计算理论解析

张寅生 著

清华大学出版社

计算理论解析

张寅生 著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书介绍计算模型理论，包括计算的对象、本质、定义、分类、表达、逻辑和机械实现方法，以及计算模型的典型应用。

全书共分为6章。第1章介绍计算的对象和本质，将离散变量作为图灵计算(离散变量计算)的对象，将其逻辑确定性和机械能行可计算性作为图灵计算的本质；第2章介绍可计算函数——递归函数；第3章介绍计算机的数学原理；第4章介绍语言的计算；第5章介绍判定问题的可计算性；第6章介绍计算模型的典型应用。

本书是计算理论(计算模型、形式语言与自动机)、计算机科学技术史、逻辑学、语言学、数学、哲学的交叉研究，也是通过浅显易懂的讲解方式进行计算机核心理论教学的尝试。作者力图为计算机相关人员提供一个计算的本质特征的"灵魂"描述及其通俗解释，以使得计算机软硬件的所有任务、过程，特别是软件的表达与执行归结为数学原理和逻辑本质。

本书适合作为高等院校计算机、通信、自动化、软件工程、信息管理、数理逻辑与数学基础、生成转换语言学等专业本科生和研究生的教材。同时，由于本书内容深入浅出，能够被仅具有基本数学知识的人读懂，因此也可供对计算机理论感兴趣的广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算理论解析/张寅生著. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-43791-8

Ⅰ.①计… Ⅱ.①张… Ⅲ.①计算技术—理论 Ⅳ.①TP301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 100149 号

责任编辑：白立军 薛 阳
封面设计：何凤霞
责任校对：梁 毅
责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者：清华大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：140mm×203mm **印 张**：4.75 **字 数**：122千字
版 次：2016年8月第1版 **印 次**：2016年8月第1次印刷
印 数：1～1500
定 价：29.00元

产品编号：062491-01

前　言

本书讲解计算的主要理论和方法，期望为读者解析如下内容：

(1) 什么是计算？如何概括并形式化地表示计算？

(2) 计算的种类有哪些？它们的核心特征是什么？

(3) 如果符号是被计算的对象和结果，那么，作为符号的语言是可以被计算出来的吗？

(4) 如何通过计算判定一个问题的答案的对错？

(5) 计算模型——作为对计算本质的描述和抽象——的典型应用（模型的实例化）是什么？

大致上说，本书内容相当于“计算模型”“形式语言与自动机理论”“计算与语言”的课程内容，是这些课程的基础、核心知识及其原理、方法和效果的形象和通俗的解释。

作者认为，当前“计算模型”“形式语言与自动机理论”“计算与语言”等课程的教学存在一些问题，这些问题集中在以下两个方面。

(1) 对于计算模型，语言学和计算机科学割裂了同一或密切相关的知识。在语言学领域，乔姆斯基语法是被广为接受的，但是这些语言学的研究很少介绍这些语法与计算机的本质、图灵机的运行之间的关系；同样，一个计算机专业的人可以知晓自动机的类型，却缺少对乔姆斯基语法的特征和分析方法的了解。

这种学科分割的状况可以解释我国语言学和计算机科学技术学科发展的一些问题。语言学界承认，近百年来在语言学核心理论、有重要影响力的理论和方法方面，我国贡献很少。我们缺少像索绪尔、乔姆斯基、蒙太古等人的语言学理论那样的开创性成果，而实际上这些语言成果的原理都是在描述可计算性，通俗地说是"计算"相关的或计算本质的语言学描述。同样，在计算机科学技术领域，一个程序员会为自己熟练运用一门语言如 Java 而自豪，但是其中很多人对 Java 语法的表示却知晓不多，甚至不知道乔姆斯基语法为何物。我国的计算机应用似乎走在了世界的前列，但这些基本上是计算机某种语言的应用，却很少研制出一门计算机编程语言——那么多层出不穷的计算机编程语言：C，C ++ ，Python，Prolog，Mathematica 等都是计算理论的原创国家研制的，它的底层除了那些技术手段以外，其灵魂基本上是逻辑及可计算语言学的原理。一个学习语言学的人可能会对计算机程序员感到很陌生，而后者可能感觉前者是个文科领域的异类，但是计算机界的人士似乎并不思考为什么只能应用别人研制的编程语言，自己却不能研制一门语言。

(2) 对于图灵机本质的介绍不够深入。计算模型(图灵计算、形式理论与自动机等)课程基本上只有部分硕士研究生才会去学习，那么多计算机科学技术的本科生直到毕业也不知道图灵计算为何物——自己学的做的、自己的"饭碗"，甚至思维都是图灵计算，但就是不知道什么是"图灵计算"！这样的程序员就像一个泥瓦匠，楼房盖完了也不知如何设计房屋，完全处于工匠地位。这种状况的根源是在专业教学中缺乏对图灵机原理的充分介绍和讲解。

