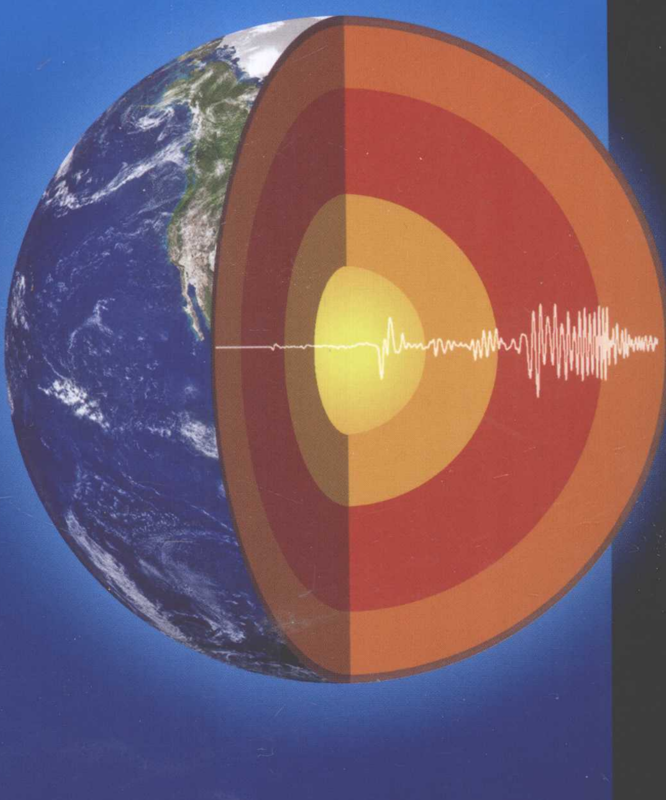
地球物理基础丛书

基础地震学

朱良保 编著



科学出版社

地球物理基础丛书

基础地震学

朱良保 编著

科学出版社

北京

内容简介

本书力求用简洁的推演方式导出重要的地震学基本概念及结论。许多讲述及推演方式是本书特有的，期待读者能从中受益，最终达到系统掌握地震学基础知识的目的。全书分为10章。第1章简要讲述本书所需的数学知识。第2章简要讲述线性弹性力学的基本概念。第3章讲述弹性动力学方程及地震波方程，运用局部化原理导出射线理论基本公式。第4章讲述射线运动学。第5章讲述走时数据的反演，简要叙述反演基本理论和方法。第6章主要讲述有哪些因素会影响地震波的振幅和相位。第7章讲述面波的本征值与本征函数及面波的频散，面波Q值等。第8章简要讲述地球的自由振荡及自由振荡的激发。第9章讲述地震矩张量及分解、力系与断层位错的等价关系，震源的时空有限性对地震波的影响等。第10章简要讲述各向异性介质中地震波的主要特征。

本书为高等学校固体地球物理学专业地震学课程的教材，亦可作为与地震学相关的科研工作人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

基础地震学/朱良保编著. —北京：科学出版社，2016.10

(地球物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-050215-5

Ⅰ.①基… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①地震学 Ⅳ.①P315

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第244377号

责任编辑：张颖兵 杨光华/责任校对：肖 婷

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2016年10月第 一 版 印张：14 3/4

2016年10月第一次印刷 字数：380 000

定价：48.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“地球物理基础丛书”编委会

"地球物理基础丛书"序

地球物理学是地球科学领域最古老、最重要而又最充满活力的分支之一。自两千多年前亚里士多德开始，就已经出现了地球物理学的萌芽。在《物理学》中，亚里士多德阐述了很多与地球及其周围空间相关的自然现象，诸如风、雨、雷、电、火山、地震等自然现象。这些现象与地球系统密切关联，其解释又涉及物理学本身。地球系统包括固态内核、液态外核、熔融地幔、黏弹地壳、固态冰川和液态海洋、地球液态固态体(简称地球本体)周围的大气层、电离层、月球以及所有绕地卫星；此外，地球系统与太阳、太阳系内的所有行星、卫星及星际物质密切关联，因而，广义地，也可将后者纳入地球系统之中。地球物理学，就其本意而言，是研究地球系统内各种物性参数、各种物理场、各种物质变化运移、各圈层相互作用及环境变化以及地球系统中发生的各种自然现象的物理学。或者简单而不太严密地说，地球物理学，是利用物理学原理、方法、实验手段研究地球系统本身及其内发生的各种自然现象的学说。随着科学技术的进步，地球物理学也在不断拓展其研究范围，现在已包含非常广泛的分支学科，如太阳系起源，行星学，地球形状学，地球自转学，地球重力学，地电学，地磁学，地热学，地球年代学，地壳形变学，地球动力学，地震学，地球内部物理学等。

