高等院校数学课程改革创新系列教材

经济数学

◎游安军 主编

◎张泽林 叶鸣飞 副主编 ◎顾 珺 主审

中国工信出版集团 電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等院校数学课程改革创新系列教材

经济数学

游安军　主编
张泽林　叶鸣飞　副主编
顾　珺　主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

“经济数学”是高等职业院校经济管理类专业的一门创新性特色课程，它贯彻了“突出应用性，与专业结合，为专业服务”的课程思想，能为经济管理类专业技术人才的能力培养提供有效的支持。

本书包括函数与模型、金融计算、导数及其应用、积分及其应用 4 章，特别注重数学与经济学的融合，强调数学在解决经济管理问题中的应用，培养学生的数学应用能力。本书的组织结构新颖，语言叙述简明，例题讲解翔实，习题配备充分，非常适合作为高等职业和应用型本科院校经济管理类专业的教材，也是经济管理领域的专业人员和广大数学爱好者的有益读本。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 游安军主编. —北京：电子工业出版社，2016.11

ISBN 978-7-121-30291-6

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①游… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 268006 号

策划编辑：朱怀永

责任编辑：朱怀永　李　静
印　　刷：三河市良远印务有限公司
装　　订：三河市良远印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　　印张：12　　字数：308 千字
版　　次：2016 年 11 月第 1 版
印　　次：2016 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254609 或 hzh@phei.com.cn。

前言

《经济数学》是高等院校经济管理类专业进行数理分析的一门初级课程。这本教材在编写思想、内容组织和文本表达等方面都具有鲜明的特色。

一、编写缘起与思路

早在 2007 年，我们就准备编写一本适用于经济管理专业的《经济数学》。当时，我主持《经济数学》精品课程项目，开始接触和阅读一些经济学名著，如美国经济学家曼昆所著《微观经济学》、《宏观经济学》等，收集到一些教学素材。其间，大家一直沉浸在自己所制造的静谧学习氛围之中。正当项目有条不紊地推进时，突然得知经济管理学院以后不再开设数学课了。对此，我们有点儿不知所措，探索的热情也随之戛然而止。当时就想凭着这个借口，无疾而终地收场了事，但后来还是尽量凑合着完成了项目，其质量当然是可想而知。自从项目验收之后，那个所谓“精品”就一直被尘封着，变成了没有任何实际用途的“僵尸”，以致它也成了自己教育科研经历中的唯一败笔。

尽管如此，项目开发的过程还是产生了一个没有预料到的好结果。这就是比较认真地学习了经济学的基础知识，并让自己保留着对经济学的浓厚兴趣。因此，现在再回过头来做《经济数学》课程，我们就有了一个非常恰当的理由和自由娴适的状态。

时间如白驹过隙，转眼就到了 2015 年 10 月。有一天，经管学院会计专业顾珺主任打电话给我，说是想请我在下学期给会计专业增开一门数学课，并要求由我来讲，问是否可以接受？真的，这个事情来得非常突然。说它突然，是因为经管学院已经有长达八年的时间没有开数学课了，我以为，他们之中的所有人早就忘记了数学在经济、管理与金融等专业中所扮演的重要角色，不会再提与数学有关的事；现在居然由专业主任主动要求我来开数学课，这实在是意外。同时，这个事情来得也很巧合，因为她的这个要求正是我们 2016 年经济管理类专业数学课程改革计划的重要内容。虽然学校的数学教师相当缺乏，我依然应允了下来。其实，在他们中断数学课程的 8 年时间里，我们在其他专业的“高职数学”课程开发与研究进展得非常顺利，不仅创造性地提出了类别化高职数学的思想，而且得到了电子工业出版社的大力支持，相继出版了《计算机数学》（2013 年）、《电路数学》（2014

