21世纪复旦大学研究生教学用书
复旦大学数学研究生教学用书

微分几何十六讲

黄宣国 编著

复旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

21 世纪复旦大学研究生教学用书

微分几何十六讲

黄宣国　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

微分几何十六讲/黄宣国编著. —上海: 复旦大学出版社,2017.8
21 世纪复旦大学研究生教学用书. 复旦大学数学研究生教学用书
ISBN 978-7-309-12987-8

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 黄…　Ⅲ. 微分几何-研究生-教材　Ⅳ. 0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 126054 号

微分几何十六讲
黄宣国　编著
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编: 200433
网址: fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售: 86-21-65642857　团体订购: 86-21-65118853
外埠邮购: 86-21-65109143　出版部电话: 86-21-65642845
上海春秋印刷厂

开本 787×960　1/16　印张 18.5　字数 325 千
2017 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-12987-8/O·631
定价: 36.00 元

编辑出版说明

21世纪,随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展,世界将发生深刻变化,国际间的竞争日趋激烈,高层次人才的教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战.

研究生教育是教育结构中高层次的教育,肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任,是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑.为了提高研究生的培养质量和研究生教学的整体水平,必须加强研究生的教材建设,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上,必须建立适应新的教学和科研要求的有复旦特色的研究生教学用书.

"21世纪复旦大学研究生教学用书"正是为适应这一新形势而编辑出版的."21世纪复旦大学研究生教学用书"分文科、理科和医科三大类,主要出版硕士研究生学位基础课和学位专业课的教材,同时酌情出版一些使用面广、质量较高的选修课及博士研究生学位基础课教材.这些教材除可作为相关学科的研究生教学用书外,还可以供有关学者和人员参考.

收入"21世纪复旦大学研究生教学用书"的教材,大都是作者在编写成讲义后,经过多年教学实践、反复修改后才定稿的.这些作者大都治学严谨,教学实践经验丰富,教学效果也比较显著.由于我们对编辑工作尚缺乏经验,不足之处,敬请读者指正,以便我们在将来再版时加以更正和提高.

复旦大学研究生院

前　　言

我十多年来对基础数学专业微分几何方向的多届硕士研究生、直博生讲课，内容大多取自20世纪七八十年代国际上著名微分几何专家的论文.最近，利用半年多的空闲时段，整理讲课材料，成本册书.

我自认为阅读论文是件苦事，经常为了文中一个引理的证明、一段文字的叙述，查阅文献，思索多日.为此，本书的阅读起点很低，公式的推导尽可能详细，极少量不加证明的结论也尽可能指明其出处.本书是青年学生微分几何方向研究的一本入门书.

本书可以作为基础数学专业二年级硕士生或直博生的一学年的教材，也可以作为研究生讨论班的材料，供学生自己阅读、报告.

“西北望，射天狼”，希望青年学子茁壮成长，作出好的研究成果.

编著者

2016年9月

内 容 提 要

本书内容大多取自20世纪七八十年代国际上著名微分几何专家的论文。全书分三章,共16小节(即16讲)。第一章为子流形的第二基本形式长度的若干空隙性定理,第二章为常曲率空间内超曲面的若干唯一性定理,第三章为给定曲率的超曲面的几个存在性定理。本书的阅读起点较低,公式的推导尽可能详细,极少量不加证明的结论也尽可能指明出处。