地球物理学是研究地球的物理学，因此，随着物理学新进展或新发现的出现，其理论体系或方法论必将影响、渗透到地球物理学。从亚里士多德的宇宙地心说和自由落体重者下落较快说到哥白尼的宇宙日心说和伽利略的自由落体等速说，从开普勒三大定律到牛顿万有引力定律，从法拉第电磁感应定律到麦克斯韦电磁场统一方程，从伽利略的温度计到开尔文的热力学系统，从牛顿的经典力学体系和绝对时空观到爱因斯坦的相对论理论和相对论时空观，从微观世界的连续性理论到不连续量子理论，从古老的简单机械计算到现代的大型计算机，无一不在影响和逐步推动着地球物理学的发展进程。比如，没有牛顿的万有引力定律，就没有对天体运行规律的完美描述；没有爱因斯坦的广义相对论，就难以解释行星的近日点进动效应；没有热力学定律，地热学就难以发展。当今地球物理学，仅凭理论推演、不付诸实践检验而构建模型的时代已几乎一去不复返了。构建地球物理模型，解释各种自然现象，理论预测与实际观测比对，修改模型，进一步比对，不断循环往复，这是地球物理学的发展逻辑；不断拓展地球系统研究对象，包括利用物理学新理论新方法、新实验结果研究地球系统物性参数及各种自然现象，并向其他领域交叉渗透，这是当今地球物理学的发展趋势。

尽管历经两千多年的发展，但在地球物理学领域仍有很多悬而未决的重大科学难题，例如：太阳系起源，地磁场起源，内核的年龄，内核超速旋转速率，Chandler 晃动机理，十年尺度日长变化机理，厄尔尼诺现象的机理，地球膨胀/收缩机理，地震预报等。奥秘无穷，探索无尽。地球物理学没有终结，只有起点。

国内已有 30 多所大学开设了地球物理学本科专业，但尚缺乏系统性的循序渐进的适合于理科的地球物理专业教科书。因此，我们认为有必要出版地球物理基础丛书。该丛书面向地球物理专业、大地测量专业及相关专业，在内容选择方面，注重基础性和系统性，注重从第一性原理出发，强调理论的系统性、严密性和逻辑性；注重阐述基本概念、基本原理，在描述现象的基础上，诠释现象的本质；注重理论联系实践及启发式教学，注重培养学生的实际动手能力和科学研究能力。这套丛书以偏重于理科的教科书为主，兼顾偏重于应用的教科书以及实践教程，可供地球物理专业、大地测量专业本科生学习，也可供研究生及相关教学和科研人员参考。

申文斌

2016 年 1 月 26 日于武昌

序

地震学是运用物理学原理和方法探究地球内部奥秘的科学，其物理基础是连续介质力学。地震发生后，地震波由震源出发穿过地球介质到达地表的接收点，能把震源以及地球介质的信息传递给接收仪器。地震学的目的就是解读这些波动信息，反推地球介质的特性以及震源的物理状态及变化过程。所以，地震是地球内部的闪电，它照亮了地球。

人们对地球内部结构的认知几乎都来自于地震学的研究成果。基于目前的科学知识，地震波是波长最短、分辨率最高且唯一能穿透地球，并被用来反演地球介质性质及震源物理过程的物理场。所以，地震学理论被广泛应用于地球资源的勘探、抗震建筑的设计、核爆炸的侦测等。

地震学的发展动力来源于地震观测。每一次地震仪的改进和发展以及新的观测数据都给地震学理论及人们对地震本身和地球内部结构的认识带来新的突破。所以，地震学是基于实验观测而建立的应用物理学。

地震学的研究尺度大到从地球表面地壳到几千千米深的地核，小到实验室里的岩石样品。目前，地震学家对地球的平均径向地震波速度结构已经有了相当的认识，但地球的横向变化结构研究还存在困难，无论是理论上还是实际观测都是如此，对地震的物理机制的认识还相当模糊。地球内部的很多谜团有待我们去解释，地震学是解开那些谜团的钥匙。