虽然不敢说本书能在多大程度上解决上述问题，但还是力图在架设计算机科学技术与其他学科的桥梁方面有所裨益。

概言之，计算理论、计算模型课程，重要的不仅是介绍一些

个别技术,还应该被当作计算的核心构架而被提纲挈领,应该作为计算的灵魂而被透彻理解,应该是科学史中的人类计算思想发展的脉络而被哲学家导引并被看穿。

本书力图体现出如下特点。

(1) 注重知识的系统性。深入全面介绍概念的背景、本意、关联关系,将知识放置在数学、逻辑学、计算机科学技术、语言学、科学技术史的背景下统一介绍,力图克服知识因不同学科划分而被割裂的常见弊端。

例如,对递归函数的介绍,从递归函数的源头——斯克伦、希尔伯特的定义开始介绍,将逻辑、数学、数学史、计算哲学统一起来,有助于让读者理解计算的"灵魂",能够使千变万化的计算有一个根本的概念和历史的渊源图景,这是在类似课程的教科书里不多见的。

(2) 侧重介绍图灵机是如何表示和实现递归运算的,详细地说明了图灵计算的本质是递归计算,将图灵机表述为递归函数,图示了计算机对图灵机的模拟模式。这些内容侧重图灵机的"灵魂",即图灵机实现递归函数的逻辑表示。

(3) 提出自己的独立观点,不只是介绍知识内容和进展。

例如,本书对于递归函数的分类,提出了一个递归函数分类表,在递归函数的概念内涵解释上,对我国学术界将"一般递归函数"解释为 μ-全递归函数,即将一般递归函数解释为 μ-部分递归函数的子类的观点提出了不同意见。本书认为"一般递归函数"就是广义递归函数,它是递归函数的最广义的递归函数类。

再如,本书在计算分类上提出了图灵计算包括枚举、语言识别、函数判定三类,并给出其各自的属性特征。

(4) 突出重点,侧重介绍知识主干,舍弃一些衍生的、枝节的知识。

(5) 力图深入浅出,特别注意用图示直观展示内容。

(6) 附有较多例题,便于理解和实践相关问题和方法。这些例题绝大多数是作者自己编纂、提出和设计的。

尽管如此,本书仍难免存在疏漏和不足,欢迎读者指正!

作者 张寅生

2016年1月

zhangyinshengnet@sina.com

目 录

第 1 章

计算的对象和本质

通俗地说，计算的对象指人们所说的“计算”算的是什么。计算的对象是对世界上两种存在方式进行抽象的结果，即离散状态和连续状态；离散状态和连续状态的表示即离散量和连续量。

离散量是边界清楚的离散对象的表示。两个鸡蛋好分割，于是可以抽象出“2”的概念，但是鸡蛋的曲面和外形的曲线就没有分割了，就不离散了。虽说在普朗克尺度之内，据推测宇宙空间和时间都是不连续的，而是像一个一个马赛克砖那样拼接的，但是我们做计算不针对这么小的尺度，况且如果对于数学的抽象可以不考虑宇宙的实体，那么不管在哪个尺度下都可以想象存在着永远连续的状态。

这样，说到计算，首先应清楚实际上具有两个类型的计算，即针对上述两种计算对象而产生的计算类型：连续计算和离散计算。

什么是连续计算呢？首先考察一个机械进行计算的装置。

如图 1.1 所示，已知一个椭圆，其半短轴长度为 a，半长轴长度为 b。如何得到计算椭圆半径 r 从 a 到 b（用“$a \to b$”表示）的连续变量？

图 1.1 由图 M 和图 N 两部分组成，这两个图是垂直的：图

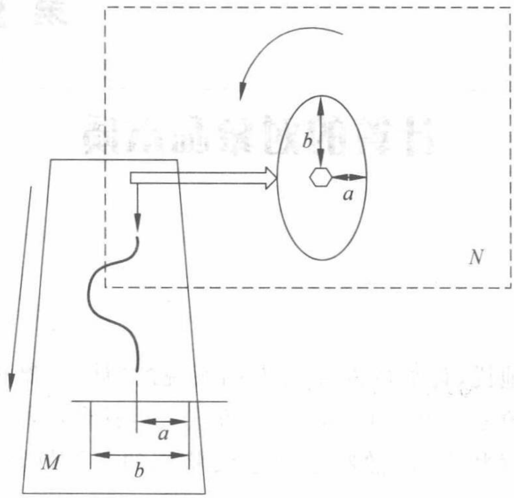

图 1.1　r 连续变化过程的计算(r 是椭圆圆心到外径之间的距离)