本书是青年学生微分几何方向研究的一本入门书,可作为基础数学专业二年级硕士生或直博生的一学年的教材,也可作为研究生讨论班的材料。

目　录

第 1 章　子流形的第二基本形式长度的若干空隙性定理

第 1 讲　子流形的基本方程

设 M 和 N 依次是 n 维和 $n+p$ 维的 Riemann 流形. 又设 $f: M \to N$ 是(局部) 等距浸入(或等距嵌入),在局部范围内等距浸入可看作等距嵌入. 设(U, φ)是 M 的一个坐标图,设在 U 上,f 是单射(即 1—1 的),那么开集 U 和对应像集 $f(U)$ 往往不区分. 即对于 U 内任一点 P,也用同一字母 P 表示点 $f(P) \in f(U)$. 下面用$\langle , \rangle$ 表示 N 的 Riemann 内积. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+p}$ 是 N 内含点 P 的坐标图(U, φ) 的局部坐标. 取这坐标图的局部 C^∞ 正交标架场 $e_1, e_2, \cdots, e_{n+p}$, 即

$$e_C = \sum_{B=1}^{n+p} a_{CB} \frac{\partial}{\partial x_B}, \text{满足} \langle e_B, e_C \rangle = \delta_{BC}, \tag{1.1.1}$$

这里 a_{CB} 是局部 C^∞ 函数.

记

$$\nabla_{e_A} e_B = \sum_{C=1}^{n+p} \Gamma_{BC}^A e_C, \tag{1.1.2}$$

这里∇是 N 的协变导数. 由于 $e_A \langle e_B, e_C \rangle = 0$,则

$$\langle \nabla_{e_A} e_B, e_C \rangle + \langle e_B, \nabla_{e_A} e_C \rangle = 0. \tag{1.1.3}$$

由上式,有

$$\Gamma_{BC}^A + \Gamma_{CB}^A = 0. \tag{1.1.4}$$

设 ω_A, ω_{AB} $(1 \leqslant A, B \leqslant n+p)$ 是 U 上的 C^∞ 的 1 形式,它们由

$$\omega_A(e_B) = \delta_{AB}, \ \omega_{AB} = \sum_{C=1}^{n+p} \Gamma_{AB}^C \omega_C \tag{1.1.5}$$

定义.

由 Cartan 结构方程,有

$$d\omega_A = \sum_{B=1}^{n+p} \omega_B \wedge \omega_{BA}, \ \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{1.1.6}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_{C=1}^{n+p} \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2} \sum_{C,\ D=1}^{n+p} K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \tag{1.1.7}$$

这里K_{ABCD}是N的曲率张量. 本讲下标$A, B, C, D, E, \cdots \in \{1, 2, \cdots, n+p\}$. 可以知道

$$K_{BACD} + K_{BADC} = 0. \tag{1.1.8}$$

定义曲率K_{BACD}关于方向e_E的协变导数$K_{BACD,\ E}$如下:

$$\begin{aligned} dK_{BACD} = &\sum_{E=1}^{n+p} K_{BACD,\ E}\omega_E + \sum_{E=1}^{n+p} K_{EACD}\omega_{BE} + \sum_{E=1}^{n+p} K_{BECD}\omega_{AE} + \\ &\sum_{E=1}^{n+p} K_{BAED}\omega_{CE} + \sum_{E=1}^{n+p} K_{BACE}\omega_{DE}. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

如果所有的$K_{BACD,\ E}$都等于零, 则 Riemann 流形 N 称为局部对称的 Riemann 流形. 当

$$K_{BACD} = C^* (\delta_{BD}\delta_{AC} - \delta_{BC}\delta_{AD}) \tag{1.1.10}$$

时,这里C^*是一个实常数,称N是具有常曲率C^*的空间. 请读者自己证明常曲率空间是局部对称的 Riemann 流形.

在N内,选择一个局部正交标架场$e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$,使得限制于$M$,向量$e_1, e_2, \cdots, e_n$切于$M$,那么,$e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$垂直于$M$. 下述下标$i, j, k, l, \cdots \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

限制ω_A, ω_{AB}于M,首先有

$$\omega_\alpha = 0 \quad (n+1 \leqslant \alpha \leqslant n+p). \tag{1.1.11}$$

由 Frobenius 定理,由于子流形M(即$f(M)$)的存在, $d\omega_\alpha = 0$是$\omega_\alpha = 0$的代数推论($n+1 \leqslant \alpha \leqslant n+p$),限制于$M$,利用(1.1.6) 第一式及(1.1.11),有