本书根据笔者在北京大学、中国科学技术大学、武汉大学多年讲授普通地震学的讲义编著而成，浓缩了笔者多年的心血。本书是为具有高等数学基础的学生和从事地震学研究的科学工作者而写的。地震学是一门定量科学，数学是科学中最简洁而又明了的语言，所以本书应用了大量的数学描述。本书中的图解并非是想省略数学的描述，恰恰相反，图解是为帮助理解数学表述的物理概念，增强理解和形象记忆。本书中所用的数学是任何一所普通高校理工科高年级学生已经掌握的内容，所以，由于数学原因而看不懂本书就不能成为理由。学习过普通高等数学的学生和地震科学工作者都具备看懂本书的能力，就看你有没有信心和耐性。

本书系统讲述地震学的基本概念，基于这些概念推演最重要的结论。第 1 章概要描述本书后面章节要用到的数学知识。读者必须具备这些数学知识，尤其是下角标求和规则的应用，它是推演公式强有力的工具，熟练掌握和灵活运用能增强推演公式的能力，提高学习本书的信心。第 6 章和第 8 章的部分内容是用矩阵方法处理平面波的反射、透射问题以及用矩阵方法求解面波的本征函数和本征值问题，如果把本书作为教科书，由于学时的原因这部分内容可以作为选讲内容。对于一般的读者，尤其是与地震学有关的研究人员必须掌握这部分内容，不光是系统地震学知识的需要，也是应用计算机演算地震学问题的技术储备，它们是强有力的工具。基于笔者的学识和能力，本书没有涉及地震仪的原

理及勘探地震学的内容。其原因是笔者没有深入地研究过这些内容,需要系统学习或参考这部分内容的读者可以选择其他更有权威性的相关著作。

编著本书的过程中主要参考了 Peter M. Sheerer 的"*Introduction to Seismology*"; Seth Stein 和 Michael Wysession 的"*An Introduction to Seismology, Earthquake, and Earth Structure*" Keiiti Aki 和 Paul G. Richards 的"*Quantitative Seismology: Theory and Methods*"; Ari Ben-Menahem 和 Sarva Jit Singh 的"*Seismic Waves and Sources*"; Thorne Lay 和 Terry C. Wallace 的"*Modern Global Seismology*"。虽然本书中的每一个公式笔者都仔细推演过,但还是难免会有笔误,希望读者给予指正。

朱良保

2016 年 4 月于武汉

目　录

第1章 数学预备

地震学是定量科学，许多概念和结论需要用数学来描述。在学习本书内容之前，有必要对本书需要用到的基本数学公式及约定做一简要的概括。对有些内容不太熟悉的读者可以预先补充相关的知识，增强学习本书的信心。

1.1 张量算符及下角标求和规则

约定 除非特殊声明，我们约定黑斜体小写字母表示矢量，黑斜体大写拉丁字母表示矩阵或算符。戴帽的黑斜体小写字母表示单位矢量。如：$\boldsymbol{a}$ 代表矢量，$\hat{\boldsymbol{a}}$ 代表单位矢量。

1.1.1 下角标求和规则

同一项中下角标相同的两个拉丁字母表示求和，下角标相同的两个希腊字母不求和。

例 $a_i b_i = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$，其中 n 是矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的维数。求和下角标 i 为哑元角标，哑元下角标可用任意的拉丁字母表示，只要这个字母没有在同一项下角标中出现过。

例

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{\alpha=1} A_{i\alpha} B_{\alpha j} = A_{ik} B_{kj} = A_{il} B_{lj}$$

$$A_{ii} = A_{jj} = \sum_{\alpha=1} A_{\alpha\alpha}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a})_i = A_{ji} a_j = a_j A_{ji} = a_k A_{ki}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i = a_j b_j$$

1.1.2 两个重要的运算符

1. δ_{ij} 算符

定义：
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

例 $\delta_{ij} a_j = a_i$，下角标传递性。把角标 i 传递给 j。

问题 如果矢量空间是 n 维的，$\delta_{ii} = ?$

2. ε_{ijk} 算符

定义：
$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & \text{任意两个下角标相同}\\ 1, & ijk\text{ 取值 }123,312,231\\ -1, & ijk\text{ 取值 }321,132,213\end{cases}$$

例 (1) $\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{klm}\varepsilon_{kij}=\delta_{li}\delta_{mj}-\delta_{lj}\delta_{mi}$。