年）等类别化的高职数学教材，并在全国范围产生了广泛影响。应该说，经过多年的实践，高职数学类别化的思路已经非常清晰了。

传统的“高职数学”（包括高等数学）是按数学学科的知识体系来组织的。它已经沿袭了二十多年，仍然是很多大学数学教师秉承的脉络。这种教材侧重于数学的系统性和理论性，对高职学生来说，学习起来相当困难，也没有针对性。尽管大家认为，经过这种比较系统严格的数学训练，基础打扎实了，再学习其他的专业应用会比较容易；但是在绝大多数情况下，高职生没有那么多的时间与精力去学习和掌握系统化的理论数学。因此，至少在当下，这种体系受到了越来越多非数学的其他专业人士的质疑或批判。进一步地，从教育学的角度看，不管教什么样的学科和课程，都要遵循最基本、最要紧的逻辑。这就是必须弄清楚我们的教学对象是谁？他们的需要是什么？所以，当某种现存的知识体系已经不适合一个群体的学习和需要时，人们要做的就是改变这种体系，让它符合这个群体的学习特点和实际需要，即使这个体系曾经是那么的漂亮和让人迷恋，曾经为我们自己的成长做出过多么重要的贡献。从某种程度上讲，高职数学的类别化正是从这个角度出发，对传统高等数学体系进行的一种变革，而现在大家手里拿着的《经济数学》正是根据这个思路所做的再一次尝试。

二、教材内容与处理

《经济数学》包括第 1 章函数与模型、第 2 章金融计算、第 3 章导数及其应用、第 4 章积分及其应用四个部分。第 1 章介绍函数的概念、经济函数的意义、特点与相互关系；第 2 章介绍初等数学知识在经济领域里的应用。就这两章所涉及的数学知识而言，它们并没有超出普通高中的数学水平，但这些知识的讲述背景完全是经济领域的。对经济管理专业的学生来说，这将是非常新鲜、富有吸引力的。第 3 章介绍导数的概念、求导公式与法则、边际函数、弹性、函数的最优化等。第 4 章介绍不定积分的概念、性质与方法、定积分的应用等。这两章充分降低了数学知识的难度和技巧，基本上是从经济学的需要讲数学，用经济学的例子讲数学，从而实现数学与经济学的真正融合。当然，还有很多东西也应该包括在本书之中，比如矩阵、线性规划、概率统计等，它们对经济管理类专业来说也是非常的必要和有用，实在是因为学时数太少，容纳不了这些内容，只好留待以后有机会再来讲解了。

纵览全书，我们没有遵循传统高等数学的知识脉络，非常鲜明地突出了数学知识的应用，忽略了很多“必不可少的”内容和讲法。比如，关于三角函数的内容一概不涉及，因为它们与经济管理几乎没有关系；基本不讲极限的概念与运算，只是为了方便书写和表达，偶尔使用极限的“符号”；导数和不定积分章节中的材料选取和编排也与传统体系有非常明显的差别，去掉了许多繁杂的知识点和技巧；定积分更没有“分割、求和、取极限”过程，

而是直接采用其几何意义来说明。采取诸如此类的处理方法，是为了实现“突出应用性、与专业结合、为专业服务”思想。我国著名数学教育家张奠宙先生在《近代数学教育史话》中曾写过这么一段话：数学一向被尊奉为“科学的女王”……也许，数学只有“服务”得好，才更有资格当“女王”。从数学史上看，这句话是正确的。因此，对我们而言，只要尽自己的最大努力，扎实地把它做出来、做出高等职业教育的特色，然后就是静待花开；对学生而言，希望通过本书的学习，让学生发现经济数学并不是想象中的那么困难，甚至是简单的，能够最大限度地激发他们的学习热情，有效地掌握和运用这些知识与方法，为专业课程的学习和职业素养的提升奠定良好的基础。

三、致谢

感谢珠海城市职业技术学院校长刘华强研究员、副校长王宇东教授、教学科研处处长蒋庆荣博士，他们很重视目前我们正在进行的高职数学类别化工作，并设立了名师工作室予以支持。感谢经济管理学院的领导和老师，特别是金焕院长、顾珺主任，他们重启了经济数学课程，为我们的创新提供了现实空间。也感谢广东科贸职业学院张泽林副教授、广东罗定职业技术学院罗志敏副教授、江西工业职业技术学院叶鸣飞教授等热情地参与本书的编写。感谢人文与社会管理学院 2014 级社会工作专业的邹文静及其同学，她们的参与加快了我们的工作进度。最后，还要感谢电子工业出版社朱怀永编辑，他们大力推进高等职业教育数学课程的创新，给我们提供了展示自己思想和改革成果的平台，这将会在我国职业教育数学课程发展史上留下永久的记忆。

在编撰本书的过程中，我们参阅了国内外学者编撰的经济学和经济数学著作，其中有些给我们以极大启发，在此要向这些作者致以最崇高的敬意。由于编者才疏学浅，视界与角度的局限，书中存在疏漏和不足之处在所难免。期待广大读者、教师和专家在阅读和使用过程中提出建议和批评，并发送至邮箱 anjun65@sina.com。本书有配套的电子资源（包括教学大纲、教学进度表、PPT 课件、习题解答过程），请大家到电子工业出版社相关网站下载。