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \wedge \omega_{j\alpha}. \tag{1.1.12}$$

限制于M,记

$$\omega_{j\alpha} = \sum_{k=1}^{n} h_{jk}^\alpha \omega_k, \ \omega_{\alpha j} = -\omega_{j\alpha} \text{(由(1.1.6) 的第二式)}. \tag{1.1.13}$$

将(1.1.13)代入(1.1.12),有

$$0=\sum_{j,\,k=1}^{n}h_{jk}^{\alpha}\omega_j\wedge\omega_k=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}h_{jk}^{\alpha}\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}h_{jk}^{\alpha}\omega_j\wedge\omega_k.\tag{1.1.14}$$

在上式右端第二项中,交换下标 j 与 k,有

$$0=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(h_{jk}^{\alpha}-h_{kj}^{\alpha})\omega_j\wedge\omega_k.\tag{1.1.15}$$

由于 $\omega_j\wedge\omega_k(1\leqslant j<k\leqslant n)$ 是 M 上 C^∞ 的 2 形式的基,由(1.1.15),在 M 上,有

$$h_{jk}^{\alpha}=h_{kj}^{\alpha}.\tag{1.1.16}$$

h_{jk}^{α} 称为 N 内子流形 M 沿单位法向量 e_α 的第二基本形式分量.

由上面叙述知,限制于 M,有

$$\begin{aligned}d\omega_i&=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\wedge\omega_{ji}\text{(利用(1.1.6)和(1.1.11))},\\ \omega_{ji}+\omega_{ij}&=0\text{(利用(1.1.6)的第二式)},\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

$$\begin{aligned}d\omega_{ji}&=\sum_{l=1}^{n}\omega_{jl}\wedge\omega_{li}+\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\omega_{j\alpha}\wedge\omega_{\alpha i}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}K_{jikl}\omega_k\wedge\omega_l\text{(利用(1.1.7)和(1.1.11))}\\ &=\sum_{l=1}^{n}\omega_{jl}\wedge\omega_{li}+\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\sum_{k,\,l=1}^{n}(h_{jk}^{\alpha}\omega_k)\wedge(-h_{il}^{\alpha}\omega_l)+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}K_{jikl}\omega_k\wedge\omega_l\\ &=\sum_{l=1}^{n}\omega_{jl}\wedge\omega_{li}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}(h_{jl}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}-h_{jk}^{\alpha}h_{il}^{\alpha})\omega_k\wedge\omega_l+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}K_{jikl}\omega_k\wedge\omega_l.\end{aligned}\tag{1.1.18}$$

在上式第二个等式右端第二大项中,交换下标 k, l,等于第三个等式右端第二大项. 令

$$R_{jikl}=K_{jikl}+\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}(h_{jl}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}-h_{jk}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}).\tag{1.1.19}$$

将(1.1.19)代入(1.1.18)有

$$d\omega_{ji}=\sum_{l=1}^{n}\omega_{jl}\wedge\omega_{li}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}R_{jikl}\omega_k\wedge\omega_l.\tag{1.1.20}$$

公式(1.1.19)称为在局部正交标架下,Riemann 流形 N 内等距浸入子流形 M 的 Gauss 方程组,(1.1.20)同时也称为 Gauss 方程组.

