

分支与混沌 在二维动力学模型中的应用

》》》》》》 袁少良 ◎ 著



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

分支与混沌 在二维动力学模型中的应用

袁少良◎著



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

分支与混沌在二维动力学模型中的应用/袁少良著. —北京: 科学技术文献出版社, 2016. 12

ISBN 978-7-5189-2194-2

I. ①分… II. ①袁… III. ①动力系统 (数学)—研究 IV. ①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 311533 号

分支与混沌在二维动力学模型中的应用

策划编辑: 崔灵菲 责任编辑: 王瑞瑞 责任校对: 张叫噪 责任出版: 张志平

出 版 者 科学技术文献出版社
地 址 北京市复兴路 15 号 邮编 100038
编 务 部 (010) 58882938, 58882087 (传真)
发 行 部 (010) 58882868, 58882874 (传真)
邮 购 部 (010) 58882873
官 方 网 址 www.stdp.com.cn
发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印 刷 者 虎彩印艺股份有限公司
版 次 2016 年 12 月第 1 版 2016 年 12 月第 1 次印刷
开 本 710 × 1000 1/16
字 数 152 千
印 张 8 彩插 2 面
书 号 ISBN 978-7-5189-2194-2
定 价 42.00 元



版权所有 违法必究

购买本社图书, 凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换

前 言

动力系统在数学上是描述几何空间中的点随时间变化的情况，是研究系统的状态随着时间发展而演化规律的学科，对于给定的时间间隔内，从现在的状态演化出一个未来的状态。动力系统也是常微分方程理论的进一步发展，是非线性科学的重要组成部分，是目前学科交叉最为活跃的领域之一，已在数学、统计学、电子学、经济学、信息与计算科学等领域得到了广泛的应用。动力系统更是科学研究的一个热点，吸引着全世界很多数学家、物理学家及工程学家等加入这一领域的研究中，他们不管在理论方面，还是在应用方面，都取得了重要的研究成果，这些成果反过来又极大地推动了动力系统的发展。历史上，关于动力系统的研究，最早可追溯到 Poincaré 在 19 世纪研究天体力学时，之后 Lyapunov、Birkhoff、Andronov 等数学家进一步拓展了动力系统的内容。科学家专注于动力系统的研究工作分成 2 个阶段：1960 年以前和 1960 年以后。1960 年以前，人们主要研究一些规则运动，如谐波运动、（超）次谐波运动、极限环等；1960 年以后，侧重点为非规则运动，如拟周期运动、分支、混沌等。特别是 1960—1970 年，动力系统理论基本形成，成为一门非常重要的前沿学科，对非线性学科发展起到了促进作用。到 20 世纪 80 年代左右，逐渐变得完整，它的理论体系包括分支、混沌和分形。近 20 年来，动力系统的研究又产生了质的变

化, 分支理论与混沌理论不断被完善和补充, 无论是在理论还是应用方面, 都取得了极大的进步, 更多的人开始加入这个领域的研究中。笔者这几年主要也是从事分支与混沌理论工作的研究, 把分支与混沌理论应用到具体的数学模型中, 得到了一些研究结果, 希望这些结果能对刚进入这个领域的高年级本科生及研究生起到一些辅助作用。

本书主要是应用动力系统分支和混沌理论中的方法, 分析 2 类连续和离散的二维动力系统的分支与混沌情况。有利于加深数学专业的高年级本科生与研究生对动力系统分支理论的理解与应用, 为将来从事这方面研究的学生提供一个学习借鉴的机会。

具体地说, 本书主要详细分析了一个连续的带参数激励的 Josephson 系统和一个离散的 Tinkerbell 映射的分支及混沌情况, 同时简要介绍了一些通向混沌的道路。

对于带参数激励的 Josephson 系统, 我们把它分为 2 种未扰动系统进行研究, 即

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x$$

和

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \beta.$$

首先应用 Melnikov 方法, 在周期扰动下系统产生混沌的条件, 接着, 应用二阶平均方法和次谐波 Melnikov 函数, 分析系统在未扰动中心附近的谐波解, $(2, 3, n - \text{阶})$ 次谐波解和 $(2, 3 - \text{阶})$ 超谐波解的存在性和分支, 并且, 我们发现对于第一种未扰动系统, 应用平均化方法, 没有 2 阶次谐波解和 2 阶超谐波解发生。通过数值模拟, 包括二维参数平面和三维参数空间的分支图、最大 Lyapunov 指数图、相图、Poincaré 映射, 验证