过去，曾有许多读者通过这个邮箱与我们讨论前面提到的已经出版的几本书中的问题，或是指出书中存在的错误。对此，我们从来都不敢怠慢，尽快回复或确认。在我们看来，大家认真仔细地阅读、演算和解题，就是对我们最好的回馈。感谢你们的关注和支持。

编 者

2016 年 7 月于珠海

目　录

第1章　函数与模型 …… 1

1.1　函数的概念 …… 1

习题 1.1 …… 9

1.2　需求与供给 …… 10

习题 1.2 …… 21

1.3　消费与储蓄 …… 22

习题 1.3 …… 31

1.4　收益与成本 …… 32

习题 1.4 …… 37

1.5　生产函数 …… 38

习题 1.5 …… 40

1.6　指数与对数 …… 41

习题 1.6 …… 46

第2章　金融计算 …… 48

2.1　百分比 …… 48

习题 2.1 …… 52

2.2　指数与通货膨胀 …… 53

习题 2.2 …… 61

2.3　复利与连续复利 …… 63

习题 2.3 …… 71

2.4　等比级数 …… 72

习题 2.4 …… 80

2.5　投资评估与决策 …… 81

习题 2.5 …… 91

第 3 章　导数及其应用 ······ **93**
3.1　导数的概念 ······ 93
习题 3.1 ······ 98
3.2　求导公式与法则 ······ 99
习题 3.2 ······ 105
3.3　边际分析 ······ 106
习题 3.3 ······ 116
3.4　弹性 ······ 117
习题 3.4 ······ 125
3.5　函数的最优化 ······ 126
习题 3.5 ······ 136
3.6　再优化 ······ 137
习题 3.6 ······ 144

第 4 章　积分及其应用 ······ **147**
4.1　不定积分的概念 ······ 147
习题 4.1 ······ 150
4.2　基本公式与方法 ······ 150
习题 4.2 ······ 152
4.3　从边际函数到原函数 ······ 153
习题 4.3 ······ 155
4.4　定积分的意义与性质 ······ 156
习题 4.4 ······ 161
4.5　定积分的应用 ······ 161
习题 4.5 ······ 174

附录　部分习题参考答案 ······ **175**

参考文献 ······ **184**

第1章　函数与模型

函数是描述变量之间相互依赖关系的重要工具，它几乎是所有应用数学的基础。经济学中的许多变量（如价格、商品数量、成本、利润、投资、利率、货币量等）都是可度量的，经济函数或模型就是这些变量之间关系的数学描述。本章介绍函数的概念、单调性、反函数、常用的经济函数、指数函数、对数函数等。

1.1　函数的概念

在中学里，我们曾学习过函数。比如，圆的面积 A 与半径 r 的关系表示为函数

$$A = \pi r^2 \qquad 0 \leqslant r < +\infty$$

又如，某种商品的市场价格 P 与需求量 Q 之间的关系表示为函数

$$P = 105 - 3Q \qquad Q \geqslant 0$$

它意味着这种商品的价格越高，需求量就会越低。

其实，一个函数就是一个法则。对于每一个输入变量 x，都有唯一确定的输出变量 y 与之对应。因此，函数可以被看作是一个“匣子”，在这个匣子里面进行着某种精确的数学运算。比如，法则“2 倍再加上 3”就是

$$\text{输入 } x \to \boxed{\text{2 倍再加上 3}} \to \text{输出 } y$$

显然，输出变量 y 的值“依赖”于输入变量 x 的值。但是，为了精确地描述这种法则，通常会采用下面的简单形式来表示：

$$y = 2x + 3 \quad \text{或} \quad f(x) = 2x + 3$$

一般地，函数可有如下几种定义方法。

定义 1.1.1

设两个集合 X 和 Y，若对集合 X 中的每一个元素 x，按照一定的对应规则 f，集合 Y 中总有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 **y 是 x 的函数**。记作

$$y = f(x) \qquad x \in X$$

其中，集合 X 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量。

比如，二次函数

$$y = f(x) = x^2 + 5x$$

其定义域 X 是所有的实数，其规则 f 是

$$(\ )\to(\ )^2+5(\ )$$

又如，在函数

$$y=\frac{1}{x+1}$$

中，定义域 X 是所有不等于-1 的实数，其规则 f 是

$$(\ )\to\frac{1}{(\ )+1}$$

对于每一个具体的 x_0，通过规则 f，有唯一确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值。所有函数值的集合称为函数的值域，记为 M。