利用(1.1.7),又有

$$d\omega_{\alpha\beta}=\sum_{B=1}^{n+p}\omega_{\alpha B}\wedge\omega_{B\beta}+\frac{1}{2}\sum_{C,D=1}^{n+p}K_{\alpha\beta CD}\omega_C\wedge\omega_D. \tag{1.1.21}$$

限制上式于 M,利用(1.1.11),(1.1.13)和(1.1.16),有

$$\begin{aligned}d\omega_{\alpha\beta}&=\sum_{i=1}^{n}\omega_{\alpha i}\wedge\omega_{i\beta}+\sum_{\gamma=n+1}^{n+p}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}K_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1}^{n}(h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}-h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta})\omega_l\wedge\omega_k+\sum_{\gamma=n+1}^{n+p}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}K_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l\end{aligned}$$

(完全类似(1.1.18),处理上式第一个等式右端第一大项). (1.1.22)

令

$$R_{\alpha\beta kl}=K_{\alpha\beta kl}+\sum_{i=1}^{n}(h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}). \tag{1.1.23}$$

由(1.1.22)和(1.1.23),有

$$d\omega_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=n+1}^{n+p}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l. \tag{1.1.24}$$

公式(1.1.23)称为 Riemann 流形 N 内等距浸入子流形 M 的 Ricci 方程组,(1.1.24)也同时称为 Ricci 方程组.

称 $\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}^{\alpha}\omega_i\omega_j e_\alpha$ 为子流形 M 的第二基本形式,令

$$S=\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{\alpha})^2. \tag{1.1.25}$$

S 称为 Riemann 流形 N 内等距浸入子流形 M 的第二基本形式长度平方.

令

$$H=\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^{\alpha}e_\alpha. \tag{1.1.26}$$

法向量 H 称为 Riemann 流形 N 内等距浸入子流形 M 的平均曲率向量. 一个等距浸入称为极小的,如果 H 始终是零向量,即对所有 α,在 M 上,有

$$\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^{\alpha}=0. \tag{1.1.27}$$

向量 H 的长度称为 M 的平均曲率.

定义 h_{ij}^{α} 沿方向 e_k 的协变导数 h_{ijk}^{α} 如下：

$$\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}^{\alpha}\omega_k = \mathrm{d}h_{ij}^{\alpha} - \sum_{l=1}^{n} h_{il}^{\alpha}\omega_{jl} - \sum_{l=1}^{n} h_{lj}^{\alpha}\omega_{il} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.1.28}$$

对(1.1.13)的第一式两端外微分，在 M 上，有

$$\mathrm{d}\omega_{j\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}h_{ji}^{\alpha} \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{n} h_{ji}^{\alpha}\mathrm{d}\omega_i. \tag{1.1.29}$$

利用(1.1.7)和(1.1.11)，在 M 上，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_{j\alpha} &= \sum_{k=1}^{n}\omega_{jk} \wedge \omega_{k\alpha} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p}\omega_{j\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{i,\,l=1}^{n} K_{j\alpha il}\omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega_{jk} \wedge \left(\sum_{l=1}^{n} h_{kl}^{\alpha}\omega_l\right) + \sum_{\beta=n+1}^{n+p}\left(\sum_{l=1}^{n} h_{jl}^{\beta}\omega_l\right) \wedge \omega_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{i,\,l=1}^{n} K_{j\alpha il}\omega_i \wedge \omega_l \\ &\quad (\text{利用(1.1.13)第一式}).\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

由(1.1.17)第一式及(1.1.28)，有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}h_{ji}^{\alpha} \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{n} h_{ji}^{\alpha}\mathrm{d}\omega_i \\ =& \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}^{\alpha}\omega_k + \sum_{l=1}^{n} h_{li}^{\alpha}\omega_{jl} + \sum_{l=1}^{n} h_{jl}^{\alpha}\omega_{il} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ji}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}\right) \wedge \omega_i + \sum_{i,\,l=1}^{n} h_{ji}^{\alpha}\omega_l \wedge \omega_{li}.\end{aligned} \tag{1.1.31}$$