理论分析的结果且进一步研究系统参数对动力学行为的影响。我们发现了复杂且有趣的动力学现象，如跳跃行为、周期轨的对称碰撞、瞬态混沌、混沌的产生、混沌突然转变为周期轨、内部危机、混沌吸引子、奇异的非混沌运动、非吸引的混沌集、混沌区间中连续的周期 $-n$ ($n=6, 8, 9$, 等) 轨的倍周期分支和连续的周期 $-n$ ($n=4, 8, 12$, 等) 轨的反倍周期分支等。特别是，当参数 β 增加时，我们观察到，经历一些奇异的非混沌运动之后，接着出现连续的周期轨倍周期分支到混沌这样一个过程。

对于Tinkerbell映射，应用中心流形定理和分支理论，第一次比较系统地导出了Fold分支、Flip分支和Hopf分支的存在条件并通过分析和数值模拟的方法证明存在Marotto意义下的混沌。具体地讲，我们找到了Marotto意义下的混沌，发现了一条从不变环到瞬态混沌的路径，这些瞬态混沌中有周期窗口，包括周期2、周期7、周期8、周期9、周期10、周期13、周期17、周期19、周期23、周期26等，还观察到了混沌的突然出现与消失，不变环变成周期 -1 轨，对称碰撞，混沌区域中连续的倍周期分支，内部危机，混沌吸引子，2个、10个和13个分别共存的混沌集，2个共存的不变环，以及与1个非吸引的混沌集共存的2个吸引的混沌集等动力学现象。特别是，当参数变化时，没有明显的路线从倍周期分支到混沌，但有从周期 -1 轨到不变环，然后到瞬态混沌的线路。结合现有文献及本书的新结果，使我们对Tinkerbell映射有一个较完整的理解。

全书共分为6章。

第1章，介绍本书的研究背景及现状、研究内容、方法和意义。

第2章, 预备知识, 简单介绍连续和离散动力系统的分支与混沌, 包括中心流形定理、二阶平均方法、Melnikov 方法、混沌的定义与特征、分形维数及通向混沌的道路。

第3章, 应用 Melnikov 方法给出带参数激励的 Josephson 系统:

$$\ddot{x} = -\alpha (\cos x + 2k \cos 2x) \dot{x} - \sin x - k \sin 2x + \beta + f \cos x \cos \omega t.$$

在周期扰动下产生混沌的条件, 并且通过数值模拟验证理论分析结果和系统参数对动力学性质的影响, 发现更复杂的动态。

第4章, 分析上述带参数激励的 Josephson 系统的周期解分支。应用二阶平均方法和次谐波 Melnikov 函数, 分析系统在未扰动中心附近的谐波解、 $(2, 3, n - \text{阶})$ 次谐波解和 $(2, 3 - \text{阶})$ 超谐波解的存在性和分支, 并用数值模拟验证理论结果和发现新的动态。

第5章, 研究 Tinkerbell 映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a x_n + b y_n \\ y_{n+1} = 2 x_n y_n + c x_n + d y_n \end{cases}$$

的动力学行为。主要包括应用中心流形定理和分支理论导出 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支的存在条件及 Marotto 意义下的混沌的存在条件。同时, 通过数值模拟验证所得到的理论结果及观察新的有趣动力学性质。

