

博士后文库

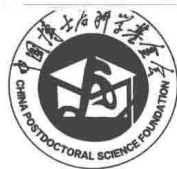
中国博士后科学基金资助出版

# 分数阶变换与光学 图像加密

刘正君 张岩 刘树田 著



科学出版社



博士后文库

中国博士后科学基金资助出版

# 分数阶变换与光学图像加密

刘正君 张 岩 刘树田 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书主要介绍以分数傅里叶变换为代表的分数阶变换理论及其在信息安全和相位恢复中的应用。全书共9章。第1章绪论,介绍分数阶变换和图像加密方面的国内外研究现状;第2章介绍分数阶变换及其光学实现,包括随机变换和典型的含参数光学变换;第3章主要介绍几种离散分数阶变换;第4~7章分别介绍了单图像、双图像、多图像及彩色图像的加密技术;第8章介绍图像分存与水印技术;第9章介绍多图像相位恢复与应用。

本书可作为信息安全及相关专业高年级本科生教材,也可供从事信息安全和光学信息处理研究的人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

分数阶变换与光学图像加密/刘正君,张岩,刘树田著. —北京:科学出版社,2017.4

(博士后文库)

ISBN 978-7-03-052487-4

I. ①分… II. ①刘… ②张… ③刘… III. ①分数-傅里叶变换-应用-图象编码-加密技术-研究 IV. ①O174.22 ②TN919.81

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第069920号

责任编辑:张震姜红/责任校对:高明虎

责任印制:张倩/封面设计:无级书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017年4月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年4月第一次印刷 印张:17 1/2

字数:353 000

定价:99.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 《博士后文库》编委会名单

主 任 陈宜瑜

副主任 詹文龙 李 扬

秘书长 邱春雷

编 委 (按姓氏汉语拼音排序)

付小兵	傅伯杰	郭坤宇	胡 滨	贾国柱	刘 伟
卢秉恒	毛大立	权良柱	任南琪	万国华	王光谦
吴硕贤	杨宝峰	印遇龙	喻树迅	张文栋	赵 路
赵晓哲	钟登华	周宪梁			

## 《博士后文库》序言

1985年，在李政道先生的倡议和邓小平同志的亲自关怀下，我国建立了博士后制度，同时设立了博士后科学基金。30多年来，在党和国家的高度重视下，在社会各方面的关心和支持下，博士后制度为我国培养了一大批青年高层次创新人才。在这一过程中，博士后科学基金发挥了不可替代的独特作用。

博士后科学基金是中国特色博士后制度的重要组成部分，专门用于资助博士后研究人员开展创新探索。博士后科学基金的资助，对正处于独立科研生涯起步阶段的博士后研究人员来说，适逢其时，有利于培养他们独立的科研人格、在选题方面的竞争意识以及负责的精神，是他们独立从事科研工作的“第一桶金”。尽管博士后科学基金资助金额不大，但对博士后青年创新人才的培养和激励作用不可估量。四两拨千斤，博士后科学基金有效地推动了博士后研究人员迅速成长为高水平的研究人才，“小基金发挥了大作用”。

在博士后科学基金的资助下，博士后研究人员的优秀学术成果不断涌现。2013年，为提高博士后科学基金的资助效益，中国博士后科学基金会联合科学出版社开展了博士后优秀学术专著出版资助工作，通过专家评审遴选出优秀的博士后学术著作，收入《博士后文库》，由博士后科学基金资助、科学出版社出版。我们希望，借此打造专属于博士后学术创新的旗舰图书品牌，激励博士后研究人员潜心科研，扎实治学，提升博士后优秀学术成果的社会影响力。

2015年，国务院办公厅印发了《关于改革完善博士后制度的意见》（国办发〔2015〕87号），将“实施自然科学、人文社会科学优秀博士后论著出版支持计划”作为“十三五”期间博士后工作的重要内容和提升博士后研究人员培养质量的重要手段，这更加凸显了出版资助工作的意义。我相信，我们提供的这个出版资助平台将对博士后研究人员激发创新智慧、凝聚创新力量发挥独特的作用，促使博士后研究人员的创新成果更好地服务于创新驱动发展战略和创新型国家的建设。