观察(1.1.30)右端第二大项与(1.1.31)右端第四大项，将这第四大项的下标 i 改为 l，可以看到这两项是相等的. 观察(1.1.30)右端第一大项，将下标 k 换成 l，l 换成 i，这一项等于(1.1.31)右端第二大项. 在(1.1.31)右端最后一大项中将下标 i，l 互换，它与(1.1.31)右端第三大项之和恰为零. 从(1.1.29)，(1.1.30)，(1.1.31)及上面的叙述，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,\,l=1}^{n} K_{j\alpha il}\omega_i \wedge \omega_l &= \sum_{i,\,k=1}^{n} h_{ijk}^{\alpha}\omega_k \wedge \omega_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,\,l=1}^{n}(h_{jli}^{\alpha} - h_{jil}^{\alpha})\omega_i \wedge \omega_l (\text{将下标 } k \text{ 换成 } l\text{，且利用(1.1.16)} \\ &\quad \text{及(1.1.28)，有 } h_{ijl}^{\alpha} = h_{jil}^{\alpha}).\end{aligned} \tag{1.1.32}$$

由上式，有

$$h_{jli}^{\alpha} - h_{jil}^{\alpha} = K_{j\alpha il}. \tag{1.1.33}$$

公式(1.1.33)称为 Riemann 流形 N 内等距浸入子流形 M 的 Codazzi 方程组.

特别地,当 N 是常曲率 C^* 的空间时,利用(1.1.10),有 $K_{j\alpha il}=0$(注意 $i, j, l\in\{1, 2, \cdots, n\}$, $\alpha\in\{n+1, \cdots, n+p\}$),从而(1.1.33) 简化为

$$h^{\alpha}_{jli}=h^{\alpha}_{jil}. \tag{1.1.34}$$

对(1.1.28)两端外微分,有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}h^{\alpha}_{ijk}\wedge\omega_k+\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{ijk}\mathrm{d}\omega_k\\ =&-\sum_{l=1}^{n}\mathrm{d}h^{\alpha}_{il}\wedge\omega_{jl}-\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{il}\mathrm{d}\omega_{jl}-\sum_{l=1}^{n}\mathrm{d}h^{\alpha}_{lj}\wedge\omega_{il}-\\ &\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{lj}\mathrm{d}\omega_{il}+\sum_{\beta=n+1}^{n+p}\mathrm{d}h^{\beta}_{ij}\wedge\omega_{\beta\alpha}+\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{ij}\mathrm{d}\omega_{\beta\alpha}.\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

定义 h^{α}_{ijk} 沿 e_l 方向的协变导数 h^{α}_{ijkl} 如下:

$$\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l=\mathrm{d}h^{\alpha}_{ijk}-\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ljk}\omega_{il}-\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ilk}\omega_{jl}-\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ijl}\omega_{kl}+\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.1.36}$$

利用(1.1.17)第一式,(1.1.20),(1.1.24),(1.1.28),(1.1.35)和(1.1.36),有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l+\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ljk}\omega_{il}+\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ilk}\omega_{jl}+\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{ijl}\omega_{kl}-\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{ijk}\omega_{\beta\alpha}\Big]\wedge\omega_k+\sum_{k,\,l=1}^{n}h^{\alpha}_{ijk}\omega_l\wedge\omega_{lk}\\ =&-\sum_{l=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{ilk}\omega_k+\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{ik}\omega_{lk}+\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{kl}\omega_{ik}-\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{il}\omega_{\beta\alpha}\Big]\wedge\omega_{jl}-\\ &\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{il}\Big[\sum_{k=1}^{n}\omega_{jk}\wedge\omega_{kl}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,s=1}^{n}R_{jlks}\omega_k\wedge\omega_s\Big]-\\ &\sum_{l=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{ljk}\omega_k+\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{kj}\omega_{lk}+\sum_{k=1}^{n}h^{\alpha}_{lk}\omega_{jk}-\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{lj}\omega_{\beta\alpha}\Big]\wedge\omega_{il}-\\ &\sum_{l=1}^{n}h^{\alpha}_{lj}\Big[\sum_{k=1}^{n}\omega_{ik}\wedge\omega_{kl}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,s=1}^{n}R_{ilks}\omega_k\wedge\omega_s\Big]+\\ &\sum_{\beta=n+1}^{n+p}\Big[\sum_{k=1}^{n}h^{\beta}_{ijk}\omega_k+\sum_{k=1}^{n}h^{\beta}_{kj}\omega_{ik}+\sum_{k=1}^{n}h^{\beta}_{ik}\omega_{jk}-\sum_{\gamma=n+1}^{n+p}h^{\gamma}_{ij}\omega_{\gamma\beta}\Big]\wedge\omega_{\beta\alpha}+\\ &\sum_{\beta=n+1}^{n+p}h^{\beta}_{ij}\Big[\sum_{\gamma=n+1}^{n+p}\omega_{\beta\gamma}\wedge\omega_{\gamma\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}R_{\beta\alpha kl}\omega_k\wedge\omega_l\Big].\end{aligned} \tag{1.1.37}$$