M 是垂直于本书纸张平面的,表示一张纸由里向外(向着读者的方向)运动;图 N 是垂直于图 M 的,即与本书纸张平面是重合的。

在图 N 平面中的一个椭圆 C,半短轴长度为 a,半长轴长度为 b。椭圆逆时针旋转。一个传递杆的一端紧贴着椭圆 C 的外周,传递杆的另一端下部有一支笔,向下画出线。那么,曲线的高度是 r,即椭圆圆心到外径之间的距离。换言之,传递杆计算了 $a \to b$ 的连续过程。虽然一般称呼这一曲线的绘制过程是"传递杆模拟了 $a \to b$ 的连续过程",但是这种模拟和(离散的)计算有什么差别呢?可能会因为没有曲线高度的具体数值而认为这个曲线不是"计算"。当然如果进行插值,即确定某一旋转的角度,比如说是 $10°$,据此获得一个确定的 x 轴(M 运动方向)的一个坐标,就会计算出 r 在此刻的值,但是当插值时已经不是连续量而是离散量了。事实上对于离散量获得的是 $b-a$ 的一个离

散状态下的关系，曲线高度确定了 $b-a$ 的一个连续状态下的关系，差别仅在于被操作对象的离散和连续的状态而已，获得 $b-a$ 关系信息的操作目标并未改变。因此，连续量的模拟也是计算，可以称之为模拟计算或连续计算。

可见，计算存在两个分支：模拟变量的计算和离散变量的计算，其结果分别对应连续变量和离散变量。随着机器人技术的到来，传感器被大量使用。这些传感信号大部分是连续的物理量，对它们的计算可以是不进行插值（通过取样获得的离散变量）后进行的计算。比如一个积分器物理器件可以模拟一个连续变量的积分。因此，模拟计算会越来越常见。也就是说，非图灵计算（模拟计算）会越来越常见。

本书并不详论模拟计算。自此之后的下文中"计算"都指离散变量的计算。

计算似乎使人觉得是人的专有能力。因此计算似乎是有"灵性"的行为。但是实际上，计算的机械化进行得相当早。

如图 1.2 所示为记载了世界上最早的十进制乘法表的竹简，即"清华简"。据介绍，"算表"形成于公元前 305 年左右的战国时期。"算表"不仅采用了十进制记数方法，还用到了乘法的交换律、分配律及分数等数学原理和概念[1][2]。

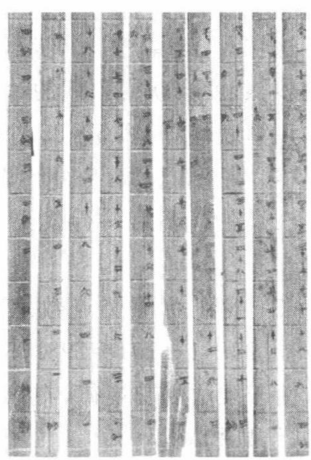

图 1.2　"清华简"中的乘法表竹简

以 35.5×22.5 为例，算表实际运算时将之分解为(30+5+0.5)×(20+2+0.5)=600+60+15+100+10+2.5+10+1+0.25=798.75。此式运算中，从算表 30、5、0.5

处引出的三条引线与从 20、2、0.5 处引出的三条线纵横交错的 9 个交点所在，恰恰就是 600、60、15、100、10、2.5、10、1、0.25 这 9 个数，这 9 个数相加即 35.5×22.5 的乘积，见表 1.1。

表 1.1 “清华简”算表进行 22.5×35.5 的算法

½	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90		
45	90	180	270	360	450	540	630	720	810	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100		90
40	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200		80
35	70	140	210	280	359	420	490	560	630	700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300		70
30	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400		60
25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500		50
20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600		40
15	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700		**30**
10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800		20
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900		10
4.5	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	180	270	360	450	540	630	720	810		9
4	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	160	240	320	400	480	560	640	720		8
3.5	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	140	210	280	350	420	490	560	630		7
3	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	120	180	240	300	360	420	480	540		6
2.5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	100	150	200	250	300	350	400	450		**5**
2	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	80	120	160	200	240	280	320	360		4
1.5	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	150	180	210	240	270		3
1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	100	120	140	160	180		2
0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90		1
0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	10	15	20	25	30	35	40	45		½