祝愿广大博士后研究人员在博士后科学基金的资助下早日成长为栋梁之才，为实现中华民族伟大复兴的中国梦做出更大的贡献。



中国博士后科学基金会理事长

# 前 言

分数傅里叶变换是傅里叶变换的扩展,也是光信息处理领域的一个新兴工具,可描述与衍射相关的光学过程。自 1994 年以来,作者所在课题组一直从事和分数傅里叶变换有关的研究工作。研究工作得到多项国家自然科学基金、教育部新世纪优秀人才支持计划和中国博士后科学基金等的资助。在研究工作中,作者深切体会到分数阶变换在信息处理技术中的重要作用。同时分数阶变换也是广义的变换框架,它的可塑性很强,可以根据问题需要选用不同的变换形式。

在研究前期阶段,作者结合分数傅里叶变换的性质和级联条件,提出它的广义光学实现。随着研究的深入,发现该变换的基本量(如本征值、本征向量和积分核函数)可以变成任意形式,甚至可以完全随机。在这个发现基础上,定义了随机的分数阶变换。它与所考虑的图像加密任务巧妙地结合在一起,为变换的应用提供了一个途径。如果与其他随机过程(如蒙特卡罗算法)关联,相信随机的分数阶变换可以在信息处理领域发挥更多的作用。本书以分数傅里叶变换为核心,介绍了多种分数阶变换的基本理论、数学性质、数值算法以及在图像加密中的应用,这些内容能为从事信息处理研究相关专业的研究生和科技工作者提供便利。这是作者写作本书的主要原因。

与大多数图像处理问题不同,在图像加密中正变换和逆变换被人为地分解为数据编码和解密两个独立过程,它们是互逆的并且在时间维度上是分离的。这两个过程又因为数据安全的需要而使用大量随机数以确保秘密图案不能被探测,或者很难通过计算机分析而获得。如果将加密和解密过程连接在一起,那么图像加密技术又是一个理想的“成像”处理,因为期间的恢复数据被要求尽可能完整。而光学变换在加密技术中起到一个“数据重整平台”的作用,图像数据在光学变换的作用下以复数形式在空间上重新分布。更一般地,在理论上任何可逆变换都可用于图像加密,当然这样的变换在图像处理任务中也可以应用,如降噪、图像增强和图像融合等。

本书前 3 章介绍光学图像加密和分数阶变换的近 20 年发展情况,以及分数阶光学变换的有关知识,它们是本书的理论基础;第 4~7 章介绍图像加密技术,包括单图像加密、多图像加密以及彩色图像加密等,而非对称密码系统是当前研究的热点,在这方面还有很多未解决的科学问题(如密码的管理和算法新性能等),对信息安全领域感兴趣的读者可以尝试研究;第 8 章介绍图像分存与水印技术;

第9章介绍多图像相位恢复算法及其在测量和图像解密中的应用。对于图像破解的研究难度要高于图像加密，作者目前进行的探索工作较少，更多的问题还需要本课题组将来考虑或者其他课题组的研究人员来解决。

作者非常感谢中国博士后科学基金会以《博士后文库》形式的博士后研究人员优秀学术专著出版资助计划对本书出版的支持。作者也要感谢国家自然科学基金(10674038、61575053、11104049、11047153、10974039、61377016、61575055、69577006)、哈尔滨工业大学青年拔尖人才计划、哈尔滨工业大学基础研究杰出人才培养计划和留学回国人员科研启动基金等对本书研究内容的资助。作者衷心感谢陈杭博士对本书的精心审阅以及修改，使得很多内容得到更严谨的表述。

本书主要内容是作者在计算机上编程获得，书中的基本内容、公式和图表等多数取材于作者在国内学术刊物发表的论文，只期望能最大可能地减少撰写谬误。然而由于作者水平有限，不当之处恳请读者谅解和指正。

