普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

刘法贵 ◎主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

主　编　刘法贵

副主编　李建民　张之正　宋长明

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书内容主要包括函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程、向量代数与解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、无穷级数、数学实践与数学建模初步等. 本书结构体系严谨、语言组织精炼、论述条理简洁、例题与习题编排合理.

本书可作为高等学校非数学专业的高等数学教材，也可作为工程技术人员学习微积分知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘法贵主编. —北京：科学出版社, 2017. 8

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-052762-2

I. ①高…　II. ①刘…　III. ①高等数学-高等学校-教材　IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 102601 号

责任编辑: 胡海霞 / 责任校对: 邹慧卿　张凤琴

责任印制: 白　洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第　一　版　开本: 720 × 1000　1/16

2017 年 8 月第一次印刷　印张: 30 3/4

字数: 617 000

定价: 66. 00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《高等数学》编委会

主　编　刘法贵

副主编　李建民　张之正　宋长明

参　编　张晓飞　岳红伟　曹欣杰

　　　　梁聪刚　程　鹏

前　　言

高等数学是高等院校一门重要的基础课程, 它对培养学生的数学素养、数学思维和运用数学知识解决实际问题的能力有着重要的作用, 也是后续专业课程学习的知识基础、思想基础和方法基础.

华罗庚曾说: “宇宙之大, 粒子之微, 火箭之速, 化工之巧, 地球之变, 生物之谜, 日用之繁, 无处不用数学.” 学生学习数学, 不仅是为了掌握数学知识, 提高基本的数学素质和数学能力, 利用数学知识解决实际问题, 更是为了在今后工作中能够创造出新的知识和方法.

本书集作者多年的教学实践与教学经验编写而成. 编写所遵循的基本原则有: 一是适应素质教育, 提升科学素养与文化内涵; 二是保证数学知识体系结构完整严密, 展示数学逻辑推理严谨; 三是适宜于教师教学、学生学习, 体现以教助学、以学促教; 四是着力提升学生的数学思想与方法、数学意识与能力, 开阔学生数学视野, 体现数学思想方法之美; 五是尊重学生全面发展和个性化发展的需要, 体现数学启迪智慧之伟大.

在教学内容与体系优化上, 本书既继承传统教材结构严谨、逻辑清晰、体系完备的特点, 也对教材内容与体系进行整合、取舍和精简, 并保证理论体系之完整、逻辑推理之严密、思想方法之精妙, 做到突出重点、解决难点、围绕主线、抓住关键、着力实践创新. 基于信息技术融合教学内容的需要, 本书最后一章安排一节内容列举了 Matlab 语言在数学中应用的一些例子, 以体现数学软件在处理数学问题上的强大功能. 同时也可以看到, 数学中一些复杂的计算、复杂函数图形的描绘等问题已经不再是教师教学和学生学习的难点. 正基于此, 本书没有在诸如求解无理函数定积分等这些复杂计算方面占用过多的篇幅.

在知识深化、强化与创新上, 每章都配有思考与拓展为题的内容, 给出延伸阅读的一些材料, 希望不仅拓展读者的数学视野, 而且以此展现高等数学与其他知识体系的广泛联系, 增强学生不断思考的探索精神与创新意识.

在数学实践与建模能力提升上, 本书安排 “数学实践与数学建模初步” 一章, 择优选取一些在管理与经济、工程与技术、社会与生活等领域中常见的实践例子, 不仅让读者感受数学、感知数学、感悟数学, 也让读者充分理解数学应用之广. 在例题编排上, 一部分例题仅提供了解题的基本思路和方法, 而没有对详细的解题过程进行过多的阐释. 通过完善、补充这些例题中省略的解题过程, 以期提升学生自主学习的能力. 在习题编排上, 每节后的习题一般是用于巩固基本知识, 检验学生学

习和掌握基本理论、基本概念与基本方法等的情况, 每一章后的复习题用于深化基本知识, 有巩固数学基础知识和体现数学知识点拓展综合的考虑, 这类题目应在学完相关章节内容后再予以考虑.

本书使用中的两点说明: 一是加 $*$ 部分和第 9 章为选讲选学内容, 由教师根据学时进行安排或学生根据学习能力选学; 二是除第 9 章外, 每章的最后一节“思考与拓展”内容旨在巩固、提升、深化和强化基础知识的选学内容.

本书由刘法贵组织并主审, 参加编写人员有中原工学院宋长明, 平顶山学院李建民、梁聪刚、曹欣杰和张晓飞, 华北水利水电大学刘法贵、程鹏和岳红伟, 洛阳师范学院张之正等.

本书参考了国内外出版的一些教材和参考书, 在此, 对文献作者表示真诚的感谢.

限于作者水平, 加之时间仓促, 不当之处在所难免, 恳请批评指正.

作　者
2017 年 4 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

在近代数学许多分支中, 一些重要的概念与理论都是极限和连续函数概念的推广、延拓和深化. 其中的极限理论推动了数学理论的发展, 极限思想是高等数学中的一个重要思想和方法. 因此, 理解和掌握极限理论与思想方法是学好高等数学的关键.