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$，笛卡儿坐标 $i=1,3$。

(3) $(\nabla\times\boldsymbol{a})_i=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial x_j}a_k=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$，笛卡儿坐标 $i=1,3$。梯度算符看成一个矢量算符，即 $\nabla_i=\partial/\partial x_i$；$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\equiv u_{i,j}$。

(4) $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i}$，笛卡儿坐标 $i=1,3$。

(5) M_{ij} 对称的充要条件是 $\varepsilon_{ijk}M_{jk}=0\ (i,j,k=1,3)$。

证 如果 M_{ij} 对称，则 $\varepsilon_{ijk}M_{jk}=\varepsilon_{ijk}M_{kj}=-\varepsilon_{ikj}M_{kj}=-\varepsilon_{ijk}M_{jk}$。推知 $2\varepsilon_{ijk}M_{jk}=0$，即 $\varepsilon_{ijk}M_{jk}=0$。证得必要性。

如果 $\varepsilon_{ijk}M_{jk}=0$，则

$\varepsilon_{123}M_{23}+\varepsilon_{132}M_{32}=M_{23}-M_{32}=0$，推得 $M_{23}=M_{32}$；

$\varepsilon_{231}M_{31}+\varepsilon_{213}M_{13}=M_{31}-M_{13}=0$，推得 $M_{31}=M_{13}$；

$\varepsilon_{312}M_{12}+\varepsilon_{321}M_{21}=M_{12}-M_{21}=0$，推得 $M_{12}=M_{21}$，证得充分性。

例 证明 $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

证
$$\begin{aligned}\text{等式的左边}&=\varepsilon_{ijk}u_j\varepsilon_{klm}v_lw_m\\&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}u_jv_lw_m\\&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})u_jv_lw_m\\&=u_mv_iw_m-u_lv_lw_i\\&=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_i-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})w_i=\text{右边，证毕。}\end{aligned}$$

应该注意到，下角标求和规则实际上默认选择了一个笛卡儿坐标系，在此坐标系下矢量和算符用下角标表示，它们是该坐标系下的分量。不同的坐标系，它们的分量不同。但矢量和算符或张量本身是与坐标系的选择无关的。

1.2 Gauss 公式和 Stokes 公式

设 $\boldsymbol{f}$ 为满足一定连续条件的矢量场。

Gauss 公式：
$$\oiint_S \boldsymbol{f}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V$$

其中，S 为一个封闭面；$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为 S 上的面元 $\mathrm{d}S$ 的单位法向矢量，其方向指向封闭面的外面。V 为封闭面内的体积。如果把面元 $\mathrm{d}S$ 看成是有方向的面元，即 $\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则 Gauss 公式为
$$\oiint_S \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V\nabla\cdot\boldsymbol{f}\mathrm{d}V$$

Stokes 公式：

$$\oint_L \boldsymbol{f} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} \mathrm{d}l = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S$$

其中，L 为一个充分光滑的封闭曲线；$\hat{t}$ 为线元 $\mathrm{d}l$ 的单位方向；S 为以封闭曲线 L 为边界围成的光滑曲面；$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为曲面的法向，曲线的方向与曲面的法向组成右手系。如果把线元看成是有方向的，即 $\hat{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}l = \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，Stokes 公式可表为

$$\oint_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Green 公式：

$$\oiint_S (\phi\, \nabla\psi - \psi\, \nabla\phi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V (\phi\, \nabla^2 \psi - \psi\, \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V$$

其中，S 为空间区域 V 的边界曲面；ϕ 和 ψ 为两个标量函数，在 S 上有连续的偏导数，且在 V 上具有二阶连续偏导数。特别地，

$$\oiint_S \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla^2 \phi \mathrm{d}V$$

以上三个积分公式在连续介质力学以及其他的物理领域中经常用到，一定要会熟练运用。

1.3　傅里叶变换及其反变换的定义

设 $\phi(t)$ 是一个时间序列(函数)，$t \to \infty$ 时，$\phi(t) \to 0$。本书中的时间傅里叶变换(FT)定义为

$$\phi(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{d}t} \tag{1.3.1}$$

傅里叶反变换(IFT) 定义为

$$\phi(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{1.3.2}$$

空间傅里叶变换定义为

$$\phi(k_x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x} \mathrm{d}x \tag{1.3.3}$$