作 者

2016年9月于哈尔滨

# 目 录

《博士后文库》序言

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 分数傅里叶变换研究进展	2
1.2 图像加密	4
第 2 章 分数阶变换及其光学实现	6
2.1 分数傅里叶变换	6
2.1.1 定义和光学实现	6
2.1.2 分数傅里叶变换的性质	8
2.1.3 级联条件与尺度问题	10
2.1.4 分数傅里叶变换的离散算法	16
2.2 随机傅里叶变换	19
2.2.1 随机傅里叶变换的提出	19
2.2.2 光学实现	22
2.3 随机分数傅里叶变换	23
2.3.1 核函数的随机化	23
2.3.2 图像加密应用	25
2.4 线性规范变换	27
2.5 Gyration 变换	27
2.6 哈特莱变换	29
第 3 章 离散分数阶变换	31
3.1 离散分数随机变换	31
3.1.1 离散分数随机变换的定义	31
3.1.2 数学性质	32
3.1.3 数值结果及图像加密应用	34
3.2 离散分数随机正余弦变换	36
3.2.1 定义和数学性质	36
3.2.2 与离散分数随机变换的关系	39
3.3 离散分数角度变换	43



<b>第4章 单图像加密技术</b> .....	50
4.1 基于随机哈特莱变换的双随机强度编码 .....	50
4.1.1 实数编码和裸解密 .....	50
4.1.2 双随机强度编码 .....	51
4.1.3 数值模拟 .....	52
4.2 基于对易关系的光学图像加密 .....	54
4.2.1 加密过程 .....	54
4.2.2 数值结果及安全性分析 .....	57
4.3 单相位编码技术 .....	59
4.3.1 加密原理 .....	59
4.3.2 数值模拟 .....	61
4.4 基于随机移动的图像加密 .....	64
4.5 基于双折叠操作的图像加密 .....	70
4.6 基于混合置乱操作的图像隐藏 .....	75
4.6.1 混沌映射 .....	75
4.6.2 隐藏方案 .....	76
4.6.3 模拟结果 .....	79
4.7 局域随机编码 .....	83
4.7.1 加密方案 .....	83
4.7.2 数值模拟 .....	86
4.8 基于像素交换的加密方法 .....	89
4.8.1 加密方案 .....	89
4.8.2 数值模拟 .....	91
4.9 基于旋转方形子图像的置乱方法 .....	93
4.10 基于随机旋转的加密方法 .....	97
4.11 基于面包师映射的加密方法 .....	103
4.12 基于非均匀光束照明的图像加密 .....	106
4.13 基于分块阿诺德变换的图像加密 .....	111
4.14 基于傅里叶变换对称性的压缩加密 .....	116
4.15 基于迭代随机相位编码的图像加密 .....	121
<b>第5章 双图像加密技术</b> .....	127
5.1 基于迭代分数傅里叶变换的双图像加密 .....	127
5.1.1 加密过程 .....	127
5.1.2 数值模拟和多图像加密 .....	129

5.2 基于频谱剪切的双图像加密	133
5.2.1 加密方案	133
5.2.2 数值模拟	136
5.3 基于仿射变换的双图像加密	141
5.4 基于仿射变换和混沌映射的双图像隐藏	148
5.5 基于随机相位编码和像素交换的双图像加密	152
5.6 基于阿诺德变换的双图像加密	158
5.7 基于迭代随机二值编码的双图像加密	163
<b>第6章 多图像加密技术</b>	<b>169</b>
6.1 基于频移方法的多图像加密	169
6.1.1 多图像加密原理	169
6.1.2 数值结果和光学实现	170
6.2 三图像加密	172
6.2.1 加密方案	172
6.2.2 安全性分析	175
6.3 基于非平行平面衍射的多图像加密	180
<b>第7章 彩色图像加密技术</b>	<b>187</b>
7.1 基于旋转颜色向量的彩色图像加密	187
7.2 基于级联相位编码的彩色图像加密	194
7.3 基于混沌映射和哈特莱变换的彩色图像加密	200
7.4 基于颜色混合操作的彩色图像加密	203
<b>第8章 图像分存与水印</b>	<b>210</b>
8.1 基于组合理论的图像分存	210
8.1.1 算法描述	210
8.1.2 数值结果和性能分析	212
8.2 基于离散分数随机变换的图像分存	214
8.2.1 分存原理	214
8.2.2 数值结果和性能分析	216
8.3 光学水印方法	218
8.3.1 水印方案	219
8.3.2 模拟结果	220
<b>第9章 多图像相位恢复与应用</b>	<b>224</b>
9.1 G-S 算法	224
9.2 杨-顾算法	225