第6章, 介绍本书中所观察到的通往混沌的道路。

本书为国家自然科学基金资助项目 (11361067)。

希望本书的出版能对数学专业的高年级本科生与研究生将来从事科学研究产生促进作用。另外, 由于笔者学术水平有限, 书中难免出现疏漏, 敬请读者指正, 提出宝贵意见。

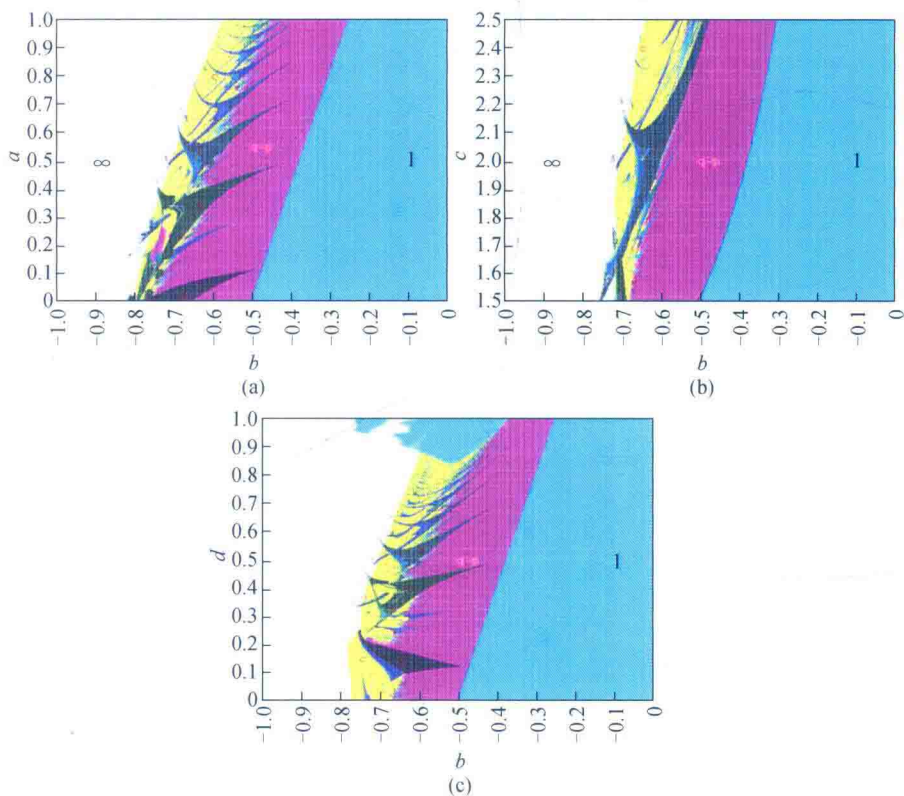


图 5.6 映射 (5.1.1) 在参数空间中的动力学分布

(a) 当 $c=2$, $d=0.5$ 时在 (a, b) 平面的分布图; (b) 当 $a=0.5$, $d=0.5$ 时在 (c, b) 平面的分布图; (c) 当 $a=0.5$, $c=2$ 时在 (d, b) 平面的分布图

目 录

1 绪论	1
1.1 研究背景及研究现状	1
1.2 主要内容	7
2 动力系统的分支与混沌	9
2.1 连续系统的分支与混沌	9
2.2 离散动力系统的分支与混沌	16
2.3 分形维数及通往混沌的道路	18
2.3.1 分形维数	18
2.3.2 通往混沌的道路	18
3 具有参数激励的 Josephson 系统的混沌	23
3.1 引言	23
3.2 未扰动系统的不动点和相图	23
3.3 异宿轨分支产生混沌	27
3.4 同宿轨分支产生混沌	29
3.5 数值模拟	33
3.6 结论	44
4 具有参数激励的 Josephson 系统的周期解分支	45
4.1 引言	45
4.2 $\omega_0 \approx \omega$ 共振与分支	46
4.2.1 未扰动系统 (3.2.2) 的情形	46

4.2.2 未扰动系统 (3.2.3) 的情形	50
4.3 $\omega \approx 2\omega_0$ 共振与分支	51
4.3.1 未扰动系统 (3.2.2) 的情形	51
4.3.2 未扰动系统 (3.2.3) 的情形	52
4.4 $\omega \approx 3\omega_0$ 共振与分支	55
4.4.1 未扰动系统 (3.2.2) 的情形	55
4.4.2 未扰动系统 (3.2.3) 的情形	58
4.5 $\omega_0 \approx 2\omega$ 共振与分支	60
4.5.1 未扰动系统 (3.2.2) 的情形	61
4.5.2 未扰动系统 (3.2.3) 的情形	61
4.6 $\omega_0 \approx 3\omega$ 共振与分支	62
4.6.1 未扰动系统 (3.2.2) 的情形	62
4.6.2 未扰动系统 (3.2.3) 的情形	64
4.7 n -阶次谐波分支	66
4.8 数值模拟	71
4.9 结论	72
5 Tinkerbell 映射的分支与混沌	74
5.1 引言	74
5.2 不动点的存在性和稳定性	75
5.3 存在 Fold 分支、Flip 分支和 Hopf 分支的充分条件	77
5.3.1 Fold 分支	78
5.3.2 Flip 分支	80
5.3.3 Hopf 分支	83
5.4 Marotto 混沌的存在性	86
5.5 数值模拟	91
5.5.1 不动点的稳定性及其分支的数值模拟	91
5.5.2 Marotto 意义下混沌的数值模拟	91
5.5.3 映射 (5.5.1) 的进一步数值模拟	94
5.6 结论	106