为了更好地理解函数的定义，我们做如下说明：

（1）函数所描述的是自变量与因变量的一种对应规则或对应关系，这种规则用 f 表示，因此，f 是一个函数符号。在函数 $y=f(x)=x^2+2$ 中，f 代表着

$$(\ )\to(\ )^2+2$$

（2）定义域是函数的另一个要素。给定一个函数，就意味着同时给出了这个函数的定义域。比如，函数 $y=\sqrt{x-3}$ 的定义域是所有使得根号下 $x-3\geqslant 0$ 的实数 x。

（3）有时候，把一个函数理解为一个模型也是重要的。比如，假设某牧牛人只生产两种产品：土豆或牛肉。他生产 1 盎司土豆需要 10 分钟，生产 1 盎司牛肉需要 20 分钟。那么他每天工作 8 小时的生产可能性边界（指在可得到的生产要素与生产技术既定时，一个经济体所能生产的产量的各种组合的图形）可以表示为

$$M=-\frac{1}{2}N+24$$

其中，M 是牛肉的产量，N 是土豆的产量。

例 1.1.1

（1）已知 $f(x)=4x^2-3x$，求 $f(2)$。

（2）如果 $g(Q)=\dfrac{10}{5+2Q}$，求 $g(5)$。

解：（1）把 x=2 代入 $f(x)=4x^2-3x$ 之中，可得

$$f(2)=4\times2^2-3\times2=10$$

（2）把 Q=5 代入函数 $g(Q)$中，得

$$g(2)=\frac{10}{5+2\times5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

定义 1.1.2

在自变量的不同取值范围内，用不同式子表示不同的对应关系，这样的函数称为分段函数。

比如，函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\\ 2x-4 & x>2\end{cases}$$

就是一个分段函数，其图形如 1.1.1 所示。经济学中的分段函数是非常普遍的，下面用两个例子说明。

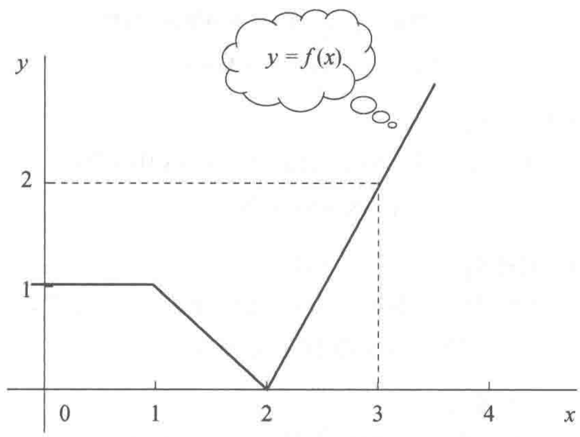

图 1.1.1

例 1.1.2

我国人个所得税采取的是累进税制，也就是超出部分的税率要递增。从 2011 年 9 月 1 日起，我国个人所得税的起征点调至 3 500 元。表 1.1.1 为现行的 7 级税率。试写出个人月收入与纳税金额间的函数关系。若小张的月收入为 12 000 元，那他应缴的税款是多少？

表 1.1.1

级数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 1 500 元的部分	3
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

解： 假设某人的月收入为 x 元，应缴税款为 y 元，根据图 1.1.2 可以写出分段函数。

图 1.1.2

即有

（1）当 $0 \leqslant x \leqslant 3\,500$ 时，

$$y=0$$

（2）当 $3\,500<x \leqslant 5\,000$ 时，

$$y=(x-3\,500)\times 3\%$$

（3）当 $5\,000<x \leqslant 8\,000$ 时，

$$\begin{aligned} y&=1\,500\times 3\%+(x-5\,000)\times 10\% \\ &=45+(x-5\,000)\times 10\% \end{aligned}$$

（4）当 $8\,000<x \leqslant 12\,500$ 时，

$$\begin{aligned} y&=45+3\,000\times 10\%+(x-8\,000)\times 20\% \\ &=345+(x-8\,000)\times 20\% \end{aligned}$$