---

9.3	混合输入输出算法 .....	225
9.4	关联迭代引擎技术 .....	226
9.5	多强度图像的相位恢复 .....	227
9.5.1	恢复方案 .....	228
9.5.2	计算结果 .....	229
9.6	位置误差对相位恢复的影响与校正 .....	233
9.6.1	误差分析 .....	233
9.6.2	校正方法 .....	238
9.6.3	模拟结果 .....	241
9.7	基于多图像相位恢复的攻击方法 .....	243
9.7.1	已知明文攻击 .....	244
9.7.2	选择明文攻击 .....	244
9.7.3	基于多图像相位恢复的攻击方案 .....	246
9.8	基于移动透镜的相干衍射成像 .....	252
参考文献	.....	260
编后记	.....	267

# 第1章 绪 论

分数傅里叶变换是最早出现且应用最多的一种分数阶变换。近年来,关于分数傅里叶变换理论、光学实现以及相关的扩展变换的研究成为信息光学领域中的一个热点研究方向。分数傅里叶变换在数学上拓宽了傅里叶变换的概念,同时在光学中能够很好地描述与近场菲涅耳衍射相关的物理过程,因此在光学和信息处理中有着广泛的应用,如光束传播、信号恢复、全息、相关运算、图像加密和信号分离等。目前分数傅里叶变换以及相关的扩展变换已经成为信息光学、数字信号处理与图像处理领域的重要理论工具。借助于分数傅里叶变换的概念,可以在分数域上进行一些操作完成光束传输、信号处理和图像处理等,解决傅里叶变换难以处理的问题。

信息安全是信息科学与技术中一个重要的研究方向,在版权保护、信息传输和存储等领域具有重要的实用价值。在诸多信息安全技术中,水印技术可以直接实现版权保护。水印技术可以采用全息术的方法在光学中实现。数字图像分存技术是一个新兴的图像信息加密与隐藏技术,类似于密码学中的密钥分存管理。它不仅可以实现保密信息的隐藏,还可以达到保密信息分散的目的。这样不仅使得非法攻击者要耗费精力去获取所有恢复保密信息需要的内容,而且使得保密信息拥有者相互牵制,提高了信息的保密程度。光学图像加密技术是光学信息安全的主要课题,大多数的光学图像加密算法是基于变换和全息技术来实现的,其中较为经典的算法是双随机相位编码。在数学方面,图像加密过程可以理解为一个可逆的随机过程,其控制随机性输出的关键数据将作为加密方法的密码,从事本领域探索性研究的读者可以从这个角度去尝试设计算法。

近20年来,分数傅里叶变换已被应用于信息光学和物理光学领域的诸多科学问题,如浙江大学赵道木教授、中国科学院大学物理科学学院张静娟教授、深圳大学彭翔教授、山东大学蔡履中教授、首都师范大学张岩教授和哈尔滨工业大学刘树田教授等在信息安全和光束传输方面进行了大量工作。北京理工大学陶然教授等在分数傅里叶变换处理雷达信号方面进行了大量有意义的研究工作。

光学变换、相位恢复和图像加密是本书主要考虑的对象,它们如2015年“雨果奖”获得者刘慈欣的代表作《三体》中描述的对象,互相关联、彼此依存。傅里叶变换在信号和图像处理领域有着广泛而成功的应用,本书所介绍的变换主要是分数阶变换,它源于傅里叶变换,但比傅里叶变换性质更为丰富。相位恢复问

题用于求解光学系统反问题中的相位分布,目前已经有很多领域应用,如天文测量、成像以及形貌测量等。图像加密是信息安全中一个基本而重要的课题,而本书主要偏重研究光学图像加密方法。上述3个对象彼此之间密切相关,以它们为研究脉络的节点,可以构造一个信息处理技术体系。

考虑到光学实验一般要求较高的实验条件,多数情况下实验效果达不到数值模拟的效果,因此人们主要通过理论研究和数值仿真为主的方式研究光学图像处理技术。本书偏重介绍分数阶变换的数值计算方法以及利用数值模拟实验确定相关信息处理技术的有效性和性能。

## 1.1 分数傅里叶变换研究进展

傅里叶光学是近代光学的一个分支,其是将信息论中使用的傅里叶分析方法移植到光学领域而形成的新学科。美国学者 Goodman 撰写的 *Introduction to Fourier Optics*<sup>[1]</sup> 是信息光学领域的一部经典著作,论述了当前傅里叶变换在光学诸多问题中的应用,如衍射、成像、光学数据处理以及全息术等。