利用算表计算 22.5 × 35.5

这样看，计算是一个步骤（有顺序的操作）的集合。按照约定的步骤，就会获得预期的计算结果。

用算表计算 22.5×35.5 的操作步骤如下。

（1）将 22.5、35.5 分解为 20＋2＋1/2 和 30＋5＋1/2。

（2）在算表第一行找到 1/2、2、20，在算表最右找到 1/2、5、30。

（3）找到 9 个交点数之和：（15＋60＋600＋2.5＋10＋100＋0.25＋1＋10）＝798.75。

由于乘法的交换律，在第一列找 1/2、2、20，第一行找 1/2、5、30，结果相同。

当然，算表计算的数值不是所有自然数的计算，它最多可算

(1/2＋1＋2＋…＋9＋10＋20＋…＋90)×(1/2＋1＋2＋…＋9＋10＋20＋…＋90)＝245 520.25。

这样看，算法是可机械执行的过程的表述。因此。计算的本质首先是算法的实现（计算者——无论是人还是机器——有没有“灵性”不重要，是否正确、全面执行了指令才重要）。离散的计算对象五花八门：自然数，整数，实数，超穷数，虚数，向量，矩阵，张量，等等，用什么算法进行这些量的各种运算呢？特别是，是否有一种机械化的计算装置计算通用的离散量呢？这一问题在19世纪和20世纪获得了突破。众所周知，电子数字计算机，也就是图灵机原型的实例化，实现了上述离散量（或离散量构成的复合结构）的运算。实现的结果是实现逻辑上预期的目的，即函数的映射，也就是计算对象的逻辑蕴涵的结果，这种结果就像表1.1那样给定二维方格表的两个坐标点，映射其交叉点一样（$X\times Y\rightarrow X\times Y$），是离散对象的某种确定性的对应。

因此，离散对象的计算的本质问题实际上可以区分为两个：①如何表示多种数及其各种运算，当然最好是有限而简洁地表示成少量的几个公式，使得任意数的计算都是这些公式的计算的实例化。②如何通过算法实现所表示的运算，特别是设计一个机械装置，它恰好是这个函数的执行者。

现在重温历史，可以知道，前一个问题的解决方法是递归函数建立，建模者是斯克伦（Thoralf Skolem），后一个问题的解决方法是图灵机，发明者是图灵（Alan Turing）。图灵机是递归函数的实现；递归函数是图灵机的灵魂。换言之，如果说图灵机是自动计算装置的抽象的、理论的模型，那么，递归函数则是图灵机的抽象的、理论的模型。毕竟图灵机是机械装置的设计，而递归函数是纯数学的。形象地说，程序员的角色相当于自动计算的工匠，图灵是自动计算的工程师，斯克伦则是自动计算的科学家。

考虑到离散对象的计算的本质问题的第②点，即算法的机械化执行问题，它可以粗略地实现①，即各种数的多种运算。当然不是所有的数都能计算。比如实数的无穷计算就无法实现。但是，如果把误差考虑到很小的程度，就实现了近似计算。因此，可以用图灵计算概括地表示离散计算的本质，包括近似地实现①所述的多种数及其各种运算，并实现②通过算法机械地实现运算。于是这种计算概括为定义 1.1。

定义 1.1 （能行可计算性） 给定某个自变量 x，如果存在步骤能够获得 $\delta(x)$，即是能行可计算的。其中，n 是符号；δ 是（转移）函数。

"能行可计算性"更清楚的说法是"能通过机械地运行得以实现的可计算性"。

参考文献

[1] 李均明，冯立昇. 清华简《算表》概述. 文物，2013，(8)：73-75.

[2] Jane Qiu. Ancient times table hidden in Chinese bamboo strips/The 2,300-year-old matrix is the world's oldest decimal multiplication table. Nature, 07 January 2014.

第2章

可计算函数——递归函数

定义 2.1 （函数、关系、笛卡儿积） 设 X,Y 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 X 中的任意一个数 x,在集合 Y 中都有唯一确定的数 $f(x)$和它对应，那么就称 f: $X\to Y$为从集合 X 到集合 Y 的一个函数，记作 $y=f(x)$,$x\in X$。

在定义 2.1 中，x 叫作自变量，x 的取值范围 X 叫作函数的定义域；与 x 值相对应的 y 值叫作函数值，函数值的集合$\{y\}$或者

$$\{f(x)\mid x\in X\}$$

叫作函数的值域。

在上述定义中，应用了“对应关系”的概念。“对应关系”简称为关系。关系是笛卡儿积的子集。

给定集合 X 和 Y,用 X 中元素为第一元素，Y 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫作 X 与 Y 的笛卡儿积，记作 $X\times Y$。

例 2.1 给定两个集合 $X=\{A,B,C\}$,$Y=\{$张，王，李，赵$\}$,见图 2.1。

$X\times Y=\{$＜A,张＞,＜A,王＞,＜A,李＞,＜A,赵＞,＜B,张＞,＜B,王,＞,…,＜C,赵＞$\}$

$Y\times X=\{$＜张,A＞,＜张,B＞,＜张,C＞,＜王,A＞,….