（5）当 $12\,500<x \leqslant 38\,500$ 时，

$$\begin{aligned} y&=345+4\,500\times 20\%+(x-12\,500)\times 25\% \\ &=1\,245+(x-12\,500)\times 25\% \end{aligned}$$

（6）当 $38\,500<x \leqslant 58\,500$ 时，

$$\begin{aligned} y&=1\,245+26\,000\times 25\%+(x-38\,500)\times 30\% \\ &=7\,745+(x-38\,500)\times 30\% \end{aligned}$$

（7）当 $58\,500<x \leqslant 83\,500$ 时，

$$\begin{aligned} y&=7\,745+20\,000\times 30\%+(x-58\,500)\times 35\% \\ &=13\,745+(x-58\,500)\times 35\% \end{aligned}$$

（8）当 $x>83\,500$ 时，

$$\begin{aligned} y&=13\,745+25\,000\times 35\%+(x-83\,500)\times 45\% \\ &=22\,495+(x-83\,500)\times 45\% \end{aligned}$$

根据上面的分段函数，如果小张的月收入为 12 000 元，那么他应交的税款为

$$y=345+(12\,000-8\,000)\times 20\%=1\ 145\text{元}$$

注意，这里并不是说，如果你的月收入是 4 501 元，就要按照 20%的税率来纳税，而另一个人的月收入是 4 500 元，则只按 10%的税率来纳税。否则，这种税制就变得很荒唐。

例 1.1.3

假设销售员得到一份根据合同确定的工资，该合同规定销售员的月收入由三部分构成：（1）基本工资 800 美元，（2）10%的提成，（3）如果销售员的月销售额超过 10 000 美元，那么还可得到一次性奖励 700 美元。写出他的月收入和销售业绩之间的关系。

解： 令 s 代表每月销售业绩，p 代表销售员每月收入，则月收入和业绩之间的关系为

$$p=\begin{cases} 800+0.1s & s\leqslant 10\,000 \\ 800+700+0.1s & s>10\,000 \end{cases}$$

定义 1.1.3

设 $y=f(x)$定义在区间［a，b］上，x_1 和 x_2 分别为区间［a，b］上的任意两个数，当 $x_2>x_1$ 时，有 $f(x_2)>f(x_1)$，则称 $y=f(x)$在区间［a，b］内是**单调递增**的，如图 1.1.3 所示。当 $x_2>x_1$ 时，有 $f(x_2)<f(x_1)$，则称 $y=f(x)$在区间［a，b］内是**单调递减**的，如图 1.1.4 所示。

从函数图形上看，单调递增就是当 x 自左向右变化时，函数的图形呈现上升的形态；如图 1.1.3 所示。单调递减就是当 x 自左向右变化时，函数的图形呈现下降的形态，如图 1.1.4 所示。单调递增的或单调递减的函数统称为单调函数。