1.1 函　　数

1.1.1 变量的变化范围

我们知道, 在实际问题中有变量与常量之分. 所谓变量 (也称变数或变元), 就是变化着的量, 是可以被赋予任何值的量. 在研究的具体问题中, 如果变量的值是固定的, 则称其为常量 (也称为常数).

变量都有一定的变化范围, 例如, 电子产品的使用寿命、天气的温度等. 变量的变化范围也就是变量的取值范围, 通常用区间或邻域表示, 它们是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个子集, 是实数轴上的一个点集. 区间包括以下五种类型 (其中 $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$).

(1) 闭区间 $[a, b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$, 一个点 a 组成的集合 $\{a\} = [a, a]$ 是一个特殊的闭区间.

(2) 开区间 $(a, b) = \{x|a < x < b\}$.

邻域是开区间的一个特殊情形: 对 $\delta \in \mathbb{R}$, 且 $\delta > 0$, 称开区间

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x|a-\delta < x < a+\delta\}$$

为点 a 的 δ **邻域**, 记为 $U(a, \delta)$. 如果不强调 δ, 可记为 $U(a)$. 称

$$(a-\delta, a+\delta) - \{a\} = \{x|0 < |x-a| < \delta\}$$

为点 a 的**去心邻域**, 记为 $\hat{U}(a, \delta)$(也记为 $\hat{U}(a)$).

(3) 半开半闭区间 $(a, b] = \{x|a < x \leqslant b\}$(左开右闭); $[a, b) = \{x|a \leqslant x < b\}$(左闭右开).

以上区间称为**有限区间**, 引入两个特殊的“数”: 正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$, 类似可定义以下**无限区间**.

(4) $(a, +\infty) = \{x|a < x < +\infty\}, (-\infty, b) = \{x|-\infty < x < b\}$;

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\},(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$.

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$, 此即全体实数集 $\mathbb{R}$. 一般地, 把全体实数集 $\mathbb{R}$ 与 $-\infty,+\infty$ 组成的集合称为**扩充实数集** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

在本书中, 符号 $\mathbb{Q},\mathbb{N},\mathbb{C}$ 分别表示有理数集、正整数集和复数集.

1.1.2　函数的定义

定义 1.1　设有两个非空实数集合 A 与 B, 如果有这样一个对应法则 f, 使得按照该法则, 对于 A 中的每一个数 x, 在 B 中都有唯一的数 y 与之对应, 那么称 f 是定义在 A 上且取值于 B 的**函数**. 其中 A 称为函数 f 的**定义域**, 记为 $D(f)$; 与 x 对应的 y 记为 $y=f(x)$; 集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 f 的**值域**, 记为 $R(f)$. 显然 $R(f)\subseteq B$. 若视 x,y 为变量, 则称 x 为**自变量**, y 为**因变量**.

函数的定义与自变量及因变量用什么字母表示无关. 例如, 函数 $y=f(x)$ 同样可以用 $s=f(t)$ 表示.

函数关系的实质是变量之间一种确定的对应关系 (图 1.1), 其含义是指对定义域内每一个 x, 按对应法则 f 总有唯一确定的 y 与之对应. 因此, 单值性是函数的一个重要特征. 如果给定某个对应法则, 对 $x\in A$, 总有不唯一的 $y\in B$ 与之对应, 这样的对应法则确定了一个**多值函数**. 在高等数学中, 对于多值函数, 往往附加一定条件, 将其化为单值函数, 如此处理得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如, 圆的方程 $y^2=a^2-x^2$, 当 $x\in(-a,a)$ 时, 有两个 y 值与此对应, 但我们可以把它分解为两个单值分支: 上半圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\in[-a,a])$ 和下半圆 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\in[-a,a])$.

定义域与对应法则是确定函数的两个因素, 这是函数最本质的特征 (图 1.2). 因此, 对两个函数来说, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 表示同一个函数. 例如, 函数 $f(x)=|x|$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是同一个函数, 而函数 $f(x)=1$ 与函数 $g(x)=\dfrac{x}{x}$ 就不是同一个函数, 因为后者要求 $x\neq 0$.

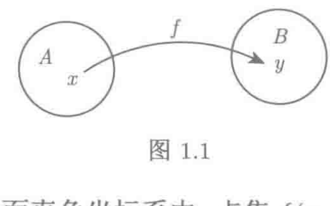

图 1.1

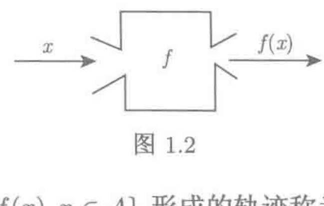

图 1.2

在平面直角坐标系中, 点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in A\}$ 形成的轨迹称为函数 $y=f(x)$ 的图象, 它通常构成一条曲线, $y=f(x)$ 称为这条曲线的方程.

