积项，而(1.15) 式中行标 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和列标 $j_1 j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

(1.14) 式和(1.15) 式的价值在于丰富了用定义计算行列式的方法，即不一定只用行标是自然排列、列标是 n 级排列来计算行列式，也可用列标是自然排列、行标是 n 级排列，或行标、列标都是 n 级排列来计算行列式.

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0\end{vmatrix}$$

既可按(1.13) 式计算：

$$D=(-1)^{\tau(1423)}abcd=abcd$$

也可按(1.14) 式计算：

$$D=(-1)^{\tau(1342)}acdb=abcd$$

甚至还可以按(1.15) 式计算，这些解法留给读者自己完成.

习题 1.1

1. 计算下列二阶、三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$

2. 求 k 为何值时，下列行列式成立.

(1) $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1\end{vmatrix}=0$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & k \\ 4 & k & 0 \\ 1 & 0 & k\end{vmatrix}\neq 0$

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？($|a|>1$)

4. 求下列排列的逆序数.

(1)41253　　(2)3712456　　(3)$n(n-1)\cdots 21$

5. 确定 i 和 j 的值，使得下列 9 级排列满足条件.

(1)$1274i56j9$ 成偶排列　　(2)$3972i15j4$ 成奇排列

6. 在六阶行列式中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　　(2)$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

(3)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　(4)$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

(5)$a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

7. 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式中带有负号的项.

8. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，则该行列式值为多少？为什么？

9. 确定下列 16 个元素皆不同的四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & 7 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

中乘积 $8\times(-5)\times(-2)\times 6$ 前应冠以什么符号？

10. 计算行列式.

$$D=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

第二节　行列式的性质

用 n 阶行列式的定义计算行列式通常是比较麻烦的，计算量非常大. 例如，计算一个 20 阶行列式，需作 $19\times 20!$ 次乘法，用每秒运算亿万次的计算机，也要计算一千年才行. 因此本节主要研究 n 阶行列式的性质，揭示 n 阶行列式的运算规律，使得实际计算行列式的值变得方便快捷，而且对行列式的理论研究也很重要.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$