空间傅里叶反变换定义为

$$\phi(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k_x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x} \mathrm{d}k_x \tag{1.3.4}$$

如果 $\phi(t)$ 是实函数，由式(1.3.1) 可知 $\phi(-\omega) = \phi^*(\omega)$，“$*$”表示复共轭。由此可知式(1.3.2) 的反变换可表示为

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} \phi(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

由于实函数的谱具有上述性质，本书中除了特别强调，默认 $\omega > 0$。

1.4 函数的卷积与互相关

设有两个实函数 $f(t)$ 和 $g(t)$。两个函数的卷积定义为

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4.1}$$

如果被积函数存在极点，则积分定义为主值积分。

卷积的傅里叶变换为

$$F[f(t) * g(t)] = f(\omega)g(\omega) \tag{1.4.2}$$

卷积的谱就是两个函数的谱的乘积。

两个函数的互相关定义为

$$R_{fg} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4.3}$$

互相关函数的谱为

$$F[R_{fg}] = f^*(\omega)g(\omega) \tag{1.4.4}$$

证 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t+\tau)\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$

$$= g(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = g(\omega)f(-\omega)$$

$$= g(\omega)f^*(\omega)$$

证毕。

1.5 Hilbert 变换

设函数 $\phi(t)$ 有界、绝对可积，并且其傅里叶变换存在，函数 $\phi(\omega)$ 为 $\phi(t)$ 的傅里叶变换，$\phi(t)$ 的 Hilbert 变换定义为

$$\hat{\phi}(t) \equiv P.V.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{1.5.1}$$

其中，$P.V.$ 表示主值积分。则

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)[-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.5.2}$$

证 由式(1.5.1)可知 $\hat{\phi}(t)$ 可表示为函数 $\hat{\phi}(t)$ 与 $-\dfrac{1}{\pi t}$ 的卷积 $\hat{\phi}(t) = \phi(t) * \left(-\dfrac{1}{\pi t}\right)$，只要证明函数 $-\dfrac{1}{\pi t}$ 的傅里叶变换为 $[-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)]$。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi t}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{t}\mathrm{d}t = -\frac{i}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}\mathrm{d}t$$

由狄利克雷(Dirichlet)积分$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}$推得

$$-\frac{i}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega t)}{t}dt=\begin{cases}-i, & \omega>0\\ 0, & \omega=0\\ i, & \omega<0\end{cases}$$
$$=-i\mathrm{sgn}(\omega)\text{，证毕。}$$

由 Hilbert 变换定义可知，$\phi(\omega)$ 经过$\frac{\pi}{2}$的相移后就得到$\hat{\phi}(t)$的谱。

设 $\phi(t)$ 为实函数，由定义得

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\omega)[-i\mathrm{sgn}(\omega)]e^{-i\omega t}d\omega\\&=-\frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty}\phi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega+\frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty}\phi(-\omega)e^{i\omega t}d\omega\\&=-\frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty}[\phi(\omega)e^{-i\omega t}-\phi(-\omega)e^{i\omega t}]d\omega\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}\phi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\end{aligned}\tag{1.5.3}$$

由式(1.3.5)与式(1.5.3)可知，如果 $\phi(t)$ 为实函数则$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\phi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$的实部就是$\phi(t)$，其虚部就是$\hat{\phi}(t)$。

1.6 实信号函数的解析函数

设 $\phi(t)$ 为实信号函数，其解析函数定义为

$$s(t)=\phi(t)+i\hat{\phi}(t)\tag{1.6.1}$$

其中，$\hat{\phi}(t)$ 为 $\phi(t)$ 的 Hilbert 变换。取其绝对值

$$A(t)=|s(t)|=\{[\mathrm{Re}(s(t))]^2+[\mathrm{Im}(s(t))]^2\}^{\frac{1}{2}}\tag{1.6.2}$$

其意义为，$A(t)$ 描述信号函数 $\phi(t)$ 的包络，称为信号函数 $\phi(t)$ 的瞬态振幅。

信号的瞬态相位定义为

$$\psi(t)=\arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(s(t))}{\mathrm{Re}(s(t))}\right]\tag{1.6.3}$$

信号的瞬态频率定义为

$$\Omega(t)=-\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\tag{1.6.4}$$

信号的解析函数包含了信号在 t 时刻的瞬态振幅、瞬态频率和相位的信息，是时 - 频分析的重要工具。