本节简单给出分数傅里叶变换的认知过程。光学上傅里叶变换对应着夫琅禾费衍射,而分数傅里叶变换则对应着菲涅耳衍射,因此分数傅里叶变换可以作为研究衍射问题的一个重要工具。分数傅里叶变换是傅里叶变换在变换级次上的推广,即分数阶次从傅里叶变换中的阶次1扩展为任意实数(甚至是复数),它具有一些不同于傅里叶变换的性质。在一定的条件下分数傅里叶变换能够退化为傅里叶变换,因此可以认为分数傅里叶变换是广义的傅里叶变换。分数傅里叶变换提供了一种新颖的信号表征方法,它可以同时从时间(或空间)和频率角度表征信号,这一点优于傅里叶变换。分数傅里叶变换一个突出的性质就是对于分数阶次具有可加性,通过分数傅里叶变换的级联可以获得信息处理能力的提高。数学上分数傅里叶变换的算符表示形式更像一个关于分数阶的指数函数形式,即傅里叶变换算符的分数次幂。

2001年土耳其学者 Ozaktas 等出版了关于分数傅里叶变换的第一部学术专著 *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*,该书对2001年以前的分数傅里叶变换的研究及成果进行了全面而系统的介绍和总结<sup>[2]</sup>。哈尔滨工业大学冉启文教授于2002年和2004年出版了与分数傅里叶变换有关的两部著作:《分数傅里叶光学导论》和《小波分析与分数傅里叶变换及应用》<sup>[3, 4]</sup>。介绍了与分数傅里叶变换相关的理论和应用研究成果。2009年,北京理工大学的陶然教授等出版了专著《分数阶傅里叶变换及其应用》<sup>[5]</sup>,该书介绍了分数傅里叶变换的理论、性质、数值算法以及变换在图像/信号处理中的应用。2013年,哈尔滨工业大学沙学军教授等出版了专著《分数傅里叶变换原理及其在通信系统中的

应用》<sup>[6]</sup>，全面阐述了分数傅里叶变换原理及其在通信中的应用。

傅里叶变换的本征值是  $\{\pm 1, \pm i\}$  (其中  $i$  是虚数单位) 4 个不同的值, 而分数傅里叶变换的本征值是  $\exp(i\pi n\alpha/2)$ , 其中  $n$  是自然数。当  $\alpha$  是实数时, 本征值的绝对值等于 1。正是因为本征值的这个特点, 傅里叶变换和分数傅里叶变换才具有能量守恒性质。人们后来提出了复数阶傅里叶变换的概念<sup>[7]</sup>, 即认为  $\alpha$  可以选择复数。在图 1.1 中给出了不同分数阶的本征值分布情况, 实数阶对应的本征值分布在单位圆上, 而复数阶的本征值基本不在单位圆上出现, 而是分布在外部或者内部, 对于  $\alpha = 0.99 + 0.01i$  和  $\alpha = 0.99 - 0.01i$  的本征值分布趋势在单位圆处相接, 虚部为正值时在内部, 负值时在圆的外部。内部的点最终趋近于原点, 外部的点分多个轨迹趋于无穷远处。图 1.1 也暗示分数傅里叶变换具有丰富的表现形式, 在信息处理领域将有不同的应用。