6 本书所观察到的通往混沌的道路	108
6.1 周期倍分支到混沌	108
6.2 阵发混沌 (Intermittency Transition to Chaos)	108
6.3 拟周期轨 (Quasi-Periodic) 破裂产生混沌	108
6.4 Crisis——状态空间中奇异吸引子尺度突然改变或 突然消失	108
6.5 同 (异) 宿轨分支到混沌	111
参考文献	112

1 绪 论

动力系统是作用在空间 M 上的半群 G , 就是说, 存在映射

$$\begin{aligned} T; G \times M &\rightarrow M, \\ (g, x) &\rightarrow T_g(x), \end{aligned}$$

使得 $T_g \circ T_h = T_{g \circ h}$, 这是动力系统在数学上的定义^[67]。如果 $G = N_0$ 或 Z , 则称之为离散动力系统; 如果 $G = R^+$ 或 R , 则称之为连续动力系统。另外, 动力系统还可以分为保守系统与耗散系统。

从数学上看, 动力系统是描述几何空间中的点随时间变化的情况, 是研究系统的状态随着时间发展而演化规律的学科。对于给定的时间间隔内, 从现在的状态只能演化出一个未来的状态, 这是动力系统的一组函数演化规则。事实上, 动力系统理论是经典常微分方程理论的一种发展, 对它的研究有助于丰富微分方程理论, 同时在应用中, 对振动、自动控制和电力系统等非线性问题的研究都有深远的影响, 所以在理论和实践上都有很重要的意义。

1.1 研究背景及研究现状

在客观世界现象中, 很多现象可以用随时间变化的非线性动力系统来描述, 这样的系统被称为非线性方程, 它的动态由方程本身、系统参数与初始条件 3 个方面来确定。我们常见的动力系统中, 大都包含一些非线性因素, 人们在研究这些非线性系统时, 常用与其逼近的线性系统来代替, 从而近似地得到其动态。但有时非线性因素会造成一些不可调和的误差, 导致逼近的线性模型失效, 特别是在分析计算系统的长时间动态行为时, 它们往往会造成根本性的错误。事实上, 关于非线性因素对系统动态即动力学问题的影响很早就引起了人们的关注。从 19 世纪末起, Andronov、Arnold^[5]、Lyapunov、Birkhoff^[9] 和 Smale^[66] 等科学家先后对非线性动力学

理论进行了研究,得到了很多奠基性的结果,再加上在实验与数值模拟中,一些研究者如 Duffing^[20]、Van der Pol^[72]、Lorenz^[46]等启发性发现,使非线性动力学得到了极大的发展。

人们在研究非线性系统动力学的过程中经历了 2 个阶段:1960 年以前,主要研究一些规则运动,如谐波运动、(超)次谐波运动、极限环等;1960 年以后,侧重点为非规则运动,如拟周期运动、分支、混沌等。特别是 1960—1970 年,动力系统理论基本形成,非线性动力学成了一门非常重要的前沿学科,对非线性学科发展起了促进作用。到 20 世纪 80 年代左右,逐渐变得完整,它的理论体系包括分支、混沌和分形,但分支理论发展遇到了瓶颈,主要是因为很多系统结构不稳定,产生的分支现象多种多样,且层次也各不相同。分支、混沌和孤子成了非线性系统动力学的 3 个基本内容,但它们之间是相互联系的,不是相互独立的。事实上,混沌是一种分支过程,而分支主要研究同(异)宿轨,同(异)宿轨也和孤子有关。混沌作为非线性系统的主要特征之一,是在确定系统(常用微分方程、迭代方程来描述这些系统)中出现的似乎不规则的运动,具有如下三大特征:①对初值敏感,对未来不可预测;②局部不稳定,而全局稳定;③混乱,是具有特定结构的许多有序行为的集合。混沌只出现在非线性系统中,但非线性系统并不都出现混沌。