函数的表示法包括公式法、图象法、表格法和描述法等, 但在理论研究和后续学习中, 公式法是比较常用的一种表示法, 图象法是一种比较直观的几何表示法, 表格法和描述法是比较少用的特殊表示法. 需要注意的是, 函数用公式法表示, 但没

有明确其定义域, 此时我们约定该函数的定义域就是使该公式有意义的一切实数. 例如, $y=\sqrt{x}$ 自然意味着 $x\geqslant 0$.

公式法表示函数, 有时未必能用一个式子表示. 例如, **符号函数**

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

再如, Dirichlet①(狄利克雷) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad (\mathbb{Q}\text{ 为有理数集}).$$

称这种形式的函数为**分段函数**. 分段函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示其对应规律, 如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

Dirichlet 函数说明了一个重要的问题: 函数的图象并不是都可以在直角坐标系中刻画出来的, 也就是说图象法不能表达所有的函数.

例 1.1　解答下列问题:

(1) 在区间 $(-\infty,0)$ 内, 函数 $g(x)=-\sqrt{1-x}$ 与 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x^3}}{x}$ 是否为同一个函数?

(2) 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求 $f(x-a)+f(x+a)$ $(a>0)$ 的定义域.

解　(1) 由于

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1-x)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1-x}}{x}.$$

注意到 $x<0$, 知 $f(x)=-\sqrt{1-x}$. 所以, $g(x)$ 与 $f(x)$ 在给定的定义域内是同一个函数.

(2) 要使函数有意义, x 需满足

$$4-x^2\geqslant 0,\quad x-1>0.$$

解之, 得 $1<x\leqslant 2$. 于是, 函数的定义域为 $\{x|1<x\leqslant 2\}$.

① Dirichlet (1805—1859), 德国数学家.

(3) 根据题意, 有 $0 \leqslant x-a \leqslant 1, 0 \leqslant x+a \leqslant 1$, 解之, 得

$$a \leqslant x \leqslant 1+a, \quad -a \leqslant x \leqslant 1-a.$$

因为 $a>0$, 所以当 $1-a \geqslant a\left(0<a \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$ 时, $a \leqslant x \leqslant 1-a$. 当 $1-a<a$ 时, 无解. 于是, 所求定义域为 $\left\{x \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant 1-a,\ 0<a \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$ 或 $\left\{x \,\middle|\, x \in \varnothing, a>\dfrac{1}{2}\right\}$.

例 1.2　设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[\pi]=3,[-2.1]=-3,[4]=4,[0.4]=0,[-1.2]=-2$. 记

$$y=[x], \quad x \in \mathbb{R}$$

所表示的函数为**取整函数**. 显然, 取整函数满足不等式

$$x-1<[x] \leqslant x.$$

对于函数 $f(x)$, 如果其定义域为正整数集 $\mathbb{N}$, 可简记为 $a_n=f(n)$ $(n=1, 2, \cdots)$. 排列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为**数列**, 用 $\{a_n\}$ 表示 (为简单起见, 以后仍记为 a_n). 其中 a_n 表示数列的通项, n 表示数列的项数. 显然, 数列是一类定义域取值于 $\mathbb{N}$ 的特殊函数.

1.1.3　几类特殊的函数

1. 有界函数

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间①, 如果存在常数 M_1, M_2, 使得对任意的 $x \in I$,

$$M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**有界函数**. 其中 M_1 和 M_2 分别称为函数 $f(x)$ 的**下界**和**上界**. 如果这样的 M_1 和 M_2 至少有一个不存在, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**无界函数**. 换句话说, 对任意给定的数 M, 总有一点 $x_0 \in I$, 使得

$$f(x_0)<M \quad \text{或} \quad f(x_0)>M.$$

例如, 函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 内有界, 函数 $y=\ln x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内无界. 因为对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|\sin x| \leqslant 1$; 而对任意的 $x \in(0,+\infty)$, 不存在正常数 M, 使 $|\ln x| \leqslant M$.

①定义区间是函数的定义域内除孤立点之外的区间, 它是定义域的一部分.

从几何上看, 有界函数的图象介于直线 $y=M_1$ 和 $y=M_2$ 之间.

综上, 注意两点: ①函数 $f(x)$ 的有界性与给定的区间有关, 如函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上有界, 但在区间 $(-1,1)$ 内无界 (因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义); ②函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界, 也有下界.

例 1.3 判定函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的有界性.

解 取 $x_0=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{N})$, 经计算, 得 $f(x_0)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 因此, 对任意的 $M>0$, 只要 $n>M$, 都有 $f(x_0)>M$. 因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无界.

2. 单调函数

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义区间, 如果对任意的 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调增加函数**, 简称**单增函数**; 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调减少函数**, 简称**单减函数**.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

如果对任意的 $x_1,x_2\in I$, 当 $x_1<x_2$ 时, 总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 是区间 I 上的**单调不减函数**(**单调不增函数**).

例如, 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少, 但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数; 函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加函数.

对数列 $a_n=f(n)$ 而言, 相应地, 可给出有界数列、无界数列、单调数列的概念.

3. 奇函数和偶函数

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 且在定义域内若满足

$$f(x)=-f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**; 若满足

$$f(x)=f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**.