上式左端第三大项与上式右端第一大项相等，将上式右端第五大项中的下标 k 与 l 互换，与上式右端第二大项之和为零. 将上式右端第九大项中的下标 k，l 互换，与上式右端第三大项之和为零. 将上式右端倒数第四大项中的下标 k 与 l 互换，与上式右端第四大项之和为零. 上式左端第二大项与上式右端第七大项相等. 将上式左端最后一大项中的下标 k 与 l 互换，与上式左端第四大项之和为零. 上式左端第五大项与上式右端倒数第六大项相等. 将上式右端第十一大项中的下标 k 与 l 互换，与上式右端第八大项之和为零. 将上式右端倒数第五大项中的下标 k 换成 l，与上式右端第十大项之和为零. 将上式右端倒数第二大项中的下标 β 与 γ 互换，与上式右端倒数第三大项之和为零.

于是，化简(1.1.37)，有

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} h_{ijkl}^{\alpha}\omega_l \wedge \omega_k = -\frac{1}{2}\sum_{k,\,l,\,s=1}^{n} h_{il}^{\alpha}R_{jlks}\omega_k \wedge \omega_s - \frac{1}{2}\sum_{l,\,k,\,s=1}^{n} h_{lj}^{\alpha}R_{ilks}\omega_k \wedge \omega_s + \frac{1}{2}\sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ij}^{\beta}\sum_{k,\,l=1}^{n} R_{\beta\alpha kl}\omega_k \wedge \omega_l. \tag{1.1.38}$$

将上式右端第一大项中下标 s，l 互换，第二大项中下标 s，l 也互换，那么由下标反称化后，有

$$\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}(h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha})\omega_l \wedge \omega_k = \frac{1}{2}\sum_{k,\,l,\,s=1}^{n} h_{is}^{\alpha}R_{jskl}\omega_l \wedge \omega_k + \frac{1}{2}\sum_{k,\,l,\,s=1}^{n} h_{sj}^{\alpha}R_{iskl}\omega_l \wedge \omega_k - \frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n}\Big(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ij}^{\beta}R_{\beta\alpha kl}\Big)\omega_l \wedge \omega_k. \tag{1.1.39}$$

由上式，有

$$h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha} = \sum_{s=1}^{n} h_{sj}^{\alpha}R_{iskl} + \sum_{s=1}^{n} h_{is}^{\alpha}R_{jskl} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ij}^{\beta}R_{\beta\alpha kl}. \tag{1.1.40}$$

上述公式称为 Ricci 公式.