近 20 年来,不管在理论还是实践中,非线性动力学都有了更大的发展,许多学者已经在从事这方面的研究,如 Anishchenko^[4]、Chen^[13]、Davies^[18]、Guckenheimer^[24]、Holmes^[28]、Hale^[25]、Melnikov^[52]、Hénon^[27]、Lakshmanan^[43]、Ueda^[70]等。以前,由于非线性因素的存在,许多难题无法解决,后来,一些成功的实践让人们意识到:要解决难题,必须正确认识和理解非线性动力学的复杂动态,即分支、混沌和孤子。对各个学科领域建立的非线性数学模型,利用非线性动力学理论和方法研究其长期动力学行为。

最近几年,计算机代数、数值模拟和图形技术都有了极大的发展,人们对非线性问题的研究也发生了变化。虽然非线性动力学处理问题的难度和广度都在提高,但人们却在更加深入地研究非线性因素对动态的影响,并不断利用分支、混沌等非线性现象造福人类。现在国际上最热门的研究领域之一就有非线性科学,它是学科交叉最好的研究领域。但同时,我们

还要看到, 由于分支和混沌的复杂性及不断出现的新的复杂动态, 非线性动力学在理论和应用两方面也产生了很多大难度的问题, 而这些问题到目前还没有解决。例如, 非线性振子的动态的变化过程和结构是如何随着参数变化而发生相应变化的人们还不完全清楚; 没有判断周期倍分支到混沌和间歇混沌的解析方法, 混沌复杂结构的判断和分析方法也缺乏; 等等。如果这些问题需要分析解决, 我们要对现有的数学方法和技巧进一步应用和推广, 并探索新的解决分支和混沌问题的研究方法。因此, 本书的研究能对非线性动力学的发展产生一点有益的帮助, 进一步推动非线性理论本身和其他学科的发展, 使它们在工程技术中得到更广泛的应用, 同时还能进一步认识连续和离散动力系统动态结构的差别及原因, 使动力系统内容更丰富。

本书以具有参数激励的 Josephson 系统和 Tinkerbell 映射为模型, 研究它们的动力学性质, 希望能对非线性系统的研究有帮助, 丰富非线性系统理论。

(1) Josephson 系统

Josephson 系统最早由 Josephson^[37] 提出, 它是电子电路理论中最典型的弱连接超导体。如果两块超导体被一层薄绝缘体分开, 我们把这样的超导体称为 Josephson 结。数学上, Josephson 结有 2 个基本模型, 这些模型称为 Josephson 方程。如果把它们参数经过适当的变化, 2 个基本模型的 Josephson 方程可表示为

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - \beta\sin\varphi + \gamma; \quad (1.1.1)$$

$$\ddot{\varphi} = -f(\varphi)\dot{\varphi} - g(\varphi) + e(t)。 \quad (1.1.2)$$

式 (1.1.1) 叫作标准电阻分流结模型 (RSJ), 其中, φ 表示通过电感器的电流; $\beta\sin\varphi$ 表示具有相位检测特征的混合环路; $\gamma - \alpha\dot{\varphi}$ 表示理想滤波器的转换函数的特征。式 (1.1.1) 的动态包括导致混沌的倍周期分支和相应于分数量子效应的次谐波相位锁定。在非线性振动理论中, 式 (1.1.2) 中 φ 表示位移, $f(\varphi)$ 代表非线性阻尼, $g(\varphi)$ 代表非线性恢复力, $e(t)$ 代表外部激励。事实上, 式 (1.1.1) 是式 (1.1.2) 的一种特殊类型, 此时, $f(\varphi)$ 和 $e(t)$ 都取常数, $g(\varphi) = \beta\sin\varphi$ 。

本书研究的 Josephson 系统属于式 (1.1.2) 中的一种。式 (1.1.2) 中的非线性函数 $f(\varphi)$ 、 $g(\varphi)$ 和外部激励 $e(t)$ 有很多种类, 下面简单介

绍它的一些特定模型。

①如果 $f(\varphi) = \delta$, $g(\varphi) = (1 + f_0 \cos(\Omega t + \Psi)) \sin\varphi + \alpha\varphi$, $e(t) = f \sin\omega t$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -\delta\dot{\varphi} - (1 + f_0 \cos(\Omega t + \Psi)) \sin\varphi - \alpha\varphi + f \sin\omega t, \quad (1.1.3)$$