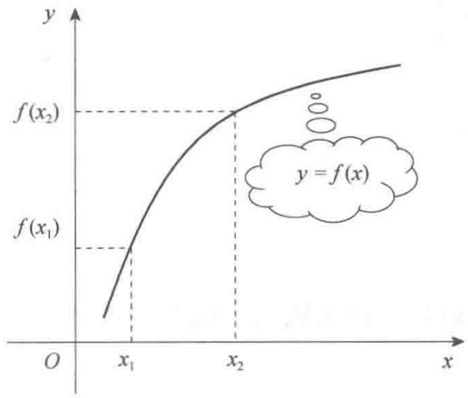

图 1.1.3

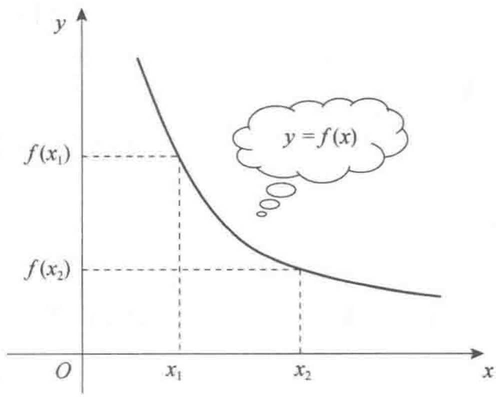

图 1.1.4

例 1.1.4

画出函数

$$P(Q)=10-2Q$$

的图形，并说明其单调性。

解：函数 $P(Q)$是线性的，其定义域是 $\mathbf{R}$。当 $Q=0$ 时，$P=10$；当 $Q=5$ 时，$P=0$。

在平面直角坐标系上描出点（0，10）、（5，0），连接这两点所得直线即为此函数的图形，如图所示 1.1.5。从图形上看，函数是单调递减的。

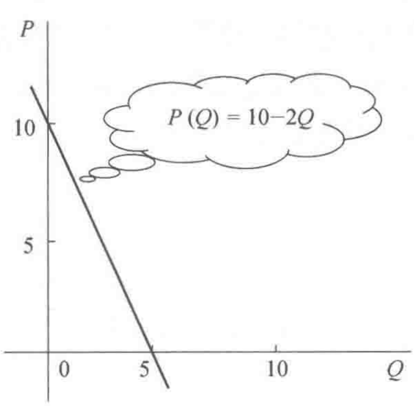

图 1.1.5

例 1.1.5

说明函数

$$f(x)=\frac{a}{x}\text{，其中 } a>0$$

的单调性，并画出函数的图形。

解： 函数 $f(x)$ 的定义域为（$-\infty$，0）与（0，$+\infty$），在其上任取两点 x_1 和 x_2。

（1）若 $x_1>x_2>0$ 时，则

$$x_2-x_1<0$$

$$f(x_1)=\frac{a}{x_1},\ f(x_2)=\frac{a}{x_2}$$

于是

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}<0$$

即

$$f(x_1)<f(x_2)$$

（2）若 $0>x_1>x_2$ 时，类似上述过程也可得出 $f(x)$ 是单调递减的，如图 1.1.6 所示。

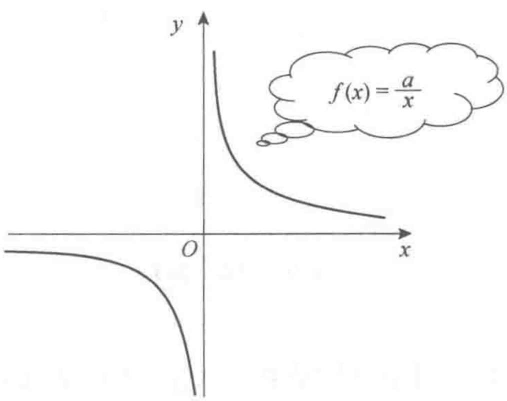

图 1.1.6

注意，例 1.1.5 中函数的图形是双曲线，它分为两部分：一部分在第一象限，另一部分在第三象限。在经济学中，我们只取第一象限的部分。当 x 趋向于 0 的时候，曲线逐渐靠近 y 轴；当 x 趋向于无穷大的时候，曲线逐渐靠近 x 轴。当 a 逐渐增大时，曲线会向外移动，逐渐远离坐标原点，但保持原来的形状不变。

例 1.1.6

画出函数

$$y=2x^2-3x+1$$

的图形，并说明其单调性。

解： 此函数是一元二次函数，找出其关键点（比如它与 x 轴、y 轴的交点，最大值点或

最小值点），然后画出函数的图形。

令 $2x^2-3x+1=0$，得

$$x=1，\ x=\frac{1}{2}$$

所以它与 x 轴的两个交点坐标为（1，0），（$\frac{1}{2}$，0）。

令 x=0，得 y=1。它与 y 轴的交点坐标为（0，1）。

二次项系数是 2，大于 0，所以它的开口向上。在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间的中点 $\frac{3}{4}$ 取得最小值 $-\frac{1}{8}$，如图 1.1.7 所示。它在（$-\infty$，$\frac{3}{4}$）上是单调递减的，在（$\frac{3}{4}$，$+\infty$）上是单调递增的。

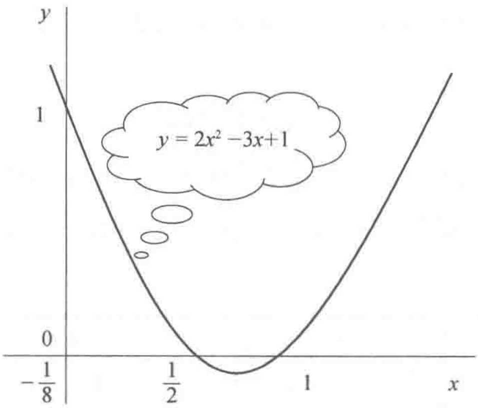

图 1.1.7

本例所示的二次函数其一般形式为 $y=ax^2+bx+c$，它在经济学上非常有用。通常，当 a>0 时，可用来描述 U 形的平均成本曲线或边际成本曲线，它在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，可用来描述总成本或总利润曲线，它在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$。求最大值或最小值的具体过程与方法如下：