限制在 M 上，定义

$$\mathrm{d}K_{i\alpha kj} = \sum_{l=1}^{n} K_{i\alpha kjl}\omega_l + \sum_{l=1}^{n} K_{l\alpha kj}\omega_{il} + \sum_{l=1}^{n} K_{i\alpha lj}\omega_{kl} + \sum_{l=1}^{n} K_{i\alpha kl}\omega_{jl} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\beta kj}\omega_{\beta\alpha}. \tag{1.1.41}$$

对公式(1.1.33)两端微分，并且利用(1.1.36)，有

$$\mathrm{d}h_{ijk}^{\alpha} - \mathrm{d}h_{ikj}^{\alpha} = \Big(\sum_{l=1}^{n} h_{ijkl}^{\alpha}\omega_l + \sum_{l=1}^{n} h_{ljk}^{\alpha}\omega_{il} + \sum_{l=1}^{n} h_{ilk}^{\alpha}\omega_{jl} + \sum_{l=1}^{n} h_{ijl}^{\alpha}\omega_{kl} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h_{ijk}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}\Big) -$$

$$\left(\sum_{l=1}^{n} h^{\alpha}_{ikjl}\omega_l + \sum_{l=1}^{n} h^{\alpha}_{lkj}\omega_{il} + \sum_{l=1}^{n} h^{\alpha}_{ilj}\omega_{kl} + \sum_{l=1}^{n} h^{\alpha}_{ikl}\omega_{jl} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h^{\beta}_{ikj}\omega_{\beta\alpha} \right). \tag{1.1.42}$$

利用(1.1.33),可以看到(1.1.41)与(1.1.42)的左端应相等,于是(1.1.41)和(1.1.42)的两右端也应相等.(1.1.42)右端第二大项与第七大项之和恰等于(1.1.41)第二大项.(1.1.42)右端第三大项与(1.1.42)右端倒数第二大项之和恰等于(1.1.41)右端第四大项.(1.1.42)右端第四大项与(1.1.42)右端倒数第三大项之和恰等于(1.1.41)右端第三大项.(1.1.42)右端第五大项与(1.1.42)右端倒数第一大项之和恰等于(1.1.41)右端倒数第一大项.因而,利用 ω_1, ω_2, …, ω_n 是对偶基,可以得到

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ikjl} = K_{i\alpha kjl}. \tag{1.1.43}$$

定义第二基本形式分量 h^{α}_{ij} 的 Laplace 算子 Δh^{α}_{ij} 如下:

$$\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} h^{\alpha}_{ijkk} = \sum_{k=1}^{n} (h^{\alpha}_{ikjk} + K_{i\alpha kjk}), \tag{1.1.44}$$

这里后一个等式是利用(1.1.43).

当 N 是局部对称空间时,由(1.1.9),有

$$\mathrm{d}K_{i\alpha kj} = \sum_{E=1}^{n+p} K_{E\alpha kj}\omega_{iE} + \sum_{E=1}^{n+p} K_{iEkj}\omega_{\alpha E} + \sum_{E=1}^{n+p} K_{i\alpha Ej}\omega_{kE} + \sum_{E=1}^{n+p} K_{i\alpha kE}\omega_{jE}. \tag{1.1.45}$$

(1.1.41)左端和(1.1.45)左端相同,因而(1.1.41)右端与(1.1.45)右端应相等.(1.1.41)右端第二大项恰等于(1.1.45)右端第一大项下标 E 从 1 到 n 的部分和.(1.1.41)右端第三大项恰等于(1.1.45)右端倒数第二大项下标 E 从 1 到 n 的部分和.(1.1.41)右端第四大项恰等于(1.1.45)右端倒数第一大项下标 E 从 1 到 n 的部分和.(1.1.41)右端倒数第一大项恰等于(1.1.45)右端第二大项下标 E 从 $n+1$ 到 $n+p$ 的部分和.