这是一个具有非线性相位检测器特点的 Josephson 方程, 同时也是具有参数激励且按正弦波上下移动的钟摆方程^[88]。

②如果 $f(\varphi) = \beta + \alpha \cos\omega t$, $g(\varphi) = \sin\varphi$, $e(t) = \gamma \sin\omega t + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -(\beta + \alpha \cos\omega t) \dot{\varphi} - \sin\varphi + \gamma \sin\omega t + \zeta. \quad (1.1.4)$$

这是一个并联 Josephson 结模型, 或者被认为是具有参数激励和外部激励的钟摆方程^[62,64]。

③如果 $f(\varphi) = 1 + \alpha \cos\varphi$, $g(\varphi) = \sin\varphi$, $e(t) = \gamma \sin\omega t + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -(1 + \alpha \cos\varphi) \dot{\varphi} - \sin\varphi + \gamma \sin\omega t + \zeta. \quad (1.1.5)$$

它是具有振荡阻尼分路的 Josephson 方程, 文献 [8, 14, 15, 61, 62] 中有详细研究。

④如果 $f(\varphi) = \alpha$, $g(\varphi) = (1 - \omega^2 \cos\varphi) \sin\varphi$, $e(t) = \gamma \sin\omega t + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - (1 - \omega^2 \cos\varphi) \sin\varphi + \gamma \sin\omega t + \zeta. \quad (1.1.6)$$

这是一个具有非线性相位检测器特点或“隧道电流”的 Josephson 方程, 也被认为是具有线性阻尼与速度 ω 且沿着垂直轴左右旋转的钟摆^[53]。

⑤如果 $f(\varphi) = \alpha$, $g(\varphi) = \sin\varphi + \beta\varphi$, $e(t) = \gamma \sin\omega t + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - (\sin\varphi + \beta\varphi) + \gamma \sin\omega t + \zeta. \quad (1.1.7)$$

它被认为是具有线性反馈控制的分路 Josephson 结模型 (钟摆方程), 出现在文献 [85] 中。

⑥如果 $g_1(\varphi) = \sin\varphi + k \sin 2\varphi + \beta_2\varphi$, $f(\varphi) = g_1(\varphi) + \beta_2\varphi$, $g(\varphi) = g'_1(\varphi)$, $e(t) = \gamma \sin\omega t + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -[g_1(\varphi) + \beta_2\varphi] \dot{\varphi} - g'_1(\varphi) + \gamma \sin\omega t + \zeta. \quad (1.1.8)$$

这是一个具有混合环和线性反馈控制的 Josephson 方程, 文献 [30] 中有研究。

⑦如果 $g(\varphi) = \sin\varphi + k\sin 2\varphi$, $f(\varphi) = g'(\varphi)$ 或 $g(\varphi) = \text{常数}$, $e(t) = \zeta - \text{常数}$, 或 $e(t) = \gamma\sin\omega t + \zeta$, 或 $e(t) = \gamma_1\sin\omega_1 t + \gamma_2\sin\omega_2 t + \zeta$, 或 $e(t) = \gamma\sin(\omega t + \theta) + \zeta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - g(\varphi) + \zeta, \quad (1.1.9)$$

或

$$\ddot{\varphi} = -\alpha g'(\varphi)\dot{\varphi} - \beta g(\varphi) + \zeta, \quad (1.1.10)$$

或

$$\ddot{\varphi} = -\alpha\dot{\varphi} - g(\varphi) + \gamma\sin\omega t + \zeta, \quad (1.1.11)$$

或

$$\ddot{\varphi} = -\alpha g'(\varphi)\dot{\varphi} - \beta g(\varphi) + \gamma\sin\omega t + \zeta, \quad (1.1.12)$$

或

$$\ddot{\varphi} = -\alpha g'(\varphi)\dot{\varphi} - \beta g(\varphi) + \gamma_1\sin\omega_1 t + \gamma_2\sin\omega_2 t + \zeta, \quad (1.1.13)$$

或

$$\ddot{\varphi} = -\alpha g'(\varphi)\dot{\varphi} - \beta g(\varphi) + \gamma\sin(\omega t + \theta) + \zeta. \quad (1.1.14)$$

这些是具有混合环和理想滤波器的传递函数的 Josephson 方程, 文献 [11, 32, 33, 34, 87] 中有研究。其中, θ 为相移, 相移对周期解分支和混沌的阈值的影响参阅文献 [11, 34]。