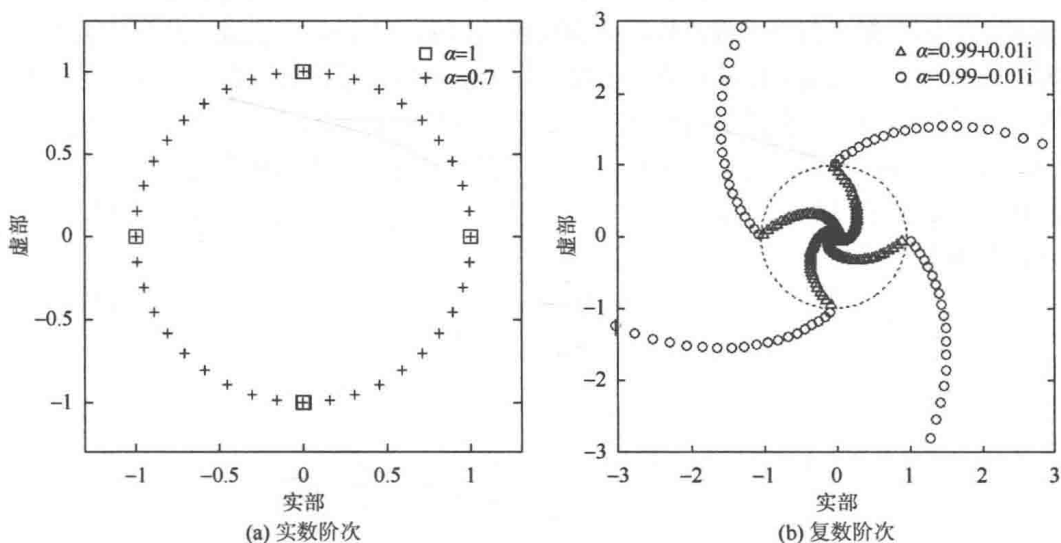


图 1.1 分数傅里叶变换的本征值

美国学者 Shih 采用 0、1、2 和 3 阶次的傅里叶变换叠加而成分数傅里叶变换<sup>[7]</sup>, 这个思想可以认为是对分数傅里叶变换的一种近似计算, 便于使用快速傅里叶变换算法进行离散分数傅里叶变换的计算。人们对本征值的性质进行了探索, 并根据本征值的多样性, 先后提出了多重分数傅里叶变换<sup>[8,9]</sup>和随机傅里叶变换<sup>[10]</sup>等概念。

在 Pei 和 Yeh 提出的分数傅里叶变换离散算法<sup>[11]</sup>基础上, Liu 等将分数傅里叶变换的本征向量矩阵和核函数随机化从而定义了离散分数随机变换<sup>[12]</sup>和随机分数傅里叶变换<sup>[13]</sup>。在一定约束规则下, 分数傅里叶变换的本征量取值具有更大变化范围, 针对不同应用, 分数阶变换具有多样化的形式。

## 1.2 图像加密

图像加密是信息安全中一个重要的课题，其主要应用于版权保护和军事信息传递等。无论数字图像加密还是光学图像加密，都要设计一个可逆的随机过程以隐藏图片或二维数据。近年来，采用光学系统实现图像加密算法的研究发展非常迅速。光学图像加密的主流还是在变换域中附加随机信息，其中双随机相位编码技术是比较典型的加密方式，用到的变换可以是傅里叶变换<sup>[14]</sup>、分数傅里叶变换<sup>[15]</sup>以及菲涅耳变换<sup>[16]</sup>。2008年深圳大学彭翔教授等出版了专著《光学信息安全导论》<sup>[17]</sup>，全面阐述了光学信息安全的基本概念和理论。

按加密原理可以把图像加密算法分为单图像加密、水印技术、图像分存加密及多图像加密4种形式。单图像加密主要是利用某一变换结合随机相位或一定的置乱技术把原始图像变得不可视，从而达到加密的目的。水印技术主要是应版权保护的要求而产生的一项信息隐藏技术。图像分存加密是将一幅图像分放到多个人那里保存，同时把相应的加密技术用到其中，要求所有分存者中的一部分人把手中的信息合起来，按某一方式解密才可能得到原始图像。图像分存加密技术通过多人之间的制约使被加密的信息处于安全状态，在一些以股份制方式进行信息处理的问题中，这样的加密方式是非常适用的。