$$\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}$$

在讨论函数关系时，我们也会用到一个相反的对应关系。比如，在关系式 $y=3x+2$ 之中，对每一个实数 x，有唯一确定的 y 与之对应，因而 y 是 x 的函数。但是，从另一个方向看，我们发现，对每一个实数 y，有唯一确定的 x 与之对应。这种对应关系显然符合前面的函数定义，因而此时可以说，x 是 y 的函数，记为

$$x=\frac{y-2}{3}$$

并称它为 $y=3x+2$ 的反函数。一般定义如下：

定义 1.1.4

设函数 $y=f(x)$ 定义在集合 X 上，其值域为 M。如果对集合 M 中的每一个 y，集合 X 中都有唯一确定的 x 使得 $f(x)=y$，则说 x 是 y 的函数，并称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y)$$

其定义域为 M，值域为 X。注意，此时函数的自变量为 y，因变量为 x。

为了更清晰地揭示一个函数与其反函数的关系，可以做如下对比，详见表 1.1.2。

表 1.1.2

x 与 y 的关系式	自变量	因变量	对应规则	函数
$y=3x+2$	对每个 x	有唯一的 y 与之对应	$(\ )\to 3(\ )+2$	y 是 x 的函数
	对每个 y	有唯一的 x 与之对应	$(\ )\to\frac{(\ )-2}{3}$	x 是 y 的函数

一般地说，并不是每一个函数 $y=f(x)$ 都有其相应的反函数。比如，函数

$$y=x^2$$

就没有反函数，因为在 $y=x^2$ 之中，对于每一个大于零的 y 值，与之对应的 x 值都有两个，不是唯一的。但是，函数

$$y=x^2,\ x\geqslant 0$$

是存在反函数的，因为此时对于每一个大于零的 y 值，都有唯一的 x 与之对应。其反函数为

$$x=\sqrt{y},\ y\geqslant 0$$

因此，一个函数有反函数须要满足一定的条件。这个条件就是要求函数的自变量与因变量之间的对应关系必须是一对一的。从图形上看，如果一个函数是单调递增（或单调递减）的，那么它就一定存在反函数。

例 1.1.7

求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并写出它的定义域与值域。

解： 此函数的定义域为 **R**，值域为 **R**。

对函数 $y=2x-1$ 的值域 M 中的每一个 y，在其定义域 X 中都有唯一确定的 x 与之对应。通过 $y=2x-1$ 求出 x，得

$$x=\frac{y+1}{2}$$

这就是所求的反函数。

通常情况下，人们习惯于用 x 表示自变量，y 表示因变量。所以上式也可改写为

$$y=\frac{x+1}{2}$$

这样，人们就可以把函数 $y=2x-1$ 与其反函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 画在同一坐标系中进行比较，如图 1.1.8 所示。

通过比较可以发现，一个函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。这个结论是普遍成立的。

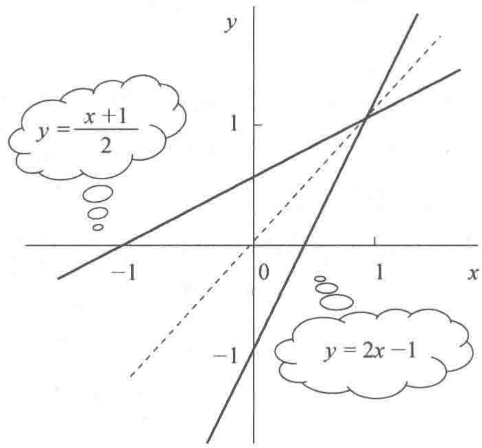

图 1.1.8

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域。

（1） $y=2x-3$　　（2） $y=-\frac{x-4}{5}$

（3） $y=\frac{18}{2x-3}$　　（4） $y=\frac{5-x}{(x-2)(x+3)}$

2. 给定两个函数 $f(x)=-2x+50$ 与 $g(x)=-\frac{1}{2}x+25$，计算 $f(25)$、$f(1)$、$g(3)$、$g(48)$ 的值，并说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是什么关系？

3. 已知分段函数 $f(t)=\begin{cases}-2 & t>-1\\(t+1)^2 & t=-1\\4t & t<-1\end{cases}$，求 $f(0)$、$f(-5)$、$f(-1)$。