于是,可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} K_{i\alpha kjl}\omega_l &= \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj}\omega_{i\beta} + \sum_{l=1}^{n} K_{ilkj}\omega_{\alpha l} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha\beta j}\omega_{k\beta} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta}\omega_{j\beta} \\ &= \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj}\sum_{l=1}^{n} h^{\beta}_{il}\omega_l - \sum_{s=1}^{n} K_{iskj}\sum_{l=1}^{n} h^{\alpha}_{sl}\omega_l + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha\beta j}\sum_{l=1}^{n} h^{\beta}_{lk}\omega_l + \\ &\quad \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta}\sum_{l=1}^{n} h^{\beta}_{jl}\omega_l \ (\text{这里应用(1.1.13)}).\end{aligned} \tag{1.1.46}$$

由上式,利用 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 是对偶基,有

$$K_{i\alpha kjl} = \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj} h^{\beta}_{il} - \sum_{s=1}^{n} K_{iskj} h^{\alpha}_{sl} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha\beta j} h^{\beta}_{kl} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta} h^{\beta}_{jl}. \tag{1.1.47}$$

利用(1.1.44)和(1.1.47),有

$$\begin{aligned}
\Delta h^{\alpha}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} h^{\alpha}_{ikjk} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj} h^{\beta}_{ik} - \sum_{s=1}^{n} K_{iskj} h^{\alpha}_{sk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha\beta j} h^{\beta}_{kk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta} h^{\beta}_{jk} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(h^{\alpha}_{ikkj} + \sum_{s=1}^{n} h^{\alpha}_{sk} R_{isjk} + \sum_{s=1}^{n} h^{\alpha}_{is} R_{ksjk} - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h^{\beta}_{ik} R_{\beta\alpha jk} \Big) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj} h^{\beta}_{ik} - \sum_{s=1}^{n} K_{iskj} h^{\alpha}_{sk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha\beta j} h^{\beta}_{kk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta} h^{\beta}_{jk} \Big) (\text{这里利用(1.1.40)}).
\end{aligned} \tag{1.1.48}$$

由于

$$\begin{aligned}
h^{\alpha}_{ikkj} &= h^{\alpha}_{kikj} (\text{利用(1.1.16)}) = h^{\alpha}_{kkij} + K_{k\alpha kij} (\text{利用(1.1.43)}) = \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha ki} h^{\beta}_{kj} - \\
&\quad \sum_{s=1}^{n} K_{kski} h^{\alpha}_{sj} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{k\alpha\beta i} h^{\beta}_{kj} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{k\alpha k\beta} h^{\beta}_{ij} + h^{\alpha}_{kkij} (\text{利用(1.1.47)}),
\end{aligned} \tag{1.1.49}$$

将(1.1.49)代入(1.1.48),有

$$\begin{aligned}
\Delta h^{\alpha}_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} h^{\alpha}_{kkij} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha j\beta} h^{\beta}_{kk} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha ki} h^{\beta}_{kj} - \sum_{s=1}^{n} K_{kski} h^{\alpha}_{sj} + \\
&\quad \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{k\alpha\beta i} h^{\beta}_{kj} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{k\alpha k\beta} h^{\beta}_{ij} \Big) + \\
&\quad \sum_{k,\,s=1}^{n} h^{\alpha}_{sk} \Big[K_{isjk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} (h^{\beta}_{ik} h^{\beta}_{sj} - h^{\beta}_{ij} h^{\beta}_{sk}) \Big] + \\
&\quad \sum_{k,\,s=1}^{n} h^{\alpha}_{is} \Big[K_{ksjk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} (h^{\beta}_{kk} h^{\beta}_{sj} - h^{\beta}_{kj} h^{\beta}_{sk}) \Big] - \\
&\quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{\beta=n+1}^{n+p} h^{\beta}_{ik} \Big[K_{\beta\alpha jk} + \sum_{l=1}^{n} (h^{\beta}_{lk} h^{\alpha}_{lj} - h^{\beta}_{lj} h^{\alpha}_{lk}) \Big] + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{\beta\alpha kj} h^{\beta}_{ik} - \sum_{s=1}^{n} K_{iskj} h^{\alpha}_{sk} + \sum_{\beta=n+1}^{n+p} K_{i\alpha k\beta} h^{\beta}_{jk} \Big) (\text{这里利用(1.1.19)和(1.1.23)}).
\end{aligned} \tag{1.1.50}$$