图 1.2 显示了单图像加密、水印技术和图像分存加密的基本原理。单图像加

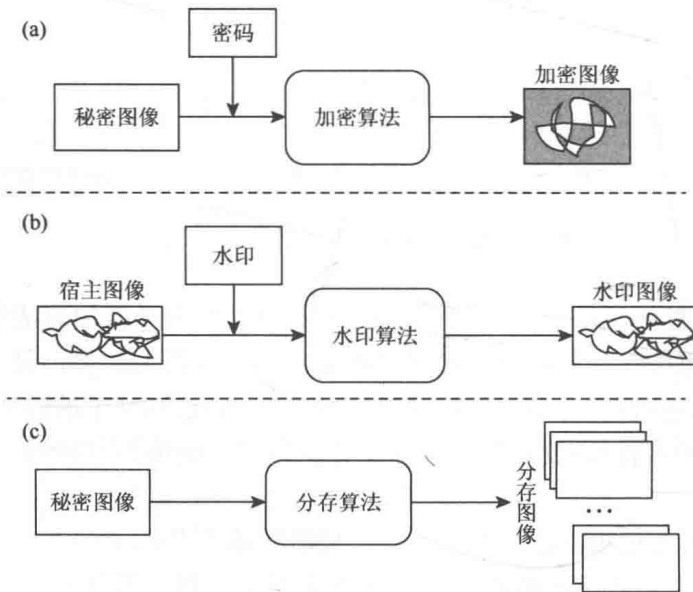


图 1.2 信息安全技术

(a) 单图像加密；(b) 水印技术；(c) 图像分存加密

密的目的是将秘密图像转为混乱的图像；水印技术将水印图像嵌入到宿主图像，而得到的水印图像与宿主图像在视觉上非常接近；图像分存加密是将秘密图像分为多幅分存图像，每一幅分存图像都是随机图案。

多图像加密<sup>[18-37]</sup>是近年来出现的一种新的加密方式，中国科学院大学司徒国海等利用基于多波长的多路技术首次提出多图像加密的概念，该技术是将多幅图像加密到一个数据载体上实现数据的凝聚。图 1.3 给出了多图像加密的原理图。多图像加密增加了加密的信息量，它不仅可以用于信息安全，还可以用在信息的传输中，起到信息压缩的作用。然而在多图像加密方法中不同图像的叠加使得在进行解密时得到的图像质量受到严重的影响。因此这种交叉干扰现象是多图像加密问题中需要考虑的问题，同时其也制约算法最多可加密的图像数量。

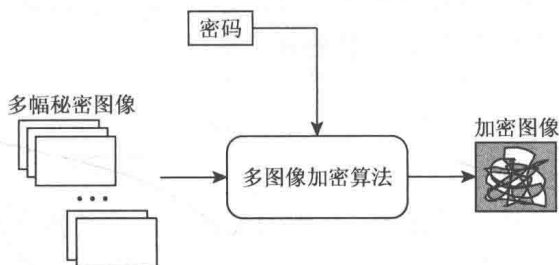


图 1.3 多图像加密的原理图



## 第 2 章 分数阶变换及其光学实现

本章介绍以分数傅里叶变换为代表的分数阶变换，包括其理论、性质以及数学实现。本章内容是本书基础，是开展光学图像编码的理论基础。

### 2.1 分数傅里叶变换

本节介绍分数傅里叶变换的研究历程、定义、光学实现以及离散变换的计算。它们是利用分数傅里叶变换进行信息处理的基础。

#### 2.1.1 定义和光学实现

1929 年, Wiener 曾试图寻找一种新的变换<sup>[38]</sup>: 它的本征函数是厄米-高斯函数, 而它的本征值形式又比傅里叶变换更加完备。Wiener 最终将本征值修正为  $\exp(-in\pi\alpha/2)$ ,  $\alpha$  是分数傅里叶变换的分数阶次。在这样的定义下一维函数  $f(x)$  分数傅里叶变换具体可以如下表示

$$\mathcal{F}^\alpha\{f(x)\}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(in\pi\alpha/2)\phi_n(u) \quad (2-1)$$

式中

$$\phi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} H_n(u) \exp(-u^2/2) \quad (2-2)$$

是归一化的  $n$  阶厄米-高斯函数, 它是分数傅里叶变换的本征函数, 同时它也是傅里叶变换的本征函数。式 (2-1) 中符号  $i$  代表虚数单位。系数  $C_n$  可由下式确定

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)dx \quad (2-3)$$

这是与分数傅里叶变换有关的初期工作。从中可以看到分数傅里叶变换和傅里叶变换之间的关联。Wiener 的工作为量子力学中的群论和算符代数有关的研究提供了理论基础。

在经历了近半个世纪的沉寂之后, 分数傅里叶变换的概念由 Namias 重新提出<sup>[39]</sup>, 并以纯数学方式重新提出了其数学表达形式, 随后人们将其用于量子力学中的 Schrödinger 方程的求解<sup>[39]</sup>。1987 年, McBride 和 Kerr 延续了 Namias 的工作, 用积分的形式进行了分数傅里叶变换的严格数学定义<sup>[40]</sup>, 函数  $f(x)$  的分数傅里叶