当然, 需要说明的是, 我们不可能列出一个完整的文献清单, 其中不乏包括许多有价值的贡献。

近几十年来, Josephson 方程的研究受到了人们的关注, 它有丰富的非线性性质内容, 有很大的实用价值, 适合详细调查各种动力学状态, 吸引了各个领域科研人员进行研究, 如单机无限总线的同步电动机模型^[60]、锁相环研究^[32, 44]、单点 Josephson 结^[42]、超导推导^[16]、并联 Josephson 模型^[8]、Josephson 结电路^[1]和强迫摆^[31, 39, 61]等。Josephson 系统还经常包括一些强迫项, 特别是周期性的, 例如, Schlup^[65]通过使用扰动理论和数值计算, 扩展了包括一个 $\cos\psi$ 项的 Josephson 方程; 当 Josephson 结具有周期轨道的情况下, Abidi 与 Chua^[1]及 Odyniec 与 Chua^[55]提供了分析处理方法; 通过使用 Melnikov 方法, Salam 与 Sastry^[61]及 Bartuccelli 等^[7]证明了对某些参数值而言 Josephson 方程存在混沌。另外, 使用奇异扰动法、二阶平均化方法和 Melnikov 方法与数值模拟, Jing^[32, 33]和 Jing 等^[34, 35]讨论了 Josephson 方程更多动态信息, 包括异宿轨混沌、次谐波分支和混沌。

Xu 和 Jing^[75]在某些区间上把 Josephson 系统转化为多项式系统, 然后获得异宿轨的解析形式, 并用理论方法分析了混沌区间。Yang 等^[87]研究了具有 2 个周期扰动项的 Josephson 系统, 使用 Melnikov 方法证明了在周期扰动下存在混沌, 同时, 通过使用二阶平均化方法和 Melnikov 方法也证明了在拟周期扰动下, 其平均系统存在混沌。Cao 和 Jing^[11,35]研究了具有一个相差外力的 Josephson 系统, 给出了导致混沌的条件, 同时, 考虑了相差的变动对周期解和次谐波分支的影响。

前面说过, 本书所研究的 Josephson 系统属于式 (1.1.2) 中的一种。这里取 $g(\varphi) = \sin\varphi + k\sin 2\varphi$, $f(\varphi) = \alpha g'(\varphi)$, $e(t) = f\cos\varphi\cos\omega t + \beta$, 那么式 (1.1.2) 可写成

$$\ddot{\varphi} = -\alpha(\cos\varphi + 2k\cos 2\varphi)\dot{\varphi} - \sin\varphi - k\sin 2\varphi + f\cos\varphi\cos\omega t + \beta, \quad (1.1.15)$$

其中, $e(t) = f\cos\varphi\cos\omega t + \beta$ 是周期性参数激励项, 所以把它称为具有参数激励的 Josephson 方程。我们注意到, 这种系统一直以来关注就较少, 不是式 (1.1.3) 至式 (1.1.14) 中的一种, 对它的研究安排在第 3、第 4 章。所以本书对式 (1.1.15) 的研究是有理论与现实意义的, 所得到的一些新的且重要的结果有助于丰富 Josephson 系统的理论知识。

(2) Tinkerbell 映射

Tinkerbell 映射的具体形式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a x_n + b y_n \\ y_{n+1} = 2 x_n y_n + c x_n + d y_n \end{cases} \quad (1.1.16)$$

该系统的图形图像能够描述 Disney 影片的大部分动画场面。Tinkerbell 映射的研究是数学与许多实际情况相结合的需要。在某些具体的实际情况的需要下, 人们发现了它的一些特殊现象, 例如, 1997 年, Nusse 和 Yorke 在文献 [54] 中利用准牛顿法研究, 当 $a = 0.9$, $b = -0.6$, $c = 2$, $d = 0.5$ 时, Tinkerbell 映射有 64 个不稳定的周期-10 轨和一个具有分形边界的奇怪吸引子; 2001 年, Davidchack 等^[17]利用准牛顿法对映射实施 Schmelcher - Diakonov 方法, 观察到: 当周期增加时, 种子数量也大幅增加。此外, McSharry 等^[50]2003 年导出了当 $a = -0.3$, $b = 0.6$, $c = 2$, $d = -0.27$ 时 Tinkerbell 映射旋转分布的平均值和吸引子弯曲数目的平均值, Aulbach 等^[6]1996 年利用有限时间的射影定理, 发现当 $a